

俄罗斯数学
教材选译

复变函数论方法

(第6版)

□ M. A. 拉夫连季耶夫　Б. В. 沙巴特　著
□ 施祥林　夏定中　吕乃刚　译



高等教育出版社
Higher Education Press

本书是俄罗斯综合大学和高等技术学校使用的复变函数论教材。它基于前苏联著名数学家、科学院院士拉夫连季耶夫的讲稿，由沙巴特补充整理，并经过多次修订，使内容更为合理，应用实例更为丰富，已成为该领域一本经典教材。

本书以共形映射为基本内容，把它作为工具，广泛应用于物理学、流体动力学、气体动力学、弹性力学和电气技术中实际问题的计算以及数学的其他分支。全书包括基本概念、共形映射、函数论的边值问题及其应用、共形映射的变分原理、函数论在分析上的应用、算子法及其应用、特殊函数等。

本书可供高等学校数学、物理、力学及相关专业的本科生、研究生、教师，以及相关领域的研究人员参考使用。

ISBN 7-04-018398-6



定价 68.00 元

图字：01-2005-5574 号

Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменого, Лань, 2002 г.

Originally published in Russian under the title
Methods of Functions of a Complex Variable by M. A. Lavrentieff & B.V. Shabat

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论方法：第 6 版 /(俄罗斯)拉夫连季耶夫，(俄罗斯)沙巴特著；施祥林，夏定中，吕乃刚译. —2 版. —北京：高等教育出版社，2006.1
ISBN 7-04-018398-6

Ⅰ.复… Ⅱ.①拉…②沙…③施…④夏…⑤吕… Ⅲ.复变函数论－教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 141188 号

策划编辑 张小萍　**责任编辑** 蒋　青　**封面设计** 王凌波
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京外文印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　次	1956 年 10 月第 1 版
开　本	787×1092　1/16		2006 年 1 月第 2 版
印　张	37.75	印　次	2006 年 1 月第 1 次印刷
字　数	770 000	定　价	68.00 元

物 料 号　18398－00

序

从上世纪50年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材。这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才。到了60年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用。客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的。

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益。但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾。

事情终于出现了一个转折的契机。今年初,在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立250周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版。这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视。会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要。《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出

版的。

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材。有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书。有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴。这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序。

李大潜

2005 年 10 月

第 1 版序

在我们已出版的书籍中，复变函数论的完善的教材，都是供数学专业的学生们用的，而其他的教材通常仅讲些这理论的初步知识。可是，近来在物理学中和在技术科学中，需要更深入细致地应用复变函数理论，其方法得到愈来愈广的普及。要从数学专业用的教材中汲取这方面所必须的知识，对于一个不是学数学的人来说是有困难的，而在一般的初等教材中所讲的那些知识，又嫌不够。

补足所指出的这个缺陷，便是本书的日的。有一些人是由于复变函数论在物理问题与技术问题上的应用，因而对它感到兴趣的，我们的任务就是在这本书里给他们叙述一些复变函数论的基本方法。这本书可以给大学力学系、物理系与应用物理系的学生，以及高等技术学校中具有足够数学训练的研究生作教材用。我们假定读者已经熟悉了包含在 B. И. 斯米尔诺夫的《高等数学教程》* （国家技术理论书籍出版社，1949）的首二卷范围内的数学分析基本课程。有些地方，我们也引用 Γ. M. 菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》** （卷 1—3，国家技术理论书籍出版社，1947—1949）。

在第一章中叙述了复变函数论的全部基本概念，因之读此书时可以不依赖这门学科的其他教材。而就叙述方面说，第一章也与其他各章有些不同——它写得更概括些，更简洁些。这时我们已考虑到，对于第一章的材料方面，已经有许多通俗易懂的书了。

其余的各章讲复变函数论在应用上具有重大意义的各种方法。除叙述方法外，

* 中译本，人民教育出版社，1952。

** 中译本，高等教育出版社，2005。

还附有大量的例题。如果读者在研究了关于某种方法的一些例题之后,已经通晓了这一方法,那么关于这方法的另外一些例题,可以先不读——等引用到这些例题时再回过来读它们,这样比较好一些。

书中也包含了把复变函数论应用到各种物理问题上去的大量例子。不应当那样想,以为我们是说,电机学上的例子只对于电机工作者有意义,流体力学上的例子只对力学工作者有意义。其实,对于某一个问题而说明的那些方法,常常可以有效地用来解决含有其他物理内容的类似问题。通晓了函数论在物理学不同领域中的应用的那些原理,可以帮助读者在以后的工作中,把书中就别的领域所陈述的那些方法,使用于他自己的领域中。

我们处处设法避免过于繁复的枝节证明,有时为了要叙述直观起见,还有意地容许若干不严格的地方。为了简便起见,有一些命题,在证明它们时,所用到的条件,比它所需要的更强一些;有些命题则只是叙述一下而不加证明。

最后,我们认为我们应该愉快地对 M.B.凯尔迪什院士表示衷心的感谢,他曾慎重地审阅了全部原稿,并且给予了许多十分宝贵的忠告和指示。

M.A.拉夫连季耶夫
Б.В.沙巴特
1951 年于莫斯科

第 5 版序

这一版是本书的策划者、我的永不忘怀的导师米哈依尔·阿列克赛耶维奇·拉夫连季耶夫(1900。11。1—1980.10.15)逝世后出的第一版。这位近代卓越学者、学科的组织者和青年的教育者为自己的祖国服务并献出了一生。他属于那些以自己名字和事业让人民引以为傲的队伍中的一员。

米哈依尔·阿列克赛耶维奇在著名的“鲁津派”里开始自己的科研活动,这是一个由 H.H. 鲁津领导的莫斯科数学学派,但是不久他就走自己的路。最初他在拓扑学领域进行研究,以后从事微分方程研究,随后是复变函数论的研究。在这一领域获得奠基性的结果之后,他成为重要的、举世闻名的专家之一,苏联函数论学派的带头人。

米哈依尔·阿列克赛耶维奇创造性工作的突出特点是,他有惊人的把抽象数学研究与实际问题结合起来的能力。20 世纪 30 年代初,他在中央气体流体动力学研究所工作,为发展飞机制造业和创建水翼船做了许多工作。他与自己的学生、后来成为苏联科学院院长的 M.B. 凯尔迪什一起完成了许多工作。他在有限深度液体表面上的急流和波的科学著作得到了广泛的应用。在伟大的卫国战争年代,米哈依尔·阿列克赛耶维奇深入研究了独创的聚能装药的流体动力学理论,这一理论开始时专家不相信,但是后来得到了广泛承认。在战后年代他创建了用爆破焊接金属和定向爆破的理论基础。米哈依尔·阿列克赛耶维奇是 1973 年在麦迪奥用爆破建立防泥石流坝的倡议者和科学顾问,这座坝挽救了阿拉木图。

米哈依尔·阿列克赛耶维奇在国家科学组织事业中的功绩是巨大的。他曾是苏联科学院西伯利亚分院数学研究所所长和苏联科学院副院长、斯捷克洛夫数学研究所副所长、精密机械学和计算技术研究所所长、苏联科学院数学物理学部院士书记。

他与 C. A. 列别捷夫、M. B. 凯尔迪什院士一起是创建苏联计算技术的发起者，在他的领导下开展了程序设计方面的工作。

根据米哈依尔·阿列克赛耶维奇的倡议，在 C. Л. 索波列夫和 C. A. 克里斯蒂安诺维奇院士支持下，1957 年在新西伯利亚建立了新的巨大的科研中心——科学院西伯利亚分院。米哈依尔·阿列克赛耶维奇成为它的第一任院长。他在这一职位上工作二十年左右。米哈依尔·阿列克赛耶维奇·拉夫连季耶夫走遍了从伊尔库茨克到楚科奇、从迪克森岛到千岛群岛整个西伯利亚和远东地区以后，成为纯洁贝加尔湖水、保存西伯利亚森林和大江大河的充满激情的捍卫者。米哈依尔·阿列克赛耶维奇的活动对西伯利亚和远东地区的科学发展起到了决定性作用。

还在大学生年代米哈依尔·阿列克赛耶维奇就从事过教学活动。他在喀山大学教过书，并且在革命后的最初几年就在那里学习过。迁到莫斯科后，他在鲍曼高等技术学校、化工技术学院、莫斯科大学教过数学。在 20 世纪 40 年代末米哈依尔·阿列克赛耶维奇与 Л. Λ. 卡皮采和 Л. Д. 兰道院士一起是在莫斯科大学内设立技术物理系的倡议者，这个系的使命是培养科学技术新领域的专门技术干部。这个系后来改组成莫斯科技术物理学院，它为国家培育出了许多第一流专家。

米哈依尔·阿列克赛耶维奇多年献身精神的活动获得国内外高度评价。他曾被授予社会主义劳动英雄称号、列宁和国家奖金获得者和一系列自己祖国和其他国家的最高奖励，曾担任苏联最高苏维埃代表二十多年。他曾是许多外国科学院、科学机构和社团的名誉成员，国际数学家联合会副主席。

我是在技术物理学院米哈依尔·阿列克赛耶维奇领导下工作的时候，产生了创作本书的想法。它的基础是米哈依尔·阿列克赛耶维奇的复变函数论的讲稿。书连续出了四版，并且已翻译成法文、德文、中文和越文。

在第五版中实际上保留了米哈依尔·阿列克赛耶维奇生前出版的各版的内容。

Б. В. 沙巴特

1986 年于莫斯科

第 6 版序

复变函数论是数学的重要组成部分。共形映射方法是它的基本工具,共形映射的概念是在物理学的研究中产生的,并且是一种可操作性的方法。所讨论的理论与函数论有紧密的联系。复变函数论的方法可应用于物理学、流体动力学和气体动力学、电气技术中所进行的计算,也可用于其他实际目的。本教材不仅包含理论内容,而且还列举了大量应用科学技术领域中不同领域的例子。

本教材第二章和第四章专门阐述了共形映射及其实际应用。在第二章中介绍了共形映射理论的基本原理,并给出了例子。第四章叙述了分析的变分原理,它能够判定在映射区域的边界改变时映射是如何改变的,并给出了它们用于具体应用问题的例子。第三章讨论与复变函数论有关系的主要物理概念。第一章建立在调和函数分析和平面向量场势能研究的基础上。作者列举了边值问题的提出和求解的例子,它们是在流体动力学和气体动力学、弹性理论中利用柯西型积分性质的边值问题,还进一步讨论了把复变函数应用于偏微分方程。本书对函数论应用于数学分析(第四章)和特殊函数(第七章)以及对它们的重要应用给予很大的关注。第六章专门讨论包括拉普拉斯变换和其他变换在内的算子方法的基本理论,在这一章中给出了大量利用它解微分方程和与这些方程有关的物理、力学、电气技术问题的例子。

本教材基于 M.A.拉夫连季耶夫的复变函数论的讲稿,由 Б.В.沙巴特补充、整理。本书已连续出版五次,并且被译成多种欧洲文字和东方文字。

第六版实际上与前几版没有本质上的差异。

编者

目　录

第一章　基本概念

在这一章里，要介绍复变函数论的所有基本概念：函数、函数的导数、积分等等．读者就会看到，在实变函数分析中已熟悉的这些概念的普通定义，几乎全无变更地保留着，但是它们的内容却有了很重要的改变．例如，通常用平面上曲线来表示函数的几何图示法，已经不再存在了，代替它的是那把函数看做平面点集的映射的概念（第4目）．复变函数的可微条件显得比实变函数的可微条件要严格得多（第5目）．例如，从函数在复变数范围内的可微条件，就必然地会得出所有各阶导数的存在（第17目）以及函数的许多性质，这些性质在实变函数分析中是极不常有的（第14、15以及其他诸目）．

在18世纪，数学家们已经把复数和复变函数用在他们的研究工作中了．特别伟大的是18世纪大数学家欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）的贡献，他应当算做是复变函数论的一个缔造人．在欧拉的那些卓越的著作中，详细地研究了初等复变函数，其中包含了对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数（1740—1749）；在这些著作中还给出了函数的可微条件*（1755）和复变函数积分法的基础（1777）．欧拉也曾把复变函数论应用于各种的数学问题，并且开始把它们应用到流体力学（1755—1757）与地图制图学（1777）上．

在欧拉之后，他所发现的那些结果和方法，被继续发展、改进和系统化．在19世纪的前半叶，复变函数论已经成为数学分析中一个最重要的部分了．其中主要的功绩

---

* 达朗贝尔（J. d'Alembert）在1752年从流体力学上的设想出发，也已得到了这些条件．但是只有在欧拉的著作中，才第一次弄清楚了它们的一般特性．

属于柯西(Augustin Cauchy,1789—1857)和魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass,1815—1897),他们发展了积分的计算和用级数表示函数的理论;还有黎曼(Bernhard Riemann,1826—1866),他论证了函数论的几何问题和它们的应用.

§1 复数

为了使读者方便,我们在这里先叙述一些有关于复数的概念、复数的运算和复数的几何表示的主要定义和基本事实*.

1. 复数 像 $x+iy$ 形状的式子叫做**复数**,其中 x 与 y 都是实数,而 i 则是一个符号,叫做**虚数单位**. x 与 y 两数分别叫做复数 $x+iy$ 的**实数部分**与**虚数部分**,用记号

$$x=\mathrm{Re}(x+iy),\ y=\mathrm{Im}(x+iy) \tag{1}$$

来表示.特别是,在 $y=0$ 时,$x+i0$ 可以看做同实数 x 相同;而在 $x=0$ 时,$0+iy$ 就简记作 iy,叫做**纯虚数**.

我们来规定在复数集合里的相等概念与基本运算.两个复数 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 当且仅当

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2$$

时,我们方说这两个复数**相等**,记作

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2. \tag{2}$$

还有,如果 $x_1=x_2$ 而 $y_1=-y_2$,那么复数 x_1+iy_1 就称做是与 x_2+iy_2 **共轭**的,并用符号 $\overline{x_2+iy_2}$ 来表示.因此,

$$\overline{x+iy}=x-iy. \tag{3}$$

现在我们给出复数的运算的定义.

(1) 加法 复数

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{4}$$

叫做 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 这两个复数的**和** z_1+z_2.从定义可直接得出下面的加法定律:

1) 交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1$,

2) 结合律: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$.

如果 z_1 与 z_2 两数都是实数(即,$y_1=y_2=0$),则定义(4)就与实数的加法定义相符合.

---

* 第一次提到"虚数",把它作为负数的平方根,还是在16世纪的事[卡丹(G. Cardano),1545].到18世纪中叶为止,复数仅是偶然地出现在个别数学家的著作里[牛顿,伯努利(N. Bernoulli),克莱罗(A. Clairaut)].第一篇复数理论的论文是欧拉用俄文发表的("Алгебра",Петербург,1763,以后这书被译成外国文字并且出了许多版);符号"i"也是欧拉所创用的.复数的几何表示则是在18世纪末的事[丹麦人韦塞尔(C. Wessel)].

加法可以有逆运算：对任何两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$，总可以找出一个复数 z，使 $z_2+z=z_1$. 这个复数 z 叫做 z_1, z_2 两复数的**差**，用符号 z_1-z_2 来表示. 显然

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{5}$$

(2) 乘法　复数

$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \tag{6}$$

叫做 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 这两个复数的**积**，记作 z_1z_2.

从定义可得出下面的乘法定律：

1) 交换律：　$z_1z_2=z_2z_1$,

2) 结合律：　$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$,

3) 分配律(对于加法的)：

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3.$$

如果 z_1 与 z_2 两数都是实数(即，$y_1=y_2=0$)，即定义(6)就同普通的乘法定义相符合. 在 $z_1=z_2=i$ 时，从乘积的定义就有

$$i\cdot i=-1. \tag{7}$$

容易看到，公式(6)也可用下面的方法得出：先照普通的代数法则将 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 相乘，再用 -1 来代替乘积 $i\cdot i$. 还可看出，复数 $z=x+iy$ 乘它的共轭数所得的积，永远不会是负的. 实际上从(6)式便有

$$z\bar{z}=x^2+y^2\geqslant 0. \tag{8}$$

乘法也可以有逆运算，不过要所给的乘数不等于零. 设 $z_2\neq 0$，便可求得这样的一个复数 z，使 $z_2z=z_1$；按照公式(6)，为了求出 z，需要解方程组

$$\left.\begin{aligned} x_2x-y_2y=x_1, \\ y_2x+x_2y=y_1, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

当 $z_2\neq 0$ 时，这方程组总有一个唯一的解，因为它的系数行列式是 $x_2^2+y_2^2>0$. 这个数 z 叫做 z_1 与 z_2 两数的**商**，用符号 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 来表示. 解出方程组(9)，我们便得到

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{10}$$

显然，公式(10)也可由将分数 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的分子与分母各乘以 $\bar{z}_2$ 而得到.

(3) 整次乘幂　n 个相等的数 z 的乘积叫做数 z 的 n **次乘幂**，用符号 z^n 来表示：

$$z^n=\underbrace{z\cdots z}_{n个} \tag{11}$$

其逆运算——求方根——规定如下：如果 $w^n=z$，则 w 就叫做数 z 的 n **次方根**(用符号 $\sqrt[n]{z}$ 来表示，在 $n=2$ 时，就简写成 $\sqrt{z}$). 在下面我们将看到，对于任何一个复数 $z\neq$

0,它的 n 次方根$\sqrt[n]{z}$有 n 个不同的值.

现在我们可以把等式(7)写成 $i^2=-1$ 的形式,而对于虚数单位 i,便有

$$i=\sqrt{-1} \tag{12}$$

(这里$\sqrt{-1}$表示它所可能取的两个值中的一个).

2. 几何表示 我们考虑笛卡儿坐标平面 xOy,并用坐标为(x,y)的点来表示复数 $z=x+iy$.这时实数就用 x 轴(这条轴今后将称做**实轴**)上的点来表示,而纯虚数则用 y 轴(今后称做**虚轴**)上的点来表示.特别如,虚轴上的点$(0,1)$就用来表示虚数 i.

容易看出,用这个方法,在 xOy 平面上每一个具有坐标(x,y)的点,就都与一个完全确定的复数 $z=x+iy$ 相对应,反过来也是这样.所以,在全部复数与平面上一切点之间的这个对应关系是一一对应的关系.因此今后我们对复数与平面上的点这两个概念,将不再加以区别,例如说"点 $1+i$","顶点为 z_1,z_2,z_3的三角形"等等.

再者,平面上的每一个点(x,y)都对应于一个完全确定的向量——这个点的向径,而在平面上的每一向径,也都对应于一个完全确定的点——这向径的终点(图 1).所以今后我们也将用平面上的向径形式来表示复数.

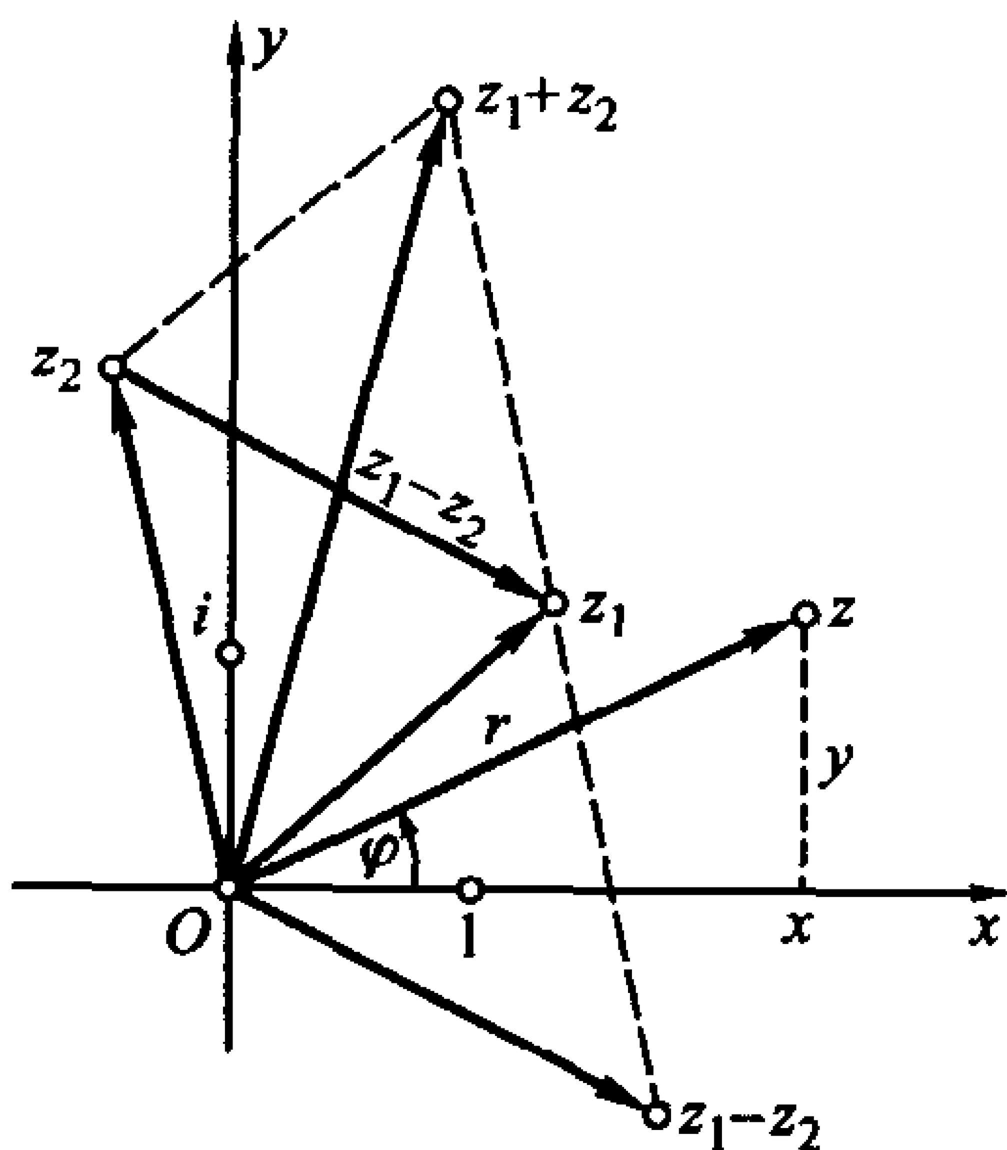


图 1

复数的加法与减法运算的几何意义,从图 1 中可以看得很清楚:两个复数 z_1与 z_2的和与差,都可用向量来表示,即分别等于由 z_1与 z_2这两个向量所构成的平行四边形的两条有向对角线.

除了复数在笛卡儿坐标内的表示法外,复数在极坐标内的表示法,在以后也很有用.为了要用极坐标来表示复数,我们同通常一样,取 x 轴的正向半轴作为极轴,取坐标原点作为极点,于是,如果把点 z 的极径记作 r,极角记作 φ (图 1),那么就有

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1}$$

极径 r 叫做复数 z 的**模**,用记号$|z|$来表示;极角 φ 叫做复数 z 的**辐角**,用记号 $\operatorname{Arg} z$ 来表示.复数的模是被唯一地确定了的:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0, \tag{2}$$

$z\neq 0$ 时它的辐角却可以相差 2π 的任何一个整倍数:

$$\varphi=\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}+2k\pi & (\text{Ⅰ,Ⅳ象限}),\\ \arctan\dfrac{y}{x}+(2k+1)\pi & (\text{Ⅱ,Ⅲ象限}),\end{cases} \tag{3}$$

在这里 arctan 表示 Arctan 的主值,即,大于 $-\frac{\pi}{2}$ 而小于等于$\frac{\pi}{2}$的那个值,k 为任何整

数.除了用来表示辐角的全体值的那个记号 Arg 外,以后我们将用记号 arg 来表示 Arg 的值中的一个值,在必要时,并将特别预先说明所取的是哪一个值(参看第 6 节).

下面的这两个不等式很是明显(见图 1):

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ |z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{4}$$

在(4)中的等号,当且仅当 $\mathrm{Arg}\ z_1=\mathrm{Arg}\ z_2$ 或其中之一为 0 时,方能成立.

从上一目中的定义(6)得出:当两个复数相乘时,它们的模相乘,而辐角则相加.实际上,我们有

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1r_2\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\ &\quad+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)\}\\ &=r_1r_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

由此可见:在复数 z_1 乘以 z_2 的运算中,z_1 的模正伸* 到 $|z_2|$ 倍,此外,向量 z_1 还旋转了(按照逆时针方向)角 $\arg z_2$.特别,复数 z 乘以 i 化为向量 z 逆时针方向旋转一直角(没有延伸).

在图 2 中表示了乘积 $z=z_1z_2$ 的作法;为了得出 z,只要在线段 Oz_1(作底)上作一个三角形 Oz_1z,使它同三角形 $O1z_2$ 相似就行了.

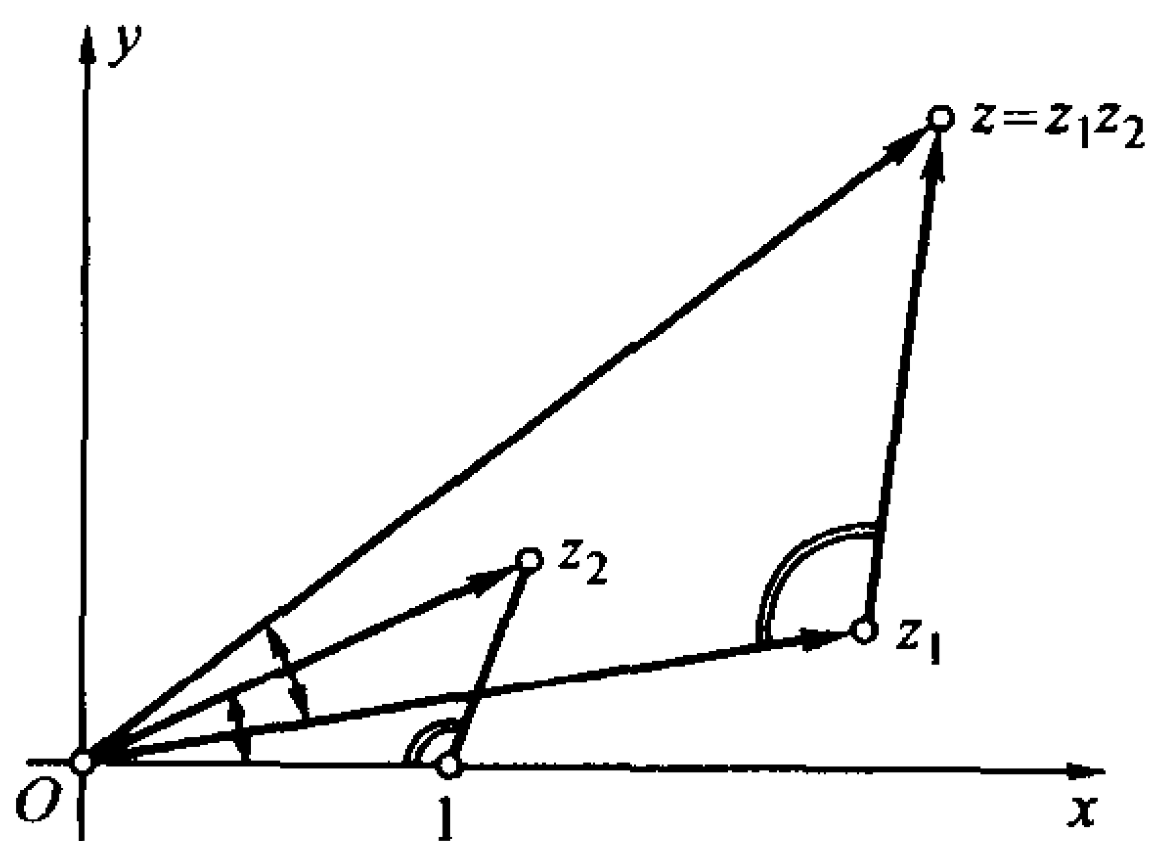


图 2

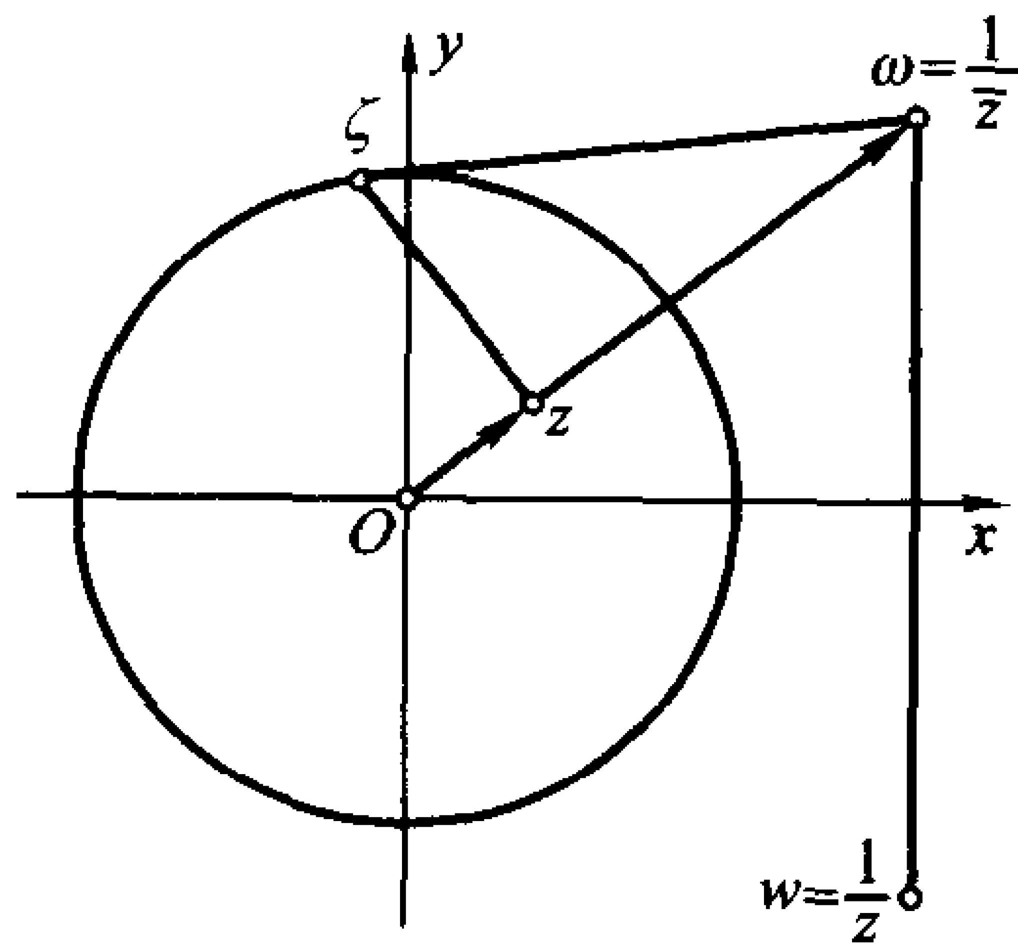


图 3

又,复数 z_1 被 z_2 除的运算,可以看做是 z_1 乘以 $\frac{1}{z_2}$,因此只要说明运算 $w=\frac{1}{z}$ 的几何意义就够了.首先假定 $|z|<1$ (图 3).从 z 点作射线 Oz 的垂线,再经过这垂线与圆周 $|z|=1$ 的交点,作这圆周的切线.对于这切线与射线 Oz 的交点 ω,显然有

$$\mathrm{Arg}\ \omega=\mathrm{Arg}\ z,$$

而且由于直角三角形 $Oz\zeta$ 与 $O\zeta\omega$ 是相似的,有 $\frac{|\omega|}{|\zeta|}=\frac{|\zeta|}{|z|}$,又因为 $|\zeta|=1$,故有

$$|\omega|=\frac{1}{|z|}.$$

* 如果 $|z_2|<1$,那么实际上就是把 $|z_1|$ 缩短到原长的 $|z_2|$ 倍.

因此,数 ω 与 $\frac{1}{z}$ 共轭,$\omega=\frac{1}{\bar{z}}$. 因而为了要得到点 $w=\frac{1}{z}$,只要作出 ω 对于实轴的对称点就可以了.

从点 z 到点 $\omega=\frac{1}{\bar{z}}$ 的变换,叫做**反演**,或对于单位圆 $|z|=1$ 的**对称变换**. 因此,运算 $w=\frac{1}{z}$ 在几何上讲,就是实施两个相继的对称变换——反演与对于实轴的对称变换.

如果 $|z|>1$,那么就用相反的次序来进行上面所说的作图法;如果 $|z|=1$,那么点 $w=\frac{1}{\bar{z}}$ 就同 z 重合,而求 $w=\frac{1}{z}$ 的作图,也就变成一个对于实轴的对称变换了.

乘幂的几何意义,由上面所说已经很清楚. 关于求 z 的 n 次方根,我们看到,根据方根的定义及公式(5),对于 $w=\sqrt[n]{z}$ 来说有 $|w|^n=|z|$,$n\arg w=\arg z$,所以就得出

$$|w|=\sqrt[n]{|z|},\arg w=\frac{\arg z}{n}. \tag{6}$$

关系式(6)中的第一个式子表明,所有那些方根的模都是相同的;第二个式子表明,它们的辐角都彼此相差 $\frac{2\pi}{n}$ 的一个整倍数. 因此我们就知道,任何复数 $z\neq0$ 的 n 次方根,都有 n 个不同的值,而且这些值可以被排成内接于圆 $|w|=\sqrt[n]{|z|}$ 的一个正 n 角形上的 n 个顶点(见图 4,在图中置 $n=6$).

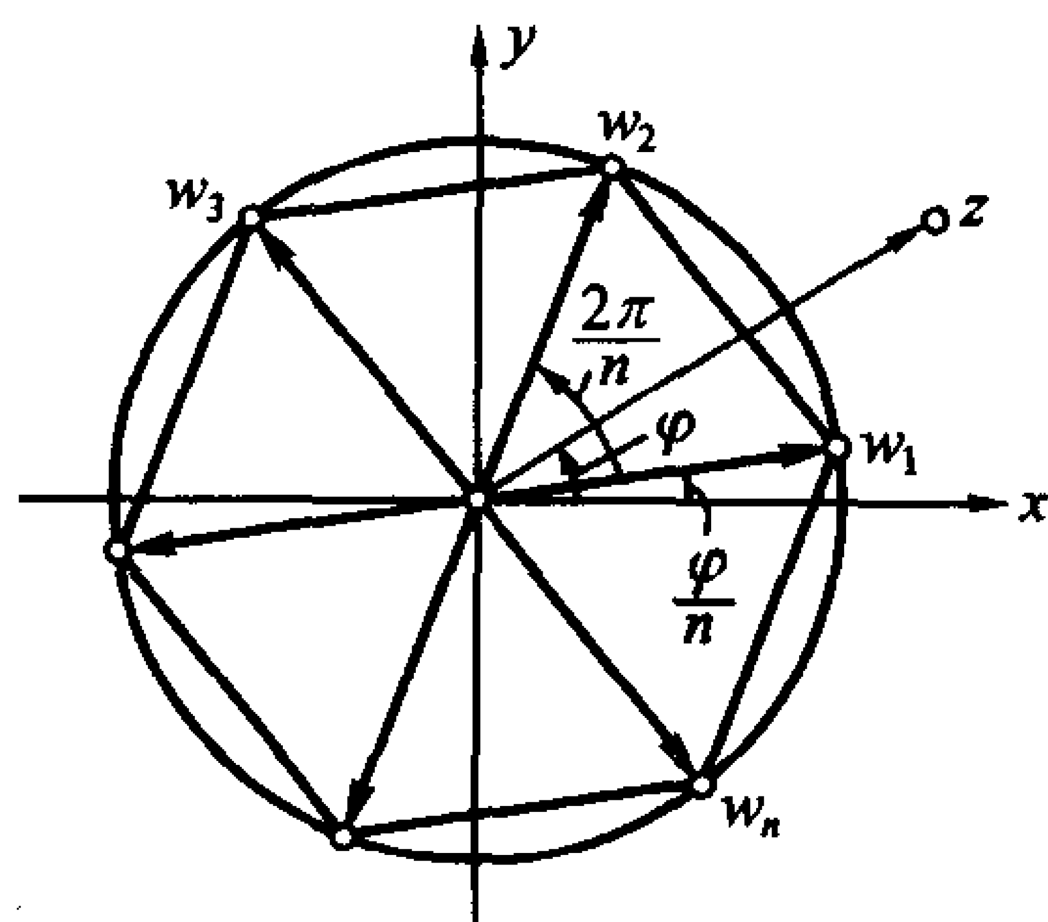


图 4

§2 复变函数

在这一节中,我们将要介绍复变函数论的一些最基本的概念:复变函数,它的极限、导数等,最后还要介绍解析函数的概念. 在这里占中心地位的是第 5 目中确立复变函数的可微条件的那个定理. 这些条件通常称做**柯西－黎曼条件**,但是在柯西和黎曼以前,这些条件已经基本地被采用在达朗贝尔和欧拉的著作里了(参看本章的引言).

3. 几何概念 复数平面上的一个点集 D,叫做在复数平面上的一个**区域**,假若它具有下述这两个性质:

1) 在 D 中的每一个点,必有以这个点为圆心的一个充分小的圆,同它一起都属于这集合(开集性);

2) 在 D 中的任何两个点,都可以用一条由 D 内的点所构成的折线来连接(连通性).

复数平面上的点的邻域,可以作为区域的简单例子. 所谓一个点 a 的 ε **邻域**,是指以这一点 a 为圆心,以 ε 为半径的一个开圆,即,满足不等式

$$|z-a|<\varepsilon$$

的那些点的集合.

凡是其本身不属于区域 D,而在它的任何邻域内都包含有属于 D 的点的那种点,叫做区域 D 的**边界点**. 区域 D 的所有界点的集合,叫做这区域的**边界**. 区域 D 同它的边界合在一起,叫做**闭区域**,用记号 $\bar{D}$ 来表示.

我们将假定,一个区域的边界是由有限多的闭曲线、截痕与点所组成的(我们不给这些概念下定义;参看图 5,图中的那个区域的边界是由三条闭曲线 $\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2$,两条截痕 γ_1,γ_2 与一个点 α 所组成的). 组成边界的那些曲线与截痕,我们将总假定是**逐段光滑**的,就是说,是由有限条光滑的弧(具有连续变动的切线的弧)所构成的. 在有界区域 D 的情形中,它的边界被分成若干连接部分,这些部分的数目,叫做这个区域的**连通阶数***(在图 5 中,表示一个五阶连通区域;Γ_0 与 γ_1 形成边界的一个连接部分). 特别是,如果区域 D 的边界是连接的(由一个连接部分所构成的),那么 D 就称做是一个**单连通区域**.

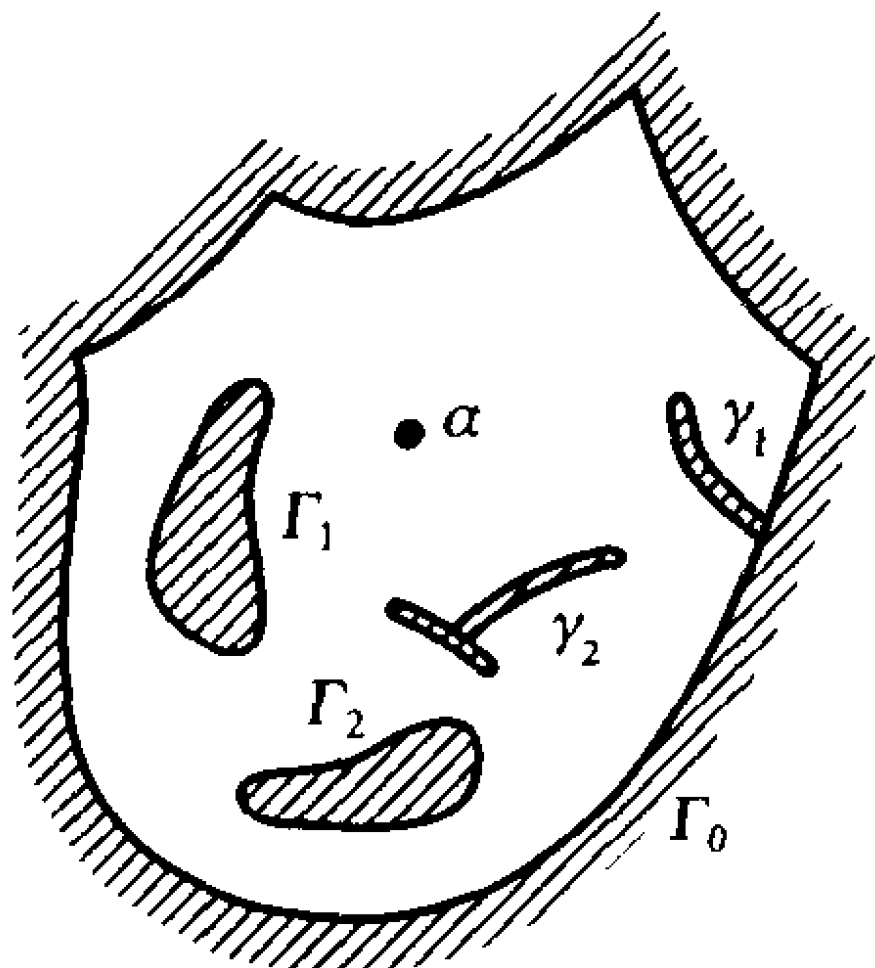


图 5

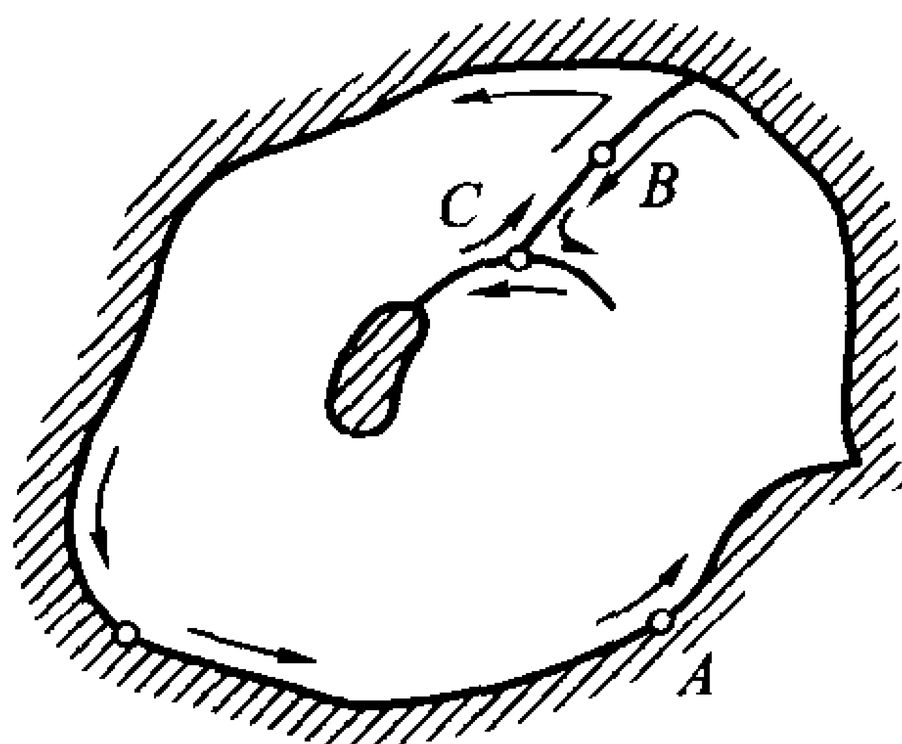


图 6

设 D 是一个单连通区域,Γ 是它的边界. 我们在 Γ 上任意选取一个点,从这个点出发,按照正方向沿着 Γ 走. 所谓沿着一个区域的边界的正方向,是指使这区域始终保持在左面的那个方向. 在这时,Γ 的某一些点将只被经过一次(例如在图 6 中的点 A),而另外的一些点则将被经过若干次(例如,点 B 是二次,C 是三次). 第一种类型的点,我们称做路线 Γ 的**单点**,第二种类型的点称做 Γ 的**多重点**,这一个点所被经过的次数,叫做它的**重数**(B 是一个二重点,C 是三重点). 边界上点的重数这个概念,也可以推广到多阶连通区域上去.

4. 复变函数 对于在 z 平面上点的一个集合 M,如果已经指明一个规则,按照这个规则,M 的每一个点 z 都有一个确定的点,或一些确定的点 w 的总和与它对应,那么我们就说,在点集 M 上已经给定了一个**函数**

---

* 在这个定义中,我们假定区域 D 是有界的,就是说,是包含在某一个圆 $|z|<R$ 内的;连通阶数的定义推广到无界区域的情形,见第 24 目.

$$w=f(z).\qquad(1)$$

在第一种情形中(每一个点 z 都只有一个确定的点 w 与它相对应时),函数 $w=f(z)$ 叫做**单值函数**.在第二种情形中叫做**多值函数**. M 叫做函数 $f(z)$ 的**定义集合**,而 $f(z)$ 在 M 上所取的一切值 w 的集合 N,则叫做函数的**量变集合**.在以后占着最重要的地位的,是 M 与 N 这两个集合都是区域的那种情形(参看第 10 页的定理).

如果令 $z=x+iy, w=u+iv$,那么给定一个复变函数 $w=f(z)$,就等价于给定两个含有二个实变量的函数

$$u=u(x,y), v=v(x,y).\qquad(2)$$

让我们分别把 z 的值安置在一个复数平面上,而把 w 的值安置在另一个复数平面上.那么,一个复变函数,在几何上就可以看做是 z 平面上的集合 M 到 w 平面上的集合 N 的某一个映射.如果函数 $w=f(z)$ 在集合 M 上是单值的,并且这时对于 M 的两个不同的点,也对应着 N 的两个不同的点,那么这种映射就称为在 M 内是**一一的**,或**单叶的**.

设已经给定了一个把集合 M 映射到集合 N 上的函数 $w=f(z)$.如果有一个函数 $z=\varphi(w)$,它使得 N 中的每一个点 w,都与所有那些由函数 $w=f(z)$ 映到点 w 上的点 z 成对应,那么这个函数 $z=\varphi(w)$ 就叫做函数 $w=f(z)$ 的**反函数**(图 7).显然,当且仅当 f 同 φ 这两个函数都是单值函数时,映射 $w=f(z)$ 是相互一一的.

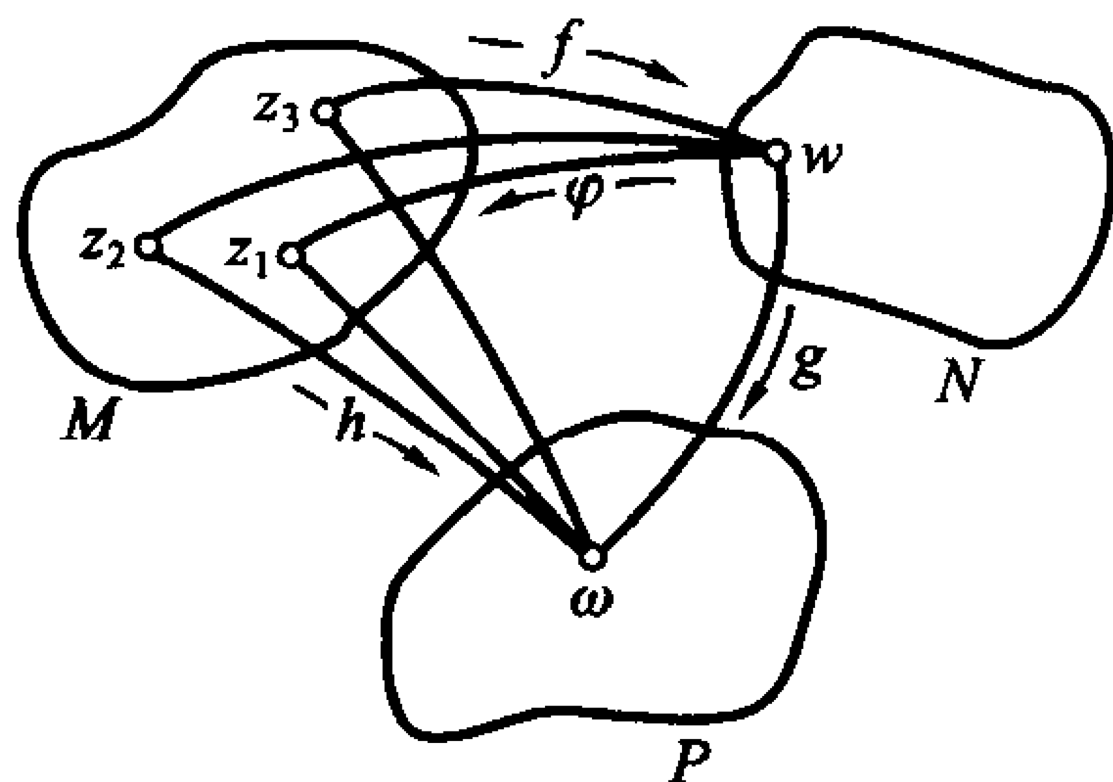


图 7

设函数 $w=f(z)$ 把集合 M 映到 N 上,而 $\omega=g(w)$ 又把集合 N 映到 P 上.把集合 M 映到 P 上的那个函数

$$\omega=h(z)=g[f(z)]\qquad(3)$$

叫做由 f 与 g 所合成的**复合函数**,而对应的映射 h,则叫做映射 f 与 g 的**乘积**(**叠加**)(图 7).特别,当映射 $w=f(z)$ 是一一时,函数 $z=\varphi(w)$ 是 f 的反函数,那么就有

$$\varphi[f(z)]=z.\qquad(4)$$

例　线性函数是在整个 z 平面内用关系式

$$w=az+b\qquad(5)$$

来规定的,其中 a 与 b 是任意两个复数.令 $k=|a|, \alpha=\operatorname{Arg} a$,亦即 $a=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)$,便可以把函数(5)表示成由下列三个函数所合成的复合函数:

(甲)　$$z_1=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z,$$

(乙)　$$z_2=kz_1,$$

(丙)　$$w=z_2+b.$$

回忆一下积的几何意义(第 2 目),我们就看出,映射(甲)与(乙)可以分别归为 z 平面旋转一个角度 α,与 z_1 平面的具有相似系数 k 的相似变换.映射(丙)在几何上表示整个 z_2 平面平移一个

常数向量 b.

线性映射(5)是这所说的三种映射的乘积(图 8). 因此得出映射(5)在全平面内是一一的,并且它把直线仍变换成直线(而且两直线间的交角也保持不变),把圆周仍变换成圆周.

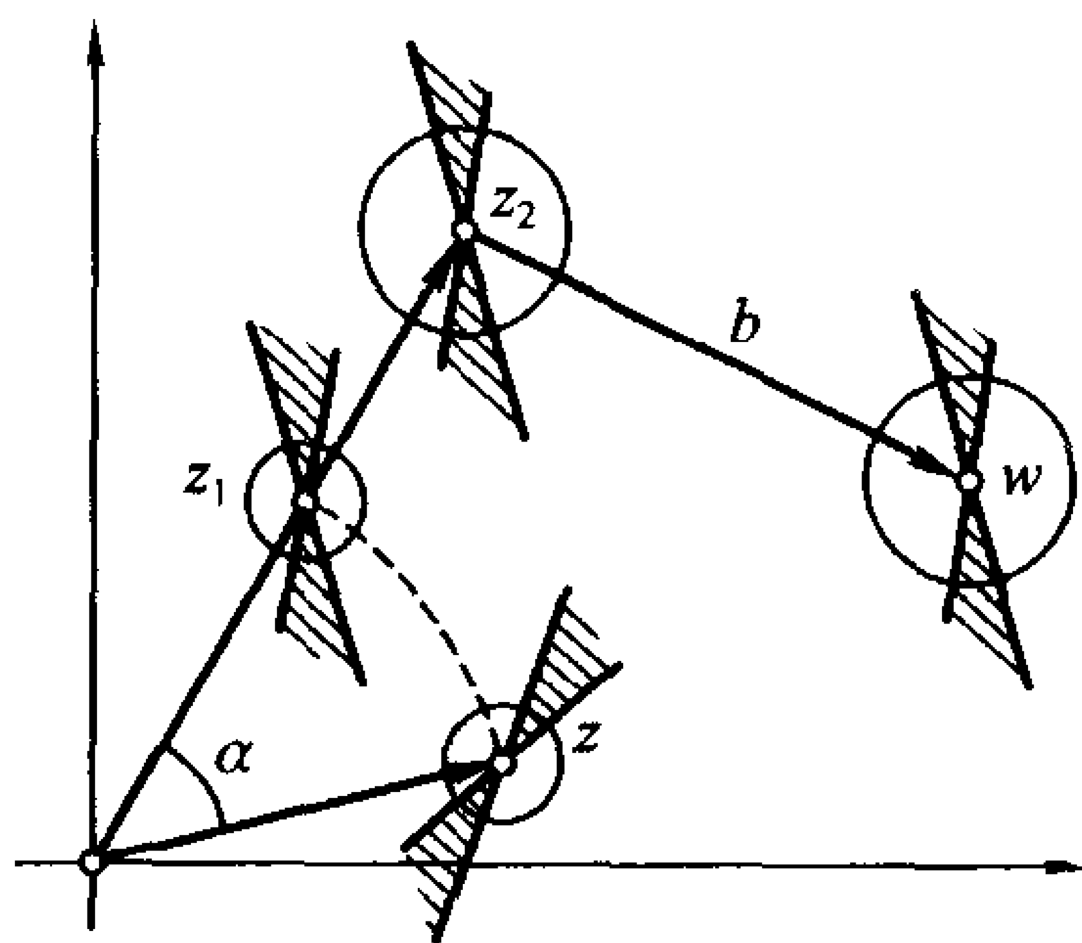


图 8

5. 可微性和解析性 设函数 $w=f(z)$在点 $z_0=x_0+iy_0$的某一个邻域内(但点 z_0本身可能除外)有定义并且是单值的.

如果两个极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$$

都存在,那么我们就说,当 $z\to z_0$时,函数 $f(z)$的极限[记作$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$]存在,这时我们认为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=u_0+iv_0=w_0. \tag{1}$$

由于我们的定义归结到通常的实变函数的极限定义上,所以在实变函数中的那些关于取极限的基本性质,对于复变函数来说也仍旧保持有效. 特别,我们有

$$\left.\begin{aligned}&\lim(f\pm g)=\lim f\pm\lim g,\\&\lim(fg)=\lim f\cdot\lim g,\\&\lim\frac{f}{g}=\frac{\lim f}{\lim g}\quad(\lim g\neq 0).\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

极限的定义,也可以利用邻域的概念来表述:如果对任何一个 $\varepsilon>0$,必可找到一个 $\delta>0$,使得所有在 z_0的 δ 邻域内的点(z_0本身可以除外),其所对应的点 w 都在 w_0的 ε 邻域内;换句话说,如果由不等式

$$0<|z-z_0|<\delta \tag{3}$$

必可得出

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon, \tag{4}$$

这时,而且只有在这时,我们说$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$.

强调指出,根据定义函数 $f(z)$趋向自己的极限是不依赖于点 z 趋近 z_0的方式的. 换句话说,如果极限存在,那么在 z 以任何规则(例如沿任何一条线或任何一个序列)趋向于 z_0时,$f(z)$总是趋近于这极限.

如果函数 $f(z)$定义在 z_0的某一个邻域内(包括点 z_0自己),并且

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0), \tag{5}$$

函数 $f(z)$就称为**在点 z_0处连续**.

显然,要 $f(z)$在点 z_0处连续,其充分必要条件是,$u(x,y)$与 $v(x,y)$这两个函数都在点(x_0,y_0)处连续. 如果函数 $f(z)$在一个区域 D 的每一个点都连续,那么 $f(z)$就称为**在区域 D 内连续**.

引入在任意集合上函数连续的概念也是有益的.设函数 $f(z)$定义在集合 A 上和 z_0是这集合的极限点.在沿着集合 A, $z\to z_0$时 $f(z)$的极限像上面一样定义,只是在(3)中应当加 z 属于A ($z\in A$)的条件.如果在每一个极限点 $z_0\in A$,沿集合的极限

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f(z)=f(z_0), \tag{6}$$

那么函数 $f(z)$称为**在集合 A 上连续**.

我们只举出下述事实而不加以证明:对于在闭区域内连续的函数,以及在闭曲线上、或在一条包括其两个端点在内的曲线段上连续的函数来说,通常在闭区间上连续的实函数的一般性质,仍旧是正确的.就是说,每一个在闭集 $\bar{A}$ 上连续的函数$f(z)$:

(1) 在 $\bar{A}$ 上是有界的,即,存在一个常数 M,对于 $\bar{A}$ 中所有的z都有

$$|f(z)|\leqslant M;$$

(2) 按模达到它的最大值与最小值,即,在 $\bar{A}$ 中一定有这样的点z'与z''存在,使其对于 $\bar{A}$ 中的一切z来说,都有

$$|f(z')|\geqslant|f(z)|,|f(z'')|\leqslant|f(z)|;$$

(3) 是一致连续的,即,对于任意取定的一个 $\varepsilon>0$,必定可以找到一个只依赖于 ε 的数$\delta>0$,使得对于 $\bar{A}$ 中满足不等式$|z_1-z_2|<\delta$ 的任何两个点z_1与 z_2,不等式

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

也必成立.

我们还要举出一个命题,也不加以证明*,这命题我们在以后将要屡次用到:

(4) **定理** 如果函数 $w=f(z)$在区域 D 内连续,而且作出一个把这区域映到 w 平面内某一集合Δ 上去的单叶映射(或一一对应的映射),那么 Δ 也必定是一个区域,而且反函数 $z=\varphi(w)$在 Δ 内连续.

设函数 $f(x)$定义在点 z 的某一个邻域内.如果极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z) \tag{7}$$

存在,那么我们就说 $f(z)$在点 z 处是可微的.把这个极限叫做函数 $f(z)$在点 z 处的**导数**.

函数 $f(z)$的可微条件,可以利用实变函数 $u(x,y)$与 $v(x,y)$来表述:

定理 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$定义在点 z 的某一个邻域内,而且 $u(x,y)$与 $v(x,y)$这两个函数在点 z 处都是可微的.于是,复变函数 $f(z)$在点 z 处是可微的充分必要条件是,在这个点处

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8}$$

---

* 证明这命题要用拓扑学的方法.

这两个等式成立(柯西－黎曼条件)*.

1) 必要性 设

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

存在.

利用有关极限与趋近点 z 的方式无关的注. 假定点 $z+h$ 沿平行于实轴的直线趋于 z,就是说,假定数 $h=s\to 0$ 始终保持是实数. 于是便得到

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{s\to 0}\frac{u(x+s,y)-u(x,y)}{s}+i\lim_{s\to 0}\frac{v(x+s,y)-v(x,y)}{s}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\tag{9}$$

现在再假定点 $z+h$ 沿着平行于虚轴的直线而趋于 z,就是说,假定数 $h=it$,而且 $t\to 0$,并始终保持是实数,这样来取极限. 我们得到

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{t\to 0}\frac{u(x,y+t)-u(x,y)}{it}+i\lim_{t\to 0}\frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{it}\\&=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\tag{10}$$

比较 $f'(z)$的(9),(10)两式,就有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y},$$

由此便得出(8)中的两个等式(参看第 1 目中复数相等的定义).

2) 充分性 根据含有两个实变量的函数的微分的定义,我们有下列两个等式:

$$\left.\begin{aligned}u(x+s,y+t)-u(x,y)&=\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+\alpha|h|,\\v(x+s,y+t)-v(x,y)&=\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t+\beta|h|,\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中的 α 与 β 随 $h=s+it$ 一起趋于零. 于是函数 $f(z)$的增量等于

$$f(z+h)-f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t\right)+\eta|h|,$$

其中 $\eta=\alpha+i\beta$. 利用等式(8),可以把这个增量写成

$$f(z+h)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(s+it)+\eta|h|=Ah+\eta|h|,\tag{12}$$

其中 $A=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$是一个完全确定的数,与 h 无关,而 η 则随着 h 一同趋于 0. 用 h 来除关系式(12)的两端,我们就看出$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$存在并且等于 A. 定理得证.

---

* 条件(8)是由于流体动力学上的问题而为达朗贝尔(1752)和欧拉(1755)所得到的;在 1777 年,欧拉由于研究复变函数的积分,重又得到了这两个方程. 但是通常称为柯西－黎曼条件.

利用柯西－黎曼条件,可以把函数 $f(z)$的导数表示成下列四种等价的形式:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{13}$$

因为关于代数运算与取极限的一些普通性质过渡到复变函数时仍然保持着,所以在微分法中,其推演只以这几个性质为基础的那些普通规则,也仍然保持着

$$\left.\begin{aligned}&(f+g)'=f'+g',(fg)'=f'g+g'f,\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2},\\&\{f[g(z)]\}'=f'[g(z)]g'(z),f'(z)=\frac{1}{\varphi'(w)}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(在最后的那个公式中,f 与 φ 是代表两个互为反函数的函数,并且假定,它们分别实施对点 z 的邻域与点 w 的邻域的单叶映射).

在一个区域 D 的每一个点处都可微的函数 $f(z)$,叫做在这个区域内的**解析函数**(也叫做**正规函数**或**全纯函数**).强调指出,解析函数的定义,是假定函数在区域 D 内是单值的,因为,极限与导数的概念,在前面都只对单值函数有定义.在第 25 目中,我们将把解析性的概念拓广到多值函数,但在此之前,对解析函数我们将总理解为单值函数.

最后,我们提出柯西－黎曼条件的一个推广.设给定一个在点 z 处可微的函数 $f(z)$,任意选两个方向,用两个单位向量 s^0 与 n^0(即,模等于 1 的两个复数)来表示,并且设由 s^0按逆时针方向转一个直角能到达 n^0(即,$n^0=is^0$).由于对导数的计算与所用的方向无关,我们可以一次循 s^0的方向来取导数,而另一次则循 n^0的方向来取,于是我们得到

$$f'(z)=\frac{1}{s^0}\left(\frac{\partial u}{\partial s}+i\frac{\partial v}{\partial s}\right)=\frac{1}{n^0}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+i\frac{\partial v}{\partial n}\right) \tag{15}$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial s},\cdots,\frac{\partial v}{\partial n}\right.$表示由含有两实变量的两个函数 u,v 循相应的方向所取的导数$\Big)$.等式(15)的推导同(9)及(10)的推导相类似.以 $n^0=is^0$代入,并比较在关系式(15)中的实数部分与虚数部分,便得出

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{16}$$

这两个方程就是我们所要指出的广义柯西－黎曼条件.特别,如果在其中令 $s^0=1$,$n^0=i$,便得到条件(8).

我们还要指出在极坐标(r,φ)中的柯西－黎曼条件.设 s^0是圆周$|z|=r$ 的逆时针方向的切线的单位向量,n^0是圆周的向心法线的单位向量,于是

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{r\partial\varphi},\frac{\partial z}{\partial n}=-\frac{\partial z}{\partial r},$$

所以条件(16)就采用形状

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r},r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial\varphi}. \tag{17}$$

§3 初等函数

这一节是专讲复变量的初等函数以及它们的几何表示——由这些函数所实施的映射.这些函数是数学分析中普通的初等函数在复数区域中的自然推广.但是当这样推广时,函数往往会获得一些新的性质,例如,复变量的指数函数 e^z 是有周期性的,函数 $\sin z$ 与 $\cos z$ 已不再是有界的,负数(总之不同于 0 的任何复数)的对数有意义等等.

在复数区域里对于多值函数的研究是特别有益的,因为只有在这样的研究中,才可以说清函数的多值性的本质.在这里我们只限于讨论多值函数的一些个别例子,并且在这些例子中,也只表明可能将其分成若干个单值的分支,而这些分支都是解析函数.只有在第 25 目中,我们才引入多值解析函数的一般概念,到那时才可以不仅把它们的分支,而且把这些函数的本身看做是解析函数.

初等复变函数的理论,基本上是欧拉在 18 世纪 40 年代创立的.应当指出,欧拉的这些工作,已经远远地走在时代的前面了;譬如说,他的对数理论,很困难地才被人们所公认,而且也决不是立刻就被公认了的.

在第 7 目中,我们将特别提出简单的有理分式函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$,因为它在实用问题中有极其重要的作用(见随后).这函数的极有成效的应用,是与尼古拉·伊戈罗维奇·茹科夫斯基(Николай Егорович Жуковский,1847—1921)的工作联系着的,因此我们叫它做**茹科夫斯基函数**.

6. 函数 $w=z^n$ 与 $w=\sqrt[n]{z}$ 函数 $w=z^n$ 与 $w=\sqrt[n]{z}$——其中 n 是任何一个正整数——已经在第 1 目中对于一切复数 z 定义过了.这两个函数中的第一个函数

$$w=z^n \tag{1}$$

是单值的.如果在 z 平面与 w 平面中引用极坐标,令

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

那么关系式(1)可以写成两个只与实变量有关的等式:

$$\rho=r^n,\theta=n\varphi. \tag{2}$$

从(2)可以看出,由函数 $w=z^n$ 所实施的映射,可以归结到将每一向量 z ($z\neq0$)旋转 $(n-1)\arg z$ 角度和将向量伸长 $|z|^{n-1}$ 倍.还可以看出,两个具有相同的模并且其辐角仅相差 $\frac{2\pi}{n}$ 的一个整倍数的点 z_1 与 z_2,而且也只有像这样的两个点,在映射(1)下变换成同一个点.因此,要映射 $w=z^n$ 在一个区域 D 内是单叶映射,其充分必要条件是,在 D 中不含有任何两个具有关系

$$|z_1|=|z_2|,\arg z_1=\arg z_2+\frac{2k\pi}{n}\ (k\neq0,是整数) \tag{3}$$

的点 z_1 与 z_2.

例如,那些扇形

$$k\cdot\frac{2\pi}{n}<\varphi<(k+1)\cdot\frac{2\pi}{n}(k=0,1,2,\cdots) \tag{4}$$

就都满足这个条件,每一个这样的扇形,在映射 $w=z^n$ 下都被变换成去掉了正半轴的 w 平面.这时,一切始点在点 $z=0$ 处的射线,都变换成始点在 $w=0$ 处的射线(仅作了某一个角度的旋转),而一切以 $z=0$ 为圆心的圆弧,也都变换成以 $w=0$ 为圆心的圆弧(一般说来,只是半径不同).在图 9(a)中表示了平面 w 的极坐标的网格在 z 平面的一个这样的扇形内的原像.

从同(1)等价的公式

$$w=u+iv=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \tag{5}$$

中可以得出,在 z 平面内对应于直线 $u=u_0$, $v=v_0$ 的是极坐标方程为

$$r=\sqrt[n]{\frac{u_0}{\cos n\varphi}},\ r=\sqrt[n]{\frac{v_0}{\sin n\varphi}}$$

的曲线.这些曲线表示在图 9(b)中(第一个方程的曲线用虚线表示,第二个方程的曲线用实线表示);在 $n=2$ 时,这便是普通的双曲线.

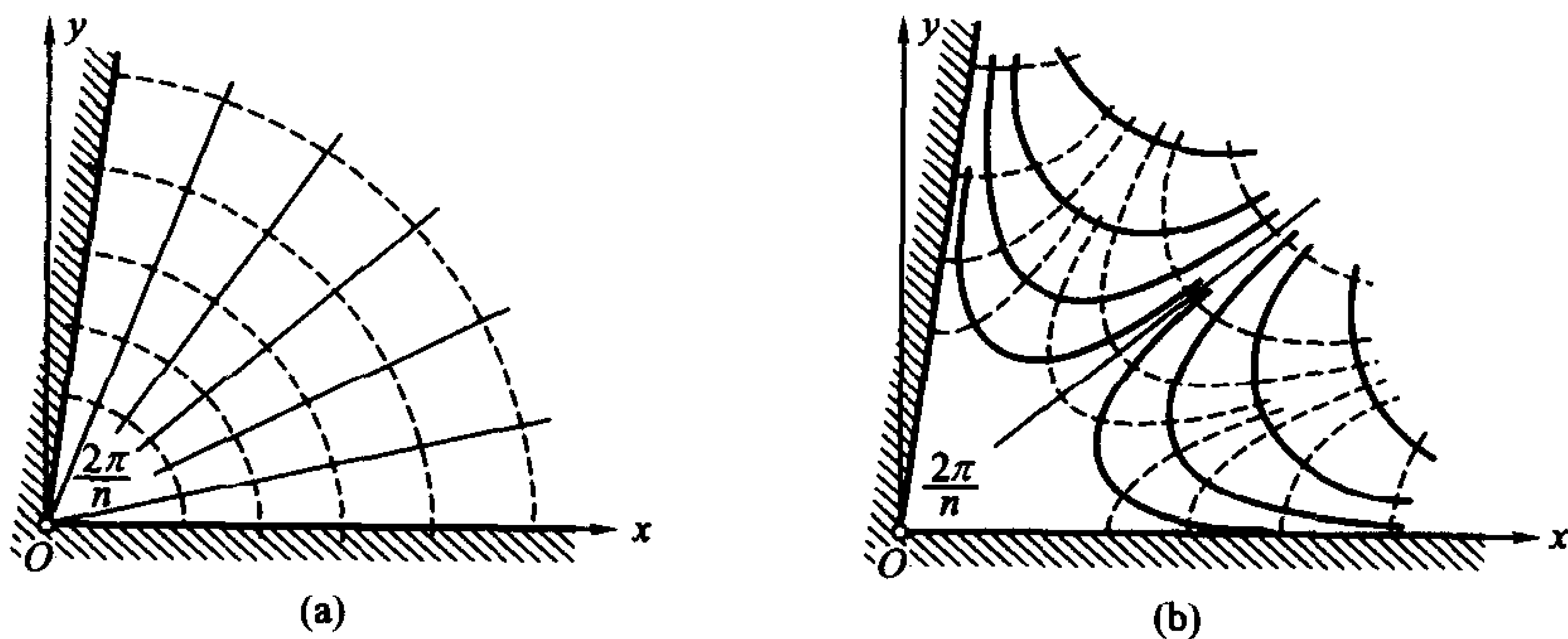


图 9

最后我们要指出,函数 $w=z^n$ 是在整个平面内解析的,因为,对于任何一个 z 来说都有

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^n-z^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{nz^{n-1}h+h^2(\cdots)}{h}=nz^{n-1} \tag{6}$$

存在.

函数 $z=w^n$ 的反函数

$$w=\sqrt[n]{z} \tag{7}$$

在 $z\neq 0$ 时是一个 n 值函数.从第 2 目中知道,方根 $\sqrt[n]{z}$ 的值,决定于对点 z 所选取的辐角的值.在一个点 $z_0\neq 0$ 的辐角的值中,选取一个值记作 $\arg z_0$,并设点 z 从 z_0 起,

在平面内画出一条不经过坐标原点的连续曲线 C. 我们把点 z 的辐角从 $\arg z_0$ 这值起连续地变化着的那个值* 记作 $\arg z$. 由于 $\arg z$ 与 $|z|$ 都是连续的,所以,当 $w=\sqrt[n]{z}$ 的值用这样选取的辐角完全决定时,此值也将是连续变化的.

设 C 是一条闭曲线,并且在它的内部不包含点 $z=0$,那么当点 z 完全绕 C 一周时,点 $w=\sqrt[n]{z}$——其中 $\sqrt[n]{z}$ 是我们所选定的那个方根的值——也画出某一条闭曲线 Γ 而回到它的初始位置,因为这时 $\arg z$ 回到其初始值 $\arg z_0$. 由另外选取的初始值 $\arg z_0$ (与以前选取的初始值相差一个 2π 的整数倍)所决定的方根的值,在绕 C 一周时显然也画出了另外一条闭曲线 Γ_k,其不同于曲线 Γ 的只是转了一个角度 $\frac{2k\pi}{n}$, $k=1,2,\cdots,n-1$ (图 10 中的实线).

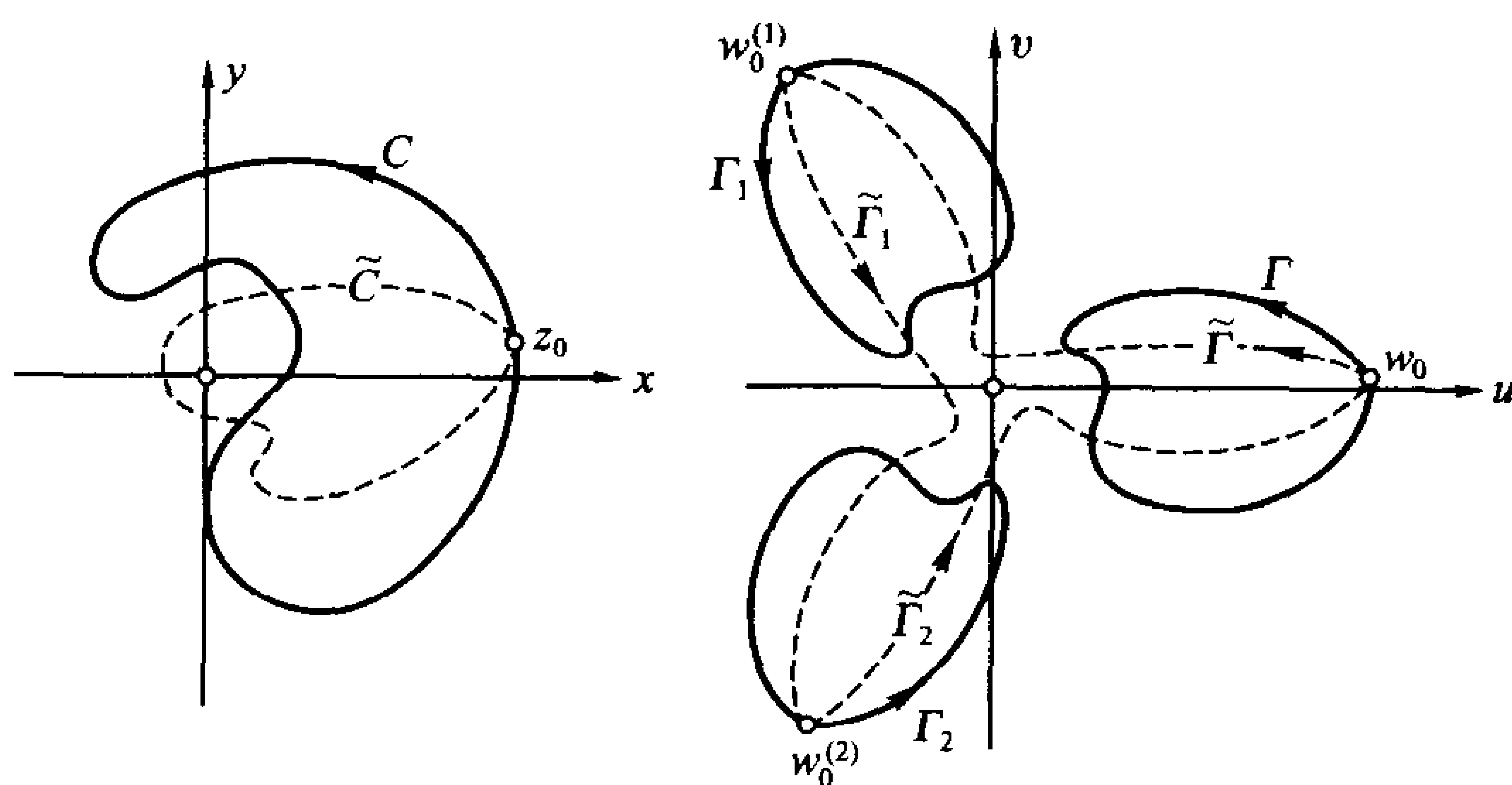


图 10

现在设 $\tilde{C}$ 是一条没有自己相交的点的闭曲线,包含点 $z=0$ 在其内部,z_0 是曲线 $\tilde{C}$ 上的某一个点. 于是当点 z 从 z_0 出发,循正方向完全绕 $\tilde{C}$ 一周时,其所对应的点 $w=\sqrt[n]{z}$ (其中方根的值同前面一样决定)不回到它的初始位置,而占据一个新的位置 $w_0^{(1)}$,在这里

$$w_0^{(1)}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)w_0$$

是 $\sqrt[n]{z_0}$ 的一个异于 w_0 的值. 这是由于当点 z 完全绕 $\tilde{C}$ 一周时,$\arg z$ 获得了一个增量 2π. 只有当 z 恰好完全绕曲线 $\tilde{C}$ n 周时,$w=\sqrt[n]{z}$ 才回到它的原来位置(见图 10 中的虚线;这里 $n=3$).

由此可知,在每一个不包含任何一条围绕着点 $z=0$ 的闭曲线的区域 D 内,可以分出 n 个连续单值函数来,每一个函数取 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值中的一个值. 这 n 个函数叫做

* 显然,当 z_0, C 与 $\arg z_0$ 都已确定时,这个值是唯一地决定了的.

多值函数 $w=\sqrt[n]{z}$的**分支**；在每一个固定的点上它们的值彼此仅相差一个乘数 $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$. 每一个这样的分支显然实施区域 D 的一个单叶映射，所以关于反函数的导数的定理(第 5 目)，在这区域内的每一个点处都适用，根据这一定理完全确定的导数值

$$(\sqrt[n]{z})'=\frac{1}{(w^n)'}=\frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{z}}{z}^{*}$$

存在，或者，如果我们约定写$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$，那么

$$(z^{\frac{1}{n}})'=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}. \tag{8}$$

因此，所构成的那些分支中的每一个在区域 D 内都是解析函数.

在一个我们刚才所考虑的那种类型的区域 D 内，就是无限多值的函数 $\operatorname{Arg} z$，也可以分开成无限多个连续单值分支. 每一个这样的分支我们将用记号 $\arg z$ 来表示，而且每一次都将指明，这个分支是怎样分出来的.

但是如果区域 D 即使只包含有一条围绕着点 $z=0$ 的闭曲线，那么在这样的区域内，函数$\sqrt[n]{z}$的那些分支就不可能互相分开. 这就是说，如果我们在 D 内某一个点 $z\neq0$ 的邻域内也分出任何一个分支来(对于点 $z\neq0$ 的充分小的邻域来说，这是可能的)，那么，当沿着围绕 $z=0$ 的曲线移动时，我们便到达了另外的一个分支上. 因此，在一个这样的区域 D 中，我们不可能像上面的情形那样把函数$\sqrt[n]{z}$看作是若干个独立的(单值)解析函数的总和. 在点 $z=0$ 的任何一个邻域内，都不可能把函数$\sqrt[n]{z}$分成 n 个独立的分支(这些分支好像在这个点上连接起来了)，这样的点 $z=0$，叫做这函数的**支点**.

作为第一种类型的区域 D 的例子，可以考虑去掉了一条由点 $z=0$ 到无穷远的直线 L 后的 z 平面. 如果 L 与正向半轴重合，那么函数 $w=\sqrt[n]{z}$的那些分支就把区域 D 映到扇形

$$k\frac{2\pi}{n}<\arg w<(k+1)\frac{2\pi}{n}$$

上. 这些映射是前面所研究过的函数 $w=z^n$ 的映射的逆映射.

如果 D 包含点 $z=0$ 在其内部，那么它就显然是一个第二种类型的区域.

7. 茹科夫斯基函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 这函数对于一切的 $z\neq0$ 来说都有定义而且是单值的. 显然，对于这样的 z 它也是解析的. 现在我们来求使映射

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

* 对函数和导数取$\sqrt[n]{z}$同样的分支.

是一个单叶映射的区域. 为此我们假定 z_1 与 z_2 在映射(1)下变换成同一个点 w,于是便有

$$z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2},(z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1z_2}\right)=0,$$

由此有

$$z_1=z_2 \text{或} z_1z_2=1. \tag{2}$$

因此,在任何区域 D 内,要映射(1)是单叶映射的充分必要条件是,D 内没有任何两个点 z_1 与 z_2 能具有关系式 $z_1z_2=1$.

例如,单位圆的内部 $|z|<1$,或它的外部 $|z|>1$,就都满足这条件. 为了要研究映射(1)的情景,我们令 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. $w=u+iv$,并且把实数部分与虚数部分分开. 于是映射(1)可写成

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi \tag{3}$$

的形式. 我们看到,每一个圆周 $|z|=r_0<1$ 在这映射下变换成曲线

$$u=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)\cos\varphi,\quad v=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0}-r_0\right)\sin\varphi, \tag{4}$$

即,变换成具有半轴 $a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0}-r_0\right)$,而且是按负方向行进* 的一个椭圆. 这椭圆在 $r_0\to1$ 时,压缩成 u 轴上的一段线段[−1,1],当 $r_0\to0$ 时趋向无穷远. 因此,函数(1)把单位圆的内部 $|z|<1$ 映到线段[−1,1]的外部上(图 11). 这线段的所有内点都是二重点(第 3 目),而且可以把它看作是由两条边岸所组成的:函数(1)把 $|z|=1$ 的上半个圆周变换成下面那条边岸,而把下半个圆周变换成上面的那条边岸.

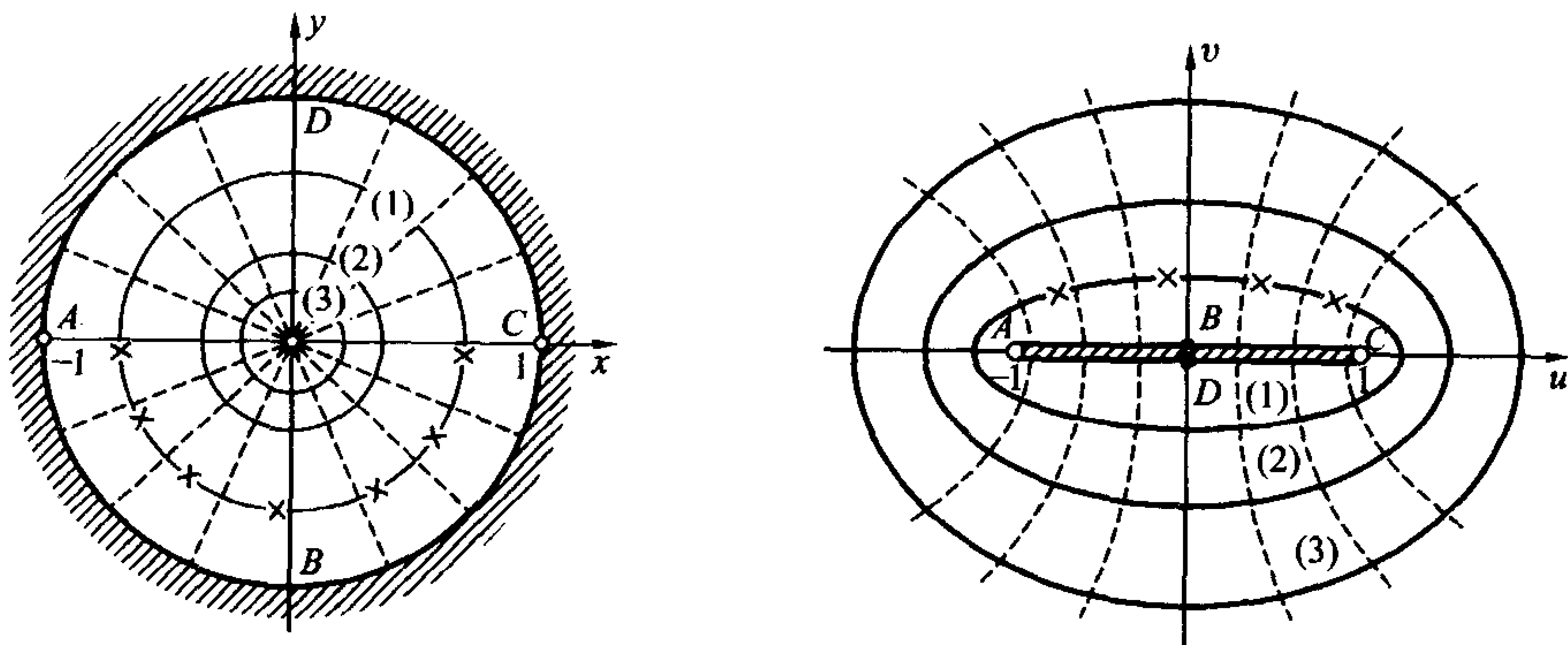


图 11

* 在方程组(4)的第二个方程中的"−"号,就指明这事实.

我们还可以看到,半径 $\arg z=\varphi_0, 0<r<1$,在映射(1)下变换成双曲线

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi_0}=1 \tag{5}$$

(图 11).这些双曲线的焦点,与椭圆(4)的焦点一样,都位于线段$[-1,1]$的两个端点上.

从关系式(3)中也可以看出:圆周$|z|=r_0>1$在映射(1)下变换成具有半轴 $a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right), b=\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)$的椭圆.这些椭圆与从圆周$|z|=r_0<1$变换成的那些椭圆相同,不过它们是按正方向来行进的.因此,函数(1)把单位圆的外部$|z|>1$也映到 u 轴的线段$[-1,1]$的外部,并且上半个圆周变换到这线段的上边岸上,而下半个圆周则变换到下边岸上.

函数(1)的反函数

$$z=w+\sqrt{w^2-1} \tag{6}$$

是一个双值函数,对于每一个点 w 它有两个点z_1与 z_2与之对应,这两个点之间有关系 $z_1z_2=1$ (见公式(2)).这个双值性的发生是由于在公式(6)中有平方根式存在.如果令 $z_1=w+\sqrt{w^2-1}$,那么 z 的另一个对应于w 的值就是$z_2=w-\sqrt{w^2-1}$,可以直接从 $z_1z_2=1$ 看出.

我们分别用 ρ_1,θ_1与 ρ_2,θ_2来记复数 $w-1$ 与 $w+1$ 的模及辐角(图 12).于是公式(6)中的那个根式的模与辐角,就分别等于$\sqrt{\rho_1\rho_2}$与$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ (参看第 2 目中开方根的规则).由此得出,当将点 w 循一条Ⅰ型或Ⅱ型的闭曲线(图 12)——这两种闭曲线都只围有 $+1$ 与 -1 这两点中的一个点——绕行一周时,根式的值便变成与原来值符号相反.实际上,在这样绕行一周时,θ_1(或 θ_2)变动 2π,而 θ_2(或 θ_1)则没有改变;因此,根式的辐角也变动 π.至于根式的模,则当 w 循任何封闭曲线绕行一周时,总是回到它原来的值.

现在如果点 w 循一条同时围有 ±1 两点的Ⅲ型的闭曲线(图 12)绕行一周,那么根式的值不变,因为这时 θ_1与 θ_2都改变 2π,从而根式的辐角$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$也改变 2π.当点 w 循一条不包含点 ±1 中任何一个点在其内的Ⅳ型的闭曲线(图 12)绕行一周时,根式的值也不改变,因为这时不论 θ_1 或 θ_2都不改变.

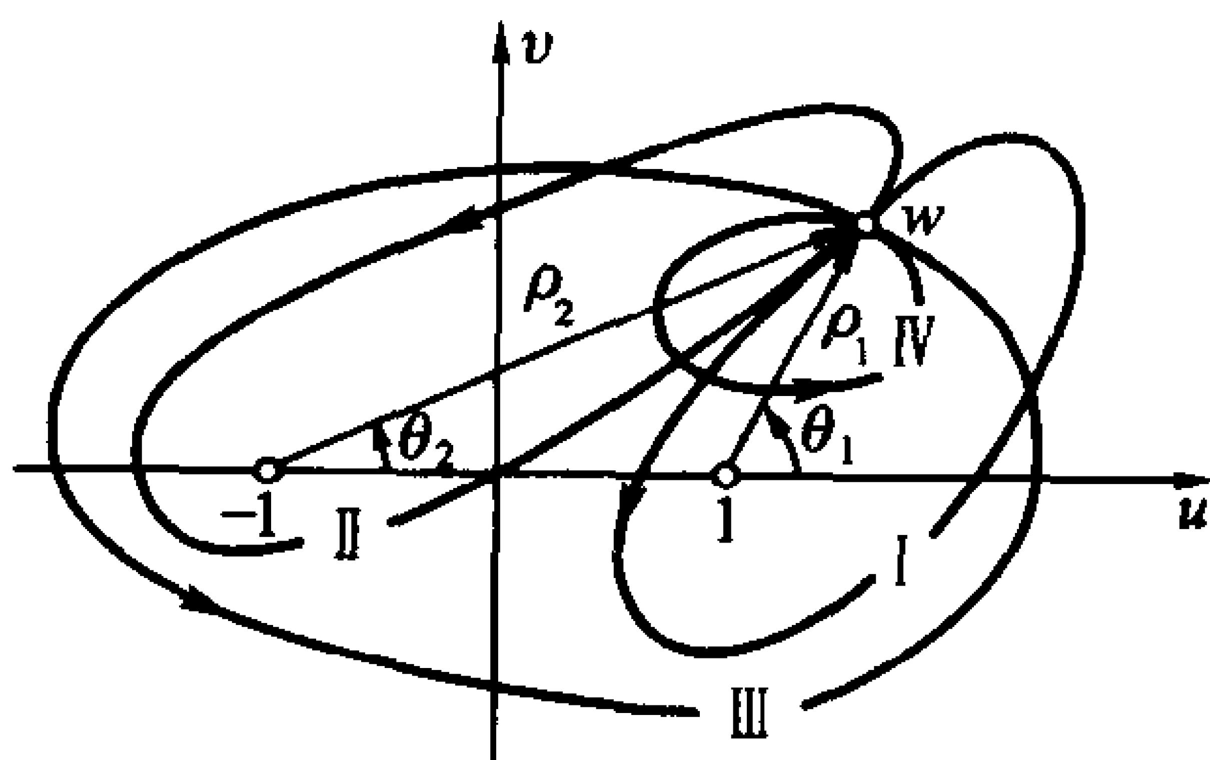


图 12

因此,在任何区域 Δ 里,只要在这区域中不能引一条仅围有点 $+1$ 或点 -1 中一个的闭曲线,函数(6)就可以分开成两个单值的分支.这两个分支在每一个固定的点

w 处,彼此相差公式(6)中根式的一个符号,并由之得出 z 的两个值,这两值间有关系 $z_1z_2=1$.每一个这样的分支都作出一个单叶映射,并且,根据反函数的导数的定理,它是解析的.

但是,倘若在区域 Δ 内可以有一条闭曲线,在它的内部仅含有点 $+1$(而不含有点 -1),或仅含有点 -1(而不含有点 $+1$),例如,倘若 Δ 只包含这两个点中的一点在其内部,那么在这样的区域内,函数(6)的两个分支就不可能彼此分开.函数(6)的两个分支好像在 $w=\pm1$ 这两个点处互相连接着,这样的两个点 $w=\pm1$,叫做这函数的**支点**.

作为第一种类型的区域 Δ 的例子,可以考虑去掉了一条连接 -1 与 $+1$ 那两个点的曲线 Λ 的 w 平面.如果 Λ 是实轴上的线段 $[-1,1]$,那么函数(6)的两个分支就分别把 Δ 映到单位圆的内部与外部上.这两个映射是前面所考虑的那个映射的逆映射(图 11).

8. 指数函数与对数 对于任何复数 $z=x+iy$,我们用关系式

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)\tag{1}$$

来定义指数函数 e^z *.

我们证明:

1) 对于实数 $z=x$ 来说,我们的定义同通常的指数函数定义是一致的;

2) 我们所定义的函数是处处解析的;

3) 通常的指数函数的微分公式

$$(e^z)'=e^z\tag{2}$$

仍旧保留;

---

* 对读者来说,上面所引出的指数函数的定义是否太形式化了,我们介绍与实变函数中类似的方法,用关系式

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\tag{*}$$

定义指数函数.这里必须证明对任何 z 复数序列 $z_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ 的极限存在和计算这个极限.后者最简单的做法是这样:按照乘幂规则我们有

$$|z_n|=\left|1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right|^n=\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right\}^{\frac{n}{2}}$$

和 $\arg z_n=n\arctan\dfrac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}$;在第一个表达式中根据幂次抛弃高阶小量 $\dfrac{(x^2+y^2)}{n^2}$,并且在第二个表达式中小的角用它的正切 $\dfrac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}$ 取代,我们看到

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^x,\ \lim_{n\to\infty}\arg z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}=y$$

存在.不过,从这两个极限的存在可以得出极限(*)的存在,并且我们得到 $|e^z|=e^x$ 和 $\arg e^z=y$.这与公式(1)相符合.

4) 指数函数的基本性质(加法定理)

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}\tag{3}$$

仍旧保留.

第一个性质可以直接从(1)式得出,只需在其中令 $y=0$;第二个性质可以从第 5 目中的定理得出,因为在平面内的任何一点处,柯西－黎曼条件都是适合的:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y)&=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y);\\ \frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y)&=-\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y).\end{aligned}\right\}$$

要证明性质 3),我们可以利用求导数与所循方向无关这个性质,沿着 x 轴的方向来计算 $(e^z)'$,而得出

$$(e^z)'=\frac{\partial}{\partial x}e^x(\cos y+i\sin y)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z,$$

这样就得到了公式(2).

最后,为了要证明性质 4),可以令 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,于是

$$\begin{aligned}e^{z_1}e^{z_2}&=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)\\&=e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\}=e^{z_1+z_2},\end{aligned}$$

这就是我们所需要的结果(在这证明中,除了定义(1)之外,我们还使用了复数的乘法规则以及大家所熟知的三角公式).

我们注意到,指数函数对任何复数 $z=x+iy$ 都不会变成零.事实上,$|e^z|=e^x>0$.

特别是,在关系式(1)中令 $x=0,y=\varphi$,便得到了经典的欧拉公式*

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.\tag{4}$$

利用欧拉公式,可以把任何一个模为 r 而辐角为 φ 的复数 z,写成如下的指数形式:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}.\tag{5}$$

除了在实数区域里与复数区域里都正确的那些性质 1)—4)外,复变量的指数函数还具有它的特殊性质:它是具有纯虚数基本周期 $2\pi i$ 的周期函数.事实上,对于任何一个整数 k,都有

$$e^{z+2\pi ki}=e^z\cdot e^{2\pi ki}=e^z,\tag{6}$$

因为根据欧拉公式 $e^{2\pi ki}=1$.

从另一方面,假如 $e^{z_1}=e^{z_2}$ 和 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,所以由定义(1)我们有 $e^{x_1}=e^{x_2}$,$\cos y_1=\cos y_2$,$\sin y_1=\sin y_2$,由此得出 $x_2=x_1,y_2=y_1+2k\pi$,或者

$$z_2-z_1=2k\pi i,\tag{7}$$

其中 k 为整数.

---

* 欧拉把这公式引在他的“无穷小分析引论”(1748)里;与(4)相当的公式,从 1740 年开始便已出现在他的著作中了.

由于周期性的缘故,在整个平面内对于函数 e^z 的研究,可以化为在带形 $0\leqslant y<2\pi$ 内的研究.从刚才所进行的分析可看出,映射(1)在这带形内是单叶的:由等式 $e^{z_1}=e^{z_2}$ 推得关系式(7),而带形内不包含与这关系式联系着的任何一对点.

如果令 $w=\rho e^{i\theta}$,在 w 平面内引入极坐标,那么(1)就可以写成两个等式

$$\rho=e^x,\theta=y. \tag{8}$$

因之,映射(1)把直线 $y=y_0$ 变换成射线 $\theta=y_0$,把线段 $x=x_0,0\leqslant y<2\pi$ 变换成圆周 $\rho=e^{x_0}$.这时带形 $0<y<2\pi$ 被变换成切去了沿正向半轴那条射线的 w 平面,这带形的一半 $0<y<\pi$ 被变换成上半个平面.一般地讲,指数函数把带形 $0<\operatorname{Im} z<h$ 变换成角 $0<\arg w<h$(图 13).

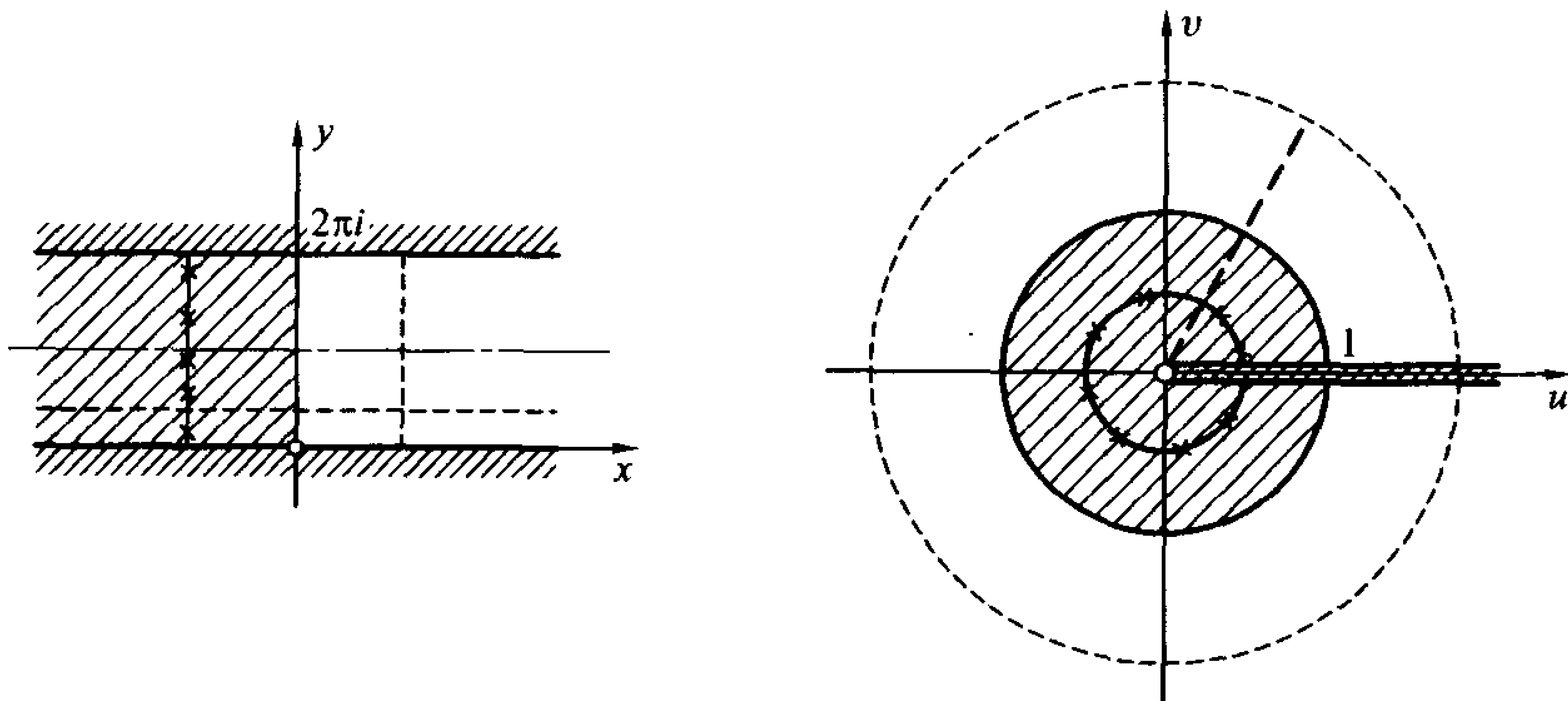


图 13

对数函数被定义为是指数函数的反函数:如果 $e^w=z$,数 w 就叫做数 z 的**对数**;记作

$$w=\ln z. \tag{9}$$

从定义可以得出对数的一个基本性质:如果 $w_1=\ln z_1,w_2=\ln z_2$,那么 $\ln z_1+\ln z_2$ 便是数 $z=z_1z_2$ 的对数;亦即

$$\ln z_1+\ln z_2=\ln(z_1z_2). \tag{10}$$

事实上,我们有 $z_1=e^{w_1},z_2=e^{w_2}$;因此,$z_1z_2=e^{w_1+w_2}$.

特别,在(10)中令 $z_1=|z|,z_2=e^{i\arg z}$,我们便得到

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z. \tag{11}$$

在(11)式中记号 $\arg z$ 可以表示 z 的辐角的任何一个值;所以每一个复数 $z\neq0$ 都有无限多个对数.换句话说,对数函数是个无限多值的函数:它的实数部分是唯一确定的,而其虚数部分则可以相差 2π 的任何一个整倍数*.为了明确起见,我们将用特殊

* 这样的对数概念是 L.欧拉提出的.他把它叙述在 1749 年的一篇著作《论伯努利与莱布尼茨(G.W.Leibniz)之间关于负数及虚数的对数之争论》中.

记号 Ln z 来记这个多值函数，于是

$$\operatorname{Ln} z=\ln |z|+i \operatorname{Arg} z=\ln r+i(\varphi+2k\pi) \tag{12}$$

(参看(5)式).我们用记号 ln z 来表示 Ln z 的值中的某一个值，在必要时并将预先特别说明所选取的是哪一个值，于是在所有以前包含记号 ln 的那些公式中，就都不需要变动记号了.

我们来更详细地讨论关于选择 Ln z 的值的问题.也同前面所讨论过的多值函数一样，Ln z 的值是由列入点 z 的辐角的值所确定的.设点 z 从 $z_0\neq0$ 的位置开始，画出某一条不经过坐标原点的曲线 C.同以前一样，我们用 arg z 来表示函数 Arg z 的某一个沿着 C 连续变化的单值分支，这分支的值由某一个固定的初始值 arg z_0 所规定.当 arg z 的值已选定时，我们把由等式(11)所确定的 Ln z 的值记作 ln z；显然，函数 ln z 沿着曲线 C 是一个连续的单值函数.

我们假定曲线 C 是封闭的，并且不包含点 $z=0$ 在其内部.当点 z 画出 C 时，点 $w=\ln z$ 也经历了某一条闭曲线 Γ；而对数的由另外一些初始值 arg z_0 所规定的别的一些值，也画出了别的一些曲线 Γ_k，它们同 Γ 只相差一个沿向量 $2k\pi i$ 的平移，$k=\pm1,\pm2,\cdots$(图 14 中的实线).现在如果 C 是一条没有自己相交的点、而且包含点 $z=0$ 在其内部的闭曲线，那么当点 z 按正方向完全循 C 绕行一周时，点 $w=\ln z$ 就不再回到原来的位置 w_0 上，而占据了一个新的位置 $w_0^{(1)}=w_0+2\pi i$ (图 14 中的虚线).

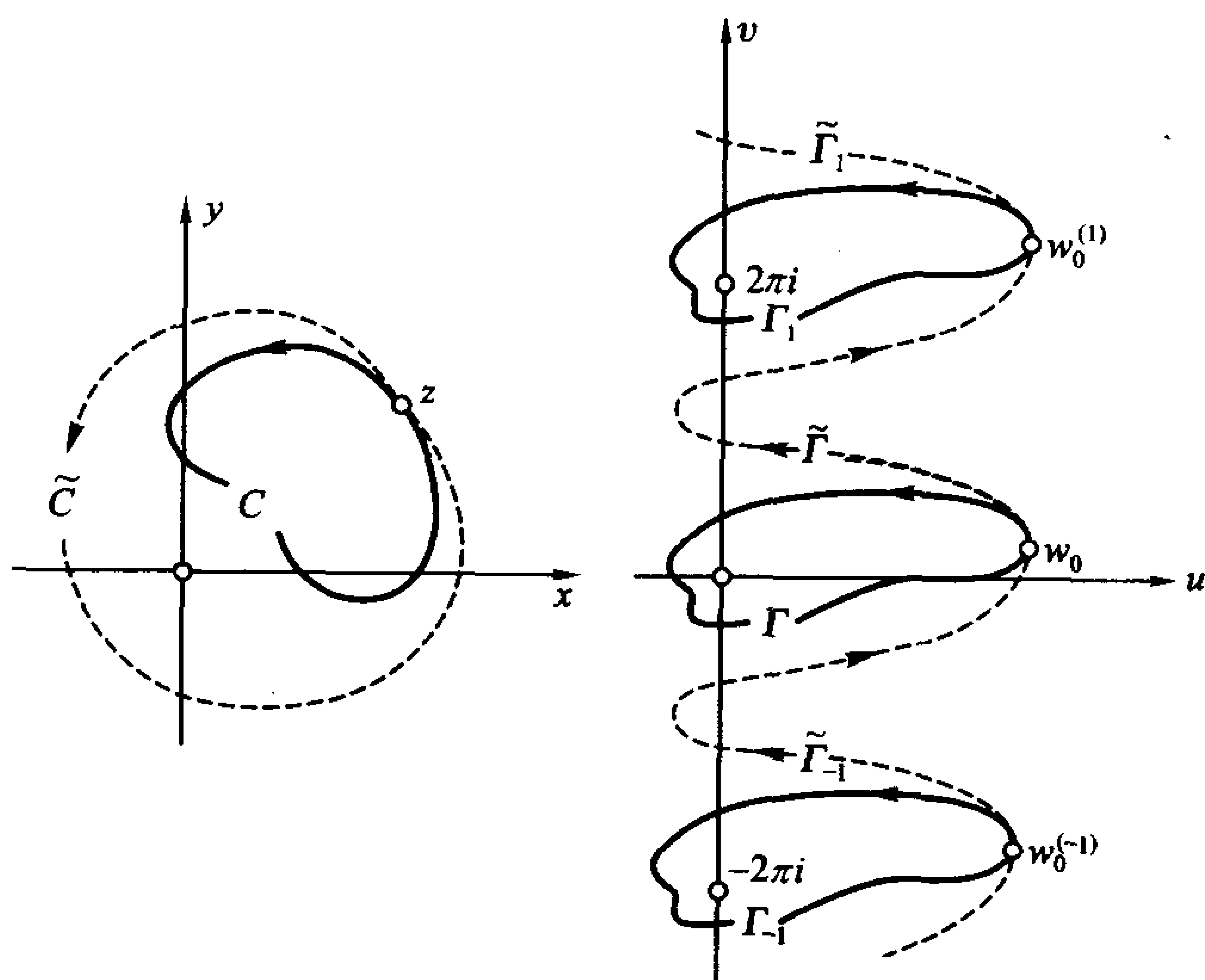


图 14

由此得出，在不含有包围着点 $z=0$ 的闭曲线的任何一个区域内，总可以把多值

函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 分开成无限多个连续单值分支,在每一个固定的点处,这些分支的值彼此只相差一个数 $2k\pi i$. 每一个这样的分支 $\ln z$ 都对区域 D 实施了一个相互单值的映射,于是,根据关于反函数的导数的定理,将具有导数

$$(\ln z)'=\frac{1}{(e^{w})'}=\frac{1}{e^{w}}=\frac{1}{z}. \tag{13}$$

(我们要注意,对于一切分支来说,导数都是同一个.)因此,$\mathrm{Ln}\,z$ 的所有的分支就都是解析函数.

但是,如果区域 D 内含有一条包围着点 $z=0$ 的闭曲线(例如,D 包含了点 $z=0$ 在其内部),那么在这样的区域内,函数 $\mathrm{Ln}\,z$ 的那些分支就不可能彼此分开. 像使 $\mathrm{Ln}\,z$ 的所有的分支都在它上面连接了起来的那个点 $z=0$,叫做这函数的**支点**.

9. 三角函数与双曲线函数 这些函数在复数区域内可以简单地用指数函数来表达的. 对于实变量 x,第 8 目中的欧拉公式(4)给出

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x,$$

从而有

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

考虑到这事实,我们对于任何复数 z 也采用

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{1}$$

作为定义. 这样所定义的函数:

1) 对于实数 x 来说,分别同通常的正弦函数和余弦函数是一致的;

2) 是处处解析的;

3) 遵从通常的微分法公式

$$(\sin z)'=\cos z,\quad (\cos z)'=-\sin z;$$

4) 是具有实周期 2π 的周期函数;

5) $\sin z$ 是奇函数,$\cos z$ 是偶函数;

6) 遵从通常的三角关系式

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,\quad \sin 2z=2\sin z\cos z \text{ 等等}.$$

所有这些结论都是由定义(1)得出的,读者只要做一下相应的计算,便可以证实.

我们来研究由(1)中的第一个函数所作出的映射. 令

$$iz=z_1,\quad e^{z_1}=z_2,\quad z_3=-iz_2=\frac{e^{iz}}{i}, \tag{2}$$

我们便有

$$w=\frac{1}{2}\left(z_3+\frac{1}{z_3}\right)=\sin z. \tag{3}$$

我们看到,映射(3)可以看作是几个已经研究过的映射的乘积. 首先我们来求使它成为单叶映射的条件. 设区域 D 在(2)的那些映射下依次变换成 D_1,D_2 与 D_3. 在(2)的那三个映射之中,第一个与第三个映射是处处单叶的;要第二个映射是单叶映射,

其充分必要条件是，D_1内不包含任何一对具有关系

$$z_1' - z_1'' = 2k\pi i$$

的点 z_1'与 z_1''，其中 $k \neq 0$ 是一个整数（参见前一目的条件(7)）. 要映射(3)是单叶映射，其充分必要条件是，在 D_3内不包含任何一对具有关系

$$z_3' z_3'' = 1$$

的点 z_3'与 z_3''（参见第 7 目条件(2)）. 利用(2)中的那些公式回转到 z 平面，我们得出，要映射 $w = \sin z$ 在区域D 内是单叶映射，其充分必要条件是，在 D 内不包含任何一对具有关系

$$z' - z'' = 2k\pi \quad (k \neq 0 \text{ 是整数}), \tag{4}$$

或具有关系 $e^{i(z'+z'')} = -1$，即，

$$z' + z'' = (2k+1)\pi \quad (k \text{ 是整数}) \tag{5}$$

的点 z'与z''.

例如，半个带形 $-\pi < x < \pi, y > 0$ 就满足这些条件. 其映射的相继各阶段表示在图 15 中. 射线族 $x = x_0$与线段族 $y = y_0$在映射下分别变换成共焦点的双曲线族与椭圆族；其更狭一倍的半带形 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, y > 0$ 则被变换成上半平面.

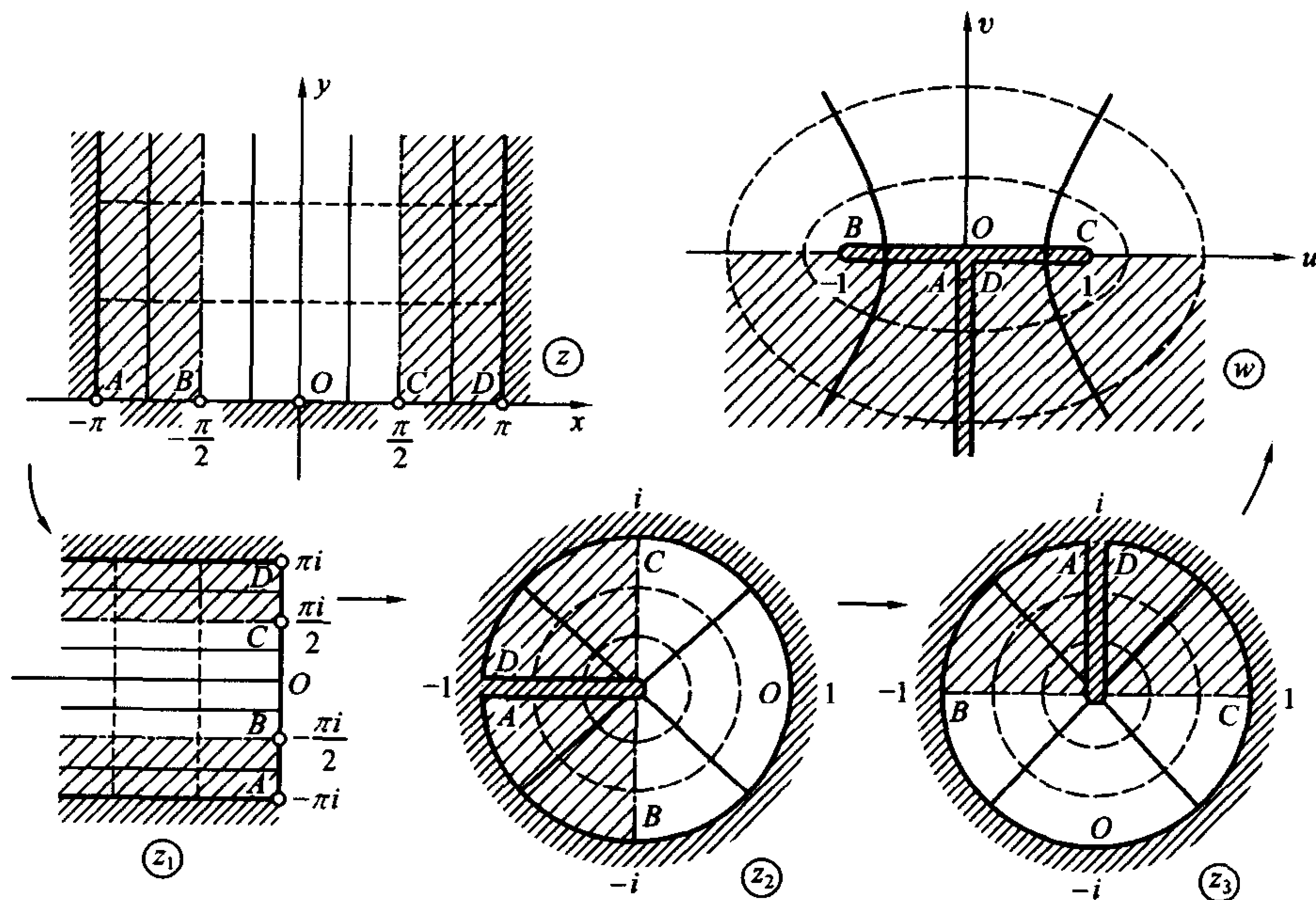


图 15

我们看到，函数 $\sin z$ 在复数区域里是无界的；例如，在射线 $x=\pm\frac{\pi}{2}$，$y>0$ 上，$\sin z$ 取实数值，其模大于 1，而且，一般说来，可以要多大就多大.

我们还要指出，在(闭的)半带形 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，$y\geqslant 0$ 中，函数 $\sin z$ 只有在点 $z=0$ 及 $z=\pm\pi$ 处才取 0 值；再考虑到这函数是一个有周期性的奇函数，由此可以作出结论说，它只有在实轴上的点

$$z=k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

处才变成 0.

为了完整起见，我们在图 16 中举出了函数 $\sin z$ 的模曲面或“地形面”，即，在 (x,y,u) 空间内具有方程为 $u=|\sin z|$ 的曲面；这是个具有实周期 π 的周期曲面. 在它上面画出了两组曲线，就是 $|\sin z|$ 与 $\arg\sin z$ 的等值线. 这曲面被经过 x 轴的垂直平面所截，便给出 $|\sin z|$ 的图形*. 这曲面随着远离 x 轴而渐行展平，但它的点的 u 坐标则迅速地增大——曲面在形状上趋近于柱面 $u=\frac{1}{2}e^{|y|}$.

函数 $\cos z$ 所作出的映射，由于关系式

$$\cos z=\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right),$$

同刚才所研究的不过相差一个平移.

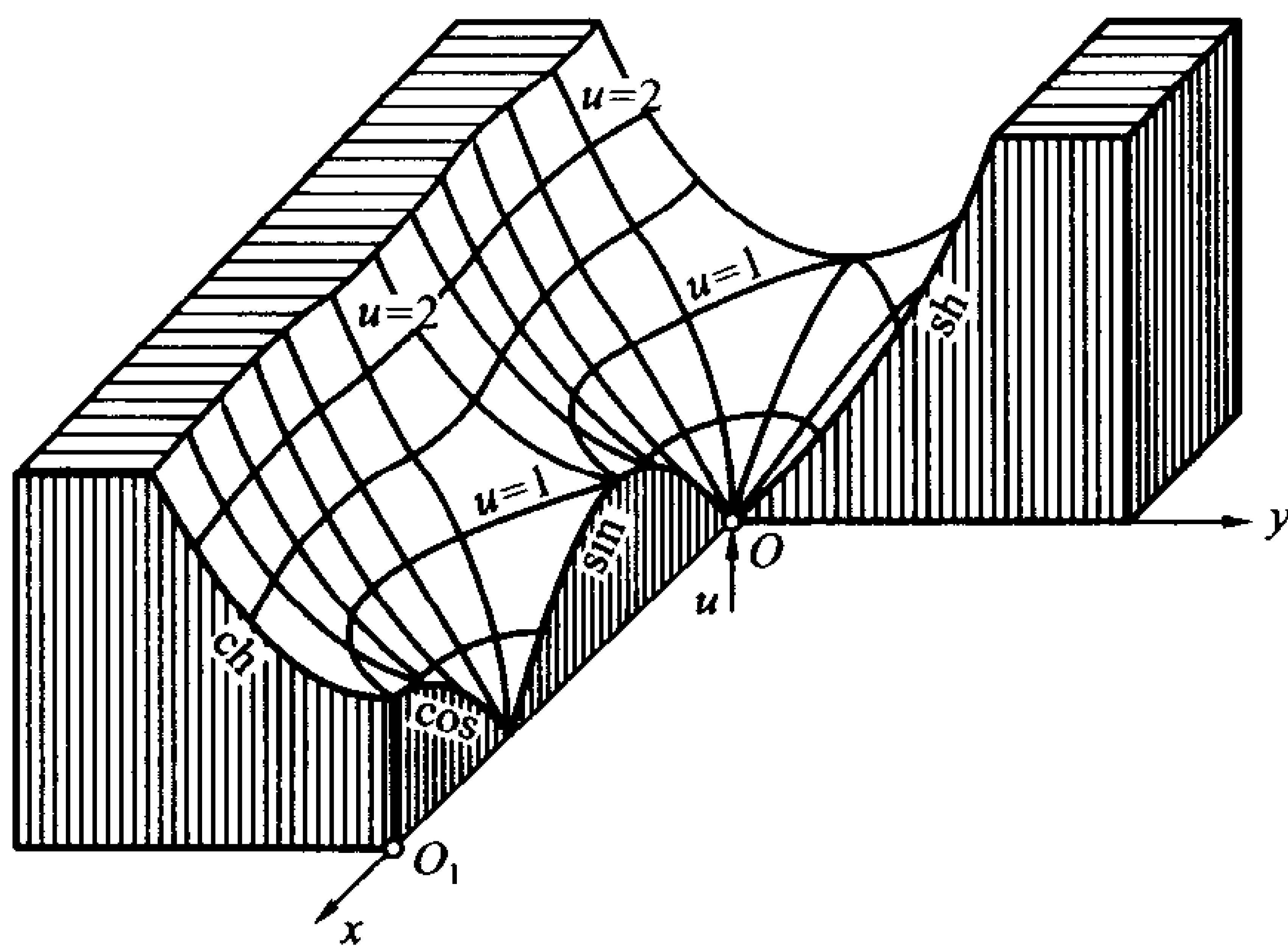


图 16

函数 $\tan z$ 与 $\cot z$ 是由公式

---

* 这曲面被平面 $x=k\pi$ 与 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$所截，分别给出双曲线函数 $|\operatorname{sh} y|$ 与 $|\operatorname{ch} y|$ 的图形，这两种函数我们马上就会了解. 图 16 指明一部分由平面 $x=0$ 和 $x=3\pi/2$ 所截出的截面；另外，可以认为，在这图上有两个坐标原点——sin 和 sh 的图与原点 O 有关，而 cos 和 ch 的图与原点 O_1 有关.

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} \tag{6}$$

来定义的.函数 $\tan z$ 除了在使 $\cos z$ 成为 0 的那些点之外,处处是解析的,这就是说,除了在 $z_k=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 这些点之外,是处处解析的,这由前面的研究中可以看出.在趋近这些点时,$|\tan z|$ 无限制地增大.对于函数 $\cot z$ 以及点 $z_k=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 来说,也是同样.从(6)式可以推出,这两个函数都是具有周期 π 的周期函数.事实上,例如

$$\tan(z+\pi)=-i\frac{e^{i(z+\pi)}-e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)}+e^{-i(z+\pi)}}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=\tan z.$$

由函数 $w=\tan z$ 所实施的映射,我们将在下面第 33 目中加以研究.在这里我们只举出正切函数的地形面,即,曲面 $u=|\tan z|$ (图 17);这是一个具有实周期 $\frac{\pi}{2}$ 的周期曲面.它在 $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 这些点处,有很显著的尖峰.它被经过 x 轴的垂直平面所截时,便给出了 $|\tan x|$ 的图形*.这曲面随着离远 x 轴而愈来愈变得更加平坦,趋近于平面 $u=1$.我们在这曲面上画出了 $|\tan z|$ 与 $\operatorname{argtan} z$ 的等值线.

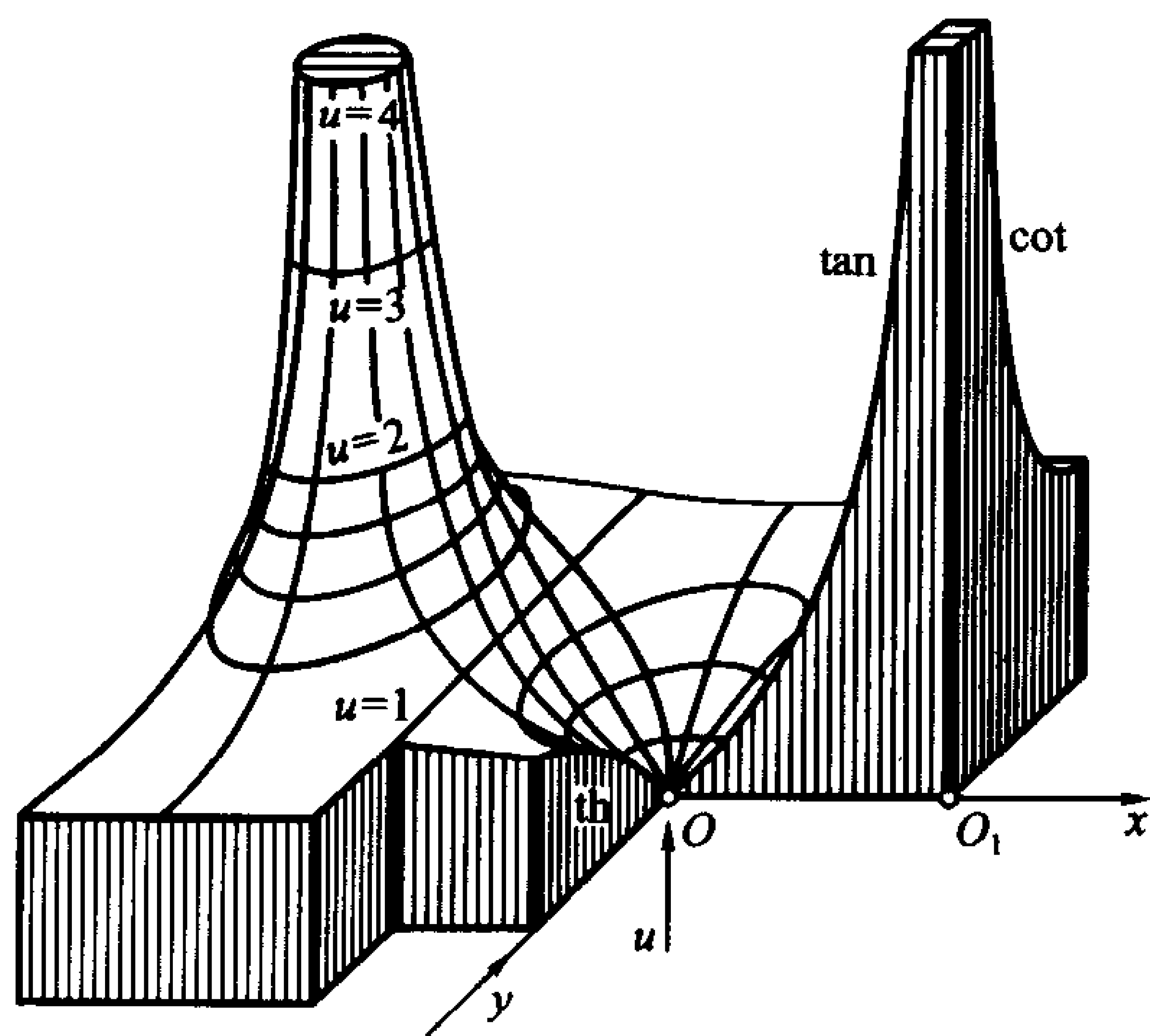


图 17

双曲线函数在复数区域里是用等式

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \tag{7}$$

---

* 这曲面被平面 $x=k\pi$ 与 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 所截时,分别给出双曲函数 $|\operatorname{th} y|$ 与 $|\operatorname{cth} y|$ 的图形(见下面).

与

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}},\operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}} \tag{8}$$

来定义的.它们可以很简单地用三角函数表示出来：

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sh} z=-i\sin iz,\operatorname{ch} z=\cos iz,\\&\operatorname{th} z=-i\tan iz,\operatorname{cth} z=i\cot iz,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

因此与三角函数没有本质的差别.在图16与图17中已指出，$\sin z$ 与 $\tan z$ 的模曲面的截痕，这给出了双曲线函数的图形.

我们已经知道，三角函数与双曲线函数都可以用指数函数来表示.因此反三角函数与反双曲线函数也可以用对数来表示.例如，让我们来求 $w=\arccos z$ 的对数表示式.按照定义有

$$z=\cos w=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2},$$

因之有 $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$，解(关于 e^{iw})的二次方程得

$$e^{iw}=z+\sqrt{z^{2}-1},$$

和

$$w=\arccos z=-i\ \ln\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right);$$

(在解二次方程时所用公式中的"±"号可以省去，只要把根式了解为双值函数就行).由关系式 $\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right)\cdot\left(z-\sqrt{z^{2}-1}\right)=1$，根式前的符号改变，化为对数前的符号改变，所以在最后一式中"－"号也可以不写：

$$w=\arccos z=i\ln\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right). \tag{10}$$

对于其他函数，也可以给出类似的公式：

$$\left.\begin{aligned}&\arcsin z=\frac{\pi}{2}-\arccos z=\frac{\pi}{2}-i\ln\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right),\\&\arctan z=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot} z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz},\\&\operatorname{arsh} z=\ln\left(z+\sqrt{z^{2}+1}\right),\quad \operatorname{arch} z=\ln\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right),\\&\operatorname{arth} z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},\quad \operatorname{arcth} z=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

所有这些函数都是多值的，因为在公式(10)及(11)中右端的 ln，可以表示对数的任何一个值.把它们分开成单值分支的方法，与前面所讨论过的一样，所有的这些分支都将是解析函数.

10. 一般幂函数 $w=z^{a}$——其中 $a=\alpha+i\beta$ 是任意复数——是由关系式

$$z^{a}=e^{a\operatorname{Ln} z} \tag{1}$$

来定义的.在这里如果令 $z=re^{i\varphi}$，便得到 $\operatorname{Ln} z=\ln r+i(\varphi+2k\pi)$，由此

$$z^a = e^{a\ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i[\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta\ln r]}. \tag{2}$$

其中 k 是任何整数. 由此可以看到,当 $\beta \neq 0$ 时,函数 z^a 总是有无限多个值,位于(当 z 与 a 都已固定时)以

$$\rho_k = e^{\alpha\ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3}$$

为半径的那些圆周 $|w| = \rho_k$ 上,这些半径 ρ_k 构成一个两端都无穷的等比数列,公比为 $e^{-2\pi\beta}$. 函数 z^a 的这些值的辐角

$$\theta_k = \alpha\varphi + \beta\ln r + 2k\pi\alpha \tag{4}$$

也构成一个两端都无穷的等差数列,公差为 $2\pi\alpha$.

当 $\beta = 0$ 时,即,a 是实数时,z^a 的值都在圆周 $|w| = e^{a\ln r} = r^a$ 上,而它们的辐角则是

$$\theta_k = a\varphi + 2k\pi a. \tag{5}$$

如果 $a = \dfrac{p}{q}$ 是一个有理数$\left(\text{分数}\dfrac{p}{q}\text{是不可约的}\right)$,那么 θ_k 的所有的值将都同其中的 q 个值(例如,$\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{q-1}$)只相差 2π 的一个整倍数. 因此,在这情形下函数 $w = z^a$ 是有限多值的,与函数 $\sqrt[q]{z^p}$ 相同:

$$z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}. \tag{6}$$

但是,如果 a 是一个无理实数,那么在(5)式中的这些 θ_k 值之间就不会有仅相差 2π 的整倍数的数,因之,函数 $z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}$ 是无限多值的.

一般幂函数的多值性,也同我们在前面所研究过的那些初等函数一样,是由辐角的多值性引起的. 把它分开成单值分支的方法就是前面所用的方法,点 $z = 0$ 是支点.

除了一般幂函数之外,还可以讨论**一般指数函数**

$$a^z = e^{z\operatorname{Ln} a} = e^{z\ln|a|} \cdot e^{zi\operatorname{Arg} a}. \tag{7}$$

同函数(1)不一样,函数(7)是许多单独的,彼此没有联系的单值函数的总和,这些单值函数彼此相差一个因子 $e^{2k\pi iz}$,其中 k 为整数.

§4 复变函数的求积分

在这一节里我们将讨论复变函数的积分概念,以及解析函数与积分概念相关的或与积分运算相关的那些重要性质. 特别例如,将建立解析函数概念、在定义域内每一个点处都是可微的函数的概念,以及积分与其积分路线无关的函数的概念的等价性(见第 12 目中的定理 1 及第 17 目中的定理 3). 这在解析函数论的建立中给出了一个新的观念. 至于积分概念以及建立在其上的那些定理的应用,我们将在下面几章中来讨论.

11. 复变函数的积分 设已经给定了一条已定向的曲线 C,以及在这曲线上的

一个复变函数 $f(z)$. 作为定义,我们把极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_{k+1}-z_k)=\int_C f(z)dz \tag{1}$$

叫做函数 $f(z)$沿 C 的**积分**,其中 $z_0=a, z_1, \cdots, z_n=b$ 是一组把 C 分成 n 个分段的点列,a 与 b 表示 C 的那两个端点,ζ_k 是曲线 C 上位于分段$[z_k, z_{k+1}]$中的任意一个点,并且在取极限时要求

$$\max|z_{k+1}-z_k|\to 0.$$

如果 C 是一条逐段光滑的曲线,$f(z)$是一个逐段连续并且有界的函数,那么积分(1)总是存在的. 其证明可以归结到在分析中大家所熟知的实变函数的线积分的存在定理*. 事实上,令

$$\begin{gathered}f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\\ z_k=x_k+iy_k, x_{k+1}-x_k=\Delta x_k, y_{k+1}-y_k=\Delta y_k,\\ \zeta_k=\xi_k+i\eta_k, u(\xi_k,\eta_k)=u_k, v(\xi_k,\eta_k)=v_k,\end{gathered} \tag{2}$$

我们便得到:

$$\sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n}\{u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k\}+i\sum_{k=0}^{n}\{u_k\Delta y_k+v_k\Delta x_k\}. \tag{3}$$

在公式(3)的右端,这两个和是对应的两个线积分的积分和. 在我们的条件之下,这两个线积分都是存在的,因此,积分

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx \tag{4}$$

也存在. 利用公式(4),可以把复变函数的积分的计算,化成实函数的积分的计算. 应用前面已经引进的定义,容易看出,实变量的复函数 $w(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$的导数与积分可用下述线性组合来表示:

$$w'(t)=\varphi'(t)+i\psi'(t), \tag{5}$$

$$\int_\alpha^\beta w(t)dt=\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt+i\int_\alpha^\beta \psi(t)dt. \tag{6}$$

设 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$是曲线 C 的参数表示式,并且 $z(\alpha)=a, z(\beta)=b$;那么利用公式(4),我们便可将 $f(z)$沿着 C 的积分的计算,化成实变量的复函数的积分计算:

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt. \tag{7}$$

由公式(4)也可推知,关于线积分的一些普通性质可以推广到复变函数的积分上来:

$$\int_C\{af(z)+bg(z)\}dz=a\int_C f(z)dz+b\int_C g(z)dz, \tag{8}$$

---

* 参看 Фихтенгольц,第三卷,第 27 页(俄文本);或 Смирнов,第二卷,第 206 页(俄文本)及以后. 在这里以及在后面,我们将常引用序言中指出过的这两部书.

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz, \tag{9}$$

$$\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz \tag{10}$$

(a 与 b 是两个复数常数，C_1+C_2 表示由 C_1 与 C_2 两曲线所构成的那条曲线；C^- 表示一条同 C 相合、但却循着相反的方向通过的曲线）.

我们还要来证明积分的一个性质：

设 $M=\max|f(z)|$（在曲线 C 上），又 l 是曲线 C 的长度，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant \int_C |f(z)||dz| \leqslant Ml. \tag{11}$$

证明可由积分的定义直接得出. 事实上，我们有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|,$$

其中 $\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|$ 是内接于曲线 C 的一条折线 $z_0 z_1 \cdots z_n$ 的长度. 当 $\max|\Delta z_k| \to 0$ 时取极限，我们便得出(11)式.

12. 柯西定理 在一般的情形中，$\int_C f(z)dz$ 既依赖被积函数 $f(z)$，也依赖曲线 C. 但是，如果函数 $f(z)$ 在某一个包含了曲线 C 的单连通区域内是解析的，那么这积分就由 C 的两个端点的位置所完全确定，而与这曲线的形状无关. 换句话说，下述定理成立：

定理 1 (A. 柯西，1825 年) *如果函数 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 内是解析的，那么对于所有在这个区域内而且具有两个公共端点的那些曲线 C 来说，积分 $\int_C f(z)dz$ 的值都相同.*

我们在导数 $f'(z)$ 是连续函数这个补充假定下[在第 5 目的解析性的定义中，只要求 $f'(z)$ 存在]，来证明这个定理*.

同通常一样，设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，根据关系式

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx \tag{1}$$

（见上一目中的(4)式），积分 $\int_C f(z)dz$ 是否与积分的路线无关这个问题，可以化为

$$\int_C udx - vdy, \int_C udy + vdx \tag{2}$$

这两个线积分是否与积分的路线无关的问题.

---

* 完整的证明见 Маркушевич[2]，154—162 页.

但是,在数学分析*中已经知道,若 P 与 Q 是两个具有连续偏导数的函数,要曲线积分 $\int_C Pdx+Qdy$ 在单连通区域 D 内同积分的路线无关,其充分必要条件是,它的被积表达式是一个全微分,即,要在区域 D 的每一个点处,都有关系式 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 成立. 对于积分(2)来说,这些关系式有形状

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3}$$

而且从 $f'(z)$ 是连续函数这一假定可以得出,这些偏导数都是连续的. 方程组(3)同柯西-黎曼条件相符合,并且由于 $f(z)$ 是一个解析函数,所以是满足的. 于是定理已经证明.

由于这个定理,对于那些在单连通区域内解析的函数,我们就可以写 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 来代替 $\int_C f(z)dz$,其中用 z_0 与 z 来表示曲线 C 的那两个端点.

根据定理 1,可以证明与通常的积分学中的命题相类似的一系列命题. 首先,有

定理 2 如果函数 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 内是解析的,那么积分

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=F(z), \tag{4}$$

看作它的积分上限的函数,也是一个在 D 内解析的函数,并且

$$F'(z)=\frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=f(z). \tag{5}$$

事实上,根据导数的定义,以及上一目中积分的性质(9)与(10),有

$$\begin{aligned}F'(z)&=\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta.\end{aligned} \tag{6}$$

由于 $f(z)$ 在点 z 处连续**,可以写成

$$f(\zeta)=f(z)+\eta(\zeta),$$

式中当 $\zeta\to z$ 时,$\eta(\zeta)\to 0$;把这代入(6)式中,我们得到

$$F'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)d\zeta+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\eta(\zeta)d\zeta. \tag{7}$$

由于在对 ζ 积分时 $f(z)$ 是一个常量,所以

---

* 见 Фихтенгольц,第三卷;或 Смирнов,第二卷.

** 因为 $f(z)$ 是解析的,所以必是连续的.

$$\int_z^{z+h} f(z)d\zeta = f(z)\int_z^{z+h} d\zeta = f(z)\cdot h,$$

因为由定义可以直接得出 $\int_z^{z+h} d\zeta = h$. 并且,从上一目中的不等式(11)有:

$$\left|\int_z^{z+h} \eta(\zeta)d\zeta\right| \leqslant \max|\eta(\zeta)|\cdot|h|$$

(根据定理 1,从点 z 到点 $z+h$ 的积分路线可以认为是直线,所以它的长度等于 $|h|$). 因此,(7)式中的第一个极限等于 $f(z)$,第二个极限等于 0,即,$F'(z)=f(z)$,这就是所要求证明的.

其导数等于一个已给定的函数 $f(z)$ 的函数,叫做这函数 $f(z)$ 的**原函数**,方才所证明的那个定理确认,函数 $f(z)$ 的积分,作为其积分上限的函数,是 $f(z)$ 的原函数之一.

定理 3 同一函数的任何两个原函数,彼此最多只相差一个常数项.

设 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 是两个原函数,又

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

要证明定理 3,只需证明函数 $\Phi(z)$ 是一个常数.

按照导数的公式(见第 5 目的(15)式),我们有

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

因为根据我们的条件,

$$\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

由此便有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

因此,$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 都是常数. 定理得证.

下面这个定理使我们可以借助原函数来计算积分.

定理 4 如果 $F(z)$ 是解析函数 $f(z)$ 的任何一个原函数,那么

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0). \tag{8}$$

事实上,根据定理 2,函数

$$F_1(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

是 $f(z)$ 的原函数之一. 根据所给条件,函数 $F(z)$ 也是 $f(z)$ 的一个原函数,因此,按照定理 3,

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) + C,$$

其中 C 是某一个常数. 在这个等式中令 $z = z_0$,我们便得到

$$F(z_0) + C = 0,$$

因此 $C=-F(z_0)$，这就给出了所求的公式(8).

我们还要指出，在本目开始时所证明的那个柯西定理，可以赋予如下的形式：

定理 如果函数 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 内是解析的，那么它的沿着任何一条在 D 内的闭周线 C 的积分，都等于 0，即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0. \tag{9}$$

这定理的证明是以下述事实为基础的：闭周线 C 可以分成两条具有共同的始点与终点的路线 C_1 及 C_2（图 18）. 根据积分的性质，有

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2^-} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz-\int_{C_2} f(z)dz,$$

于是，说沿着 C 的积分等于零，就相当于沿着 C_1 的积分与沿着 C_2 的积分彼此相等.

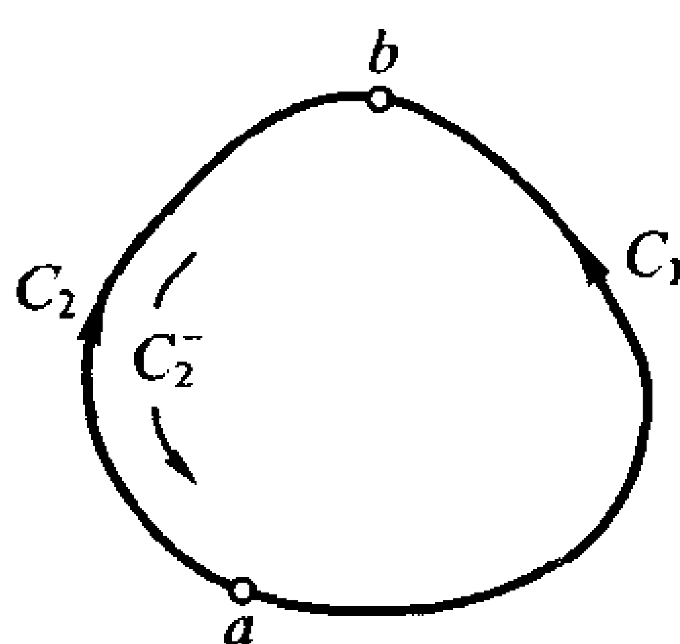


图 18

在结束时，我们再证明一个对以后很有用的柯西定理的推广. 这就是，在柯西定理中（在第二个表述形式中），所谈到的是关于沿着一条整个位于函数的解析区域内部的路线的积分. 但是我们有时也需要讨论沿着某一些曲线的积分，在这些曲线上函数仍然是连续的，但不再是解析的. 发现，对于这样的情形柯西定理也仍然是有效的.

定理 5 如果函数 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 内是解析的，并且在闭区域 $\bar{D}$ 上是连续的，那么 $f(z)$ 沿着区域 D 的边界 C 所取的积分等于零，即

$$\int_C f(z)dz=0. \tag{9}$$

我们首先假定 C 是一条"星形的"周线，即，有这样的一个点 z_0 存在，以这个点 z_0 为始点的任何一条射线，都同 C 相交于一个点，而且也只相交于一个点. 可以假定 $z_0=0$，而不致对普遍性有任何限制（把 z 平面作一个平移，便可得到这结果），于是曲线 C 就可以用方程 $z=r(\varphi)e^{i\varphi}$ 来给出，其中 $r(\varphi)$ 是一个单值函数. 我们用 C_λ 来表示由方程

$$\zeta=\lambda z=\lambda r(\varphi)e^{i\varphi},0<\lambda<1$$

所确定的那条周线（图 19）. 由于 C_λ 位于区域 D 的内部，所以按照柯西定理，

$$\int_{C_\lambda} f(\zeta)d\zeta=0. \tag{10}$$

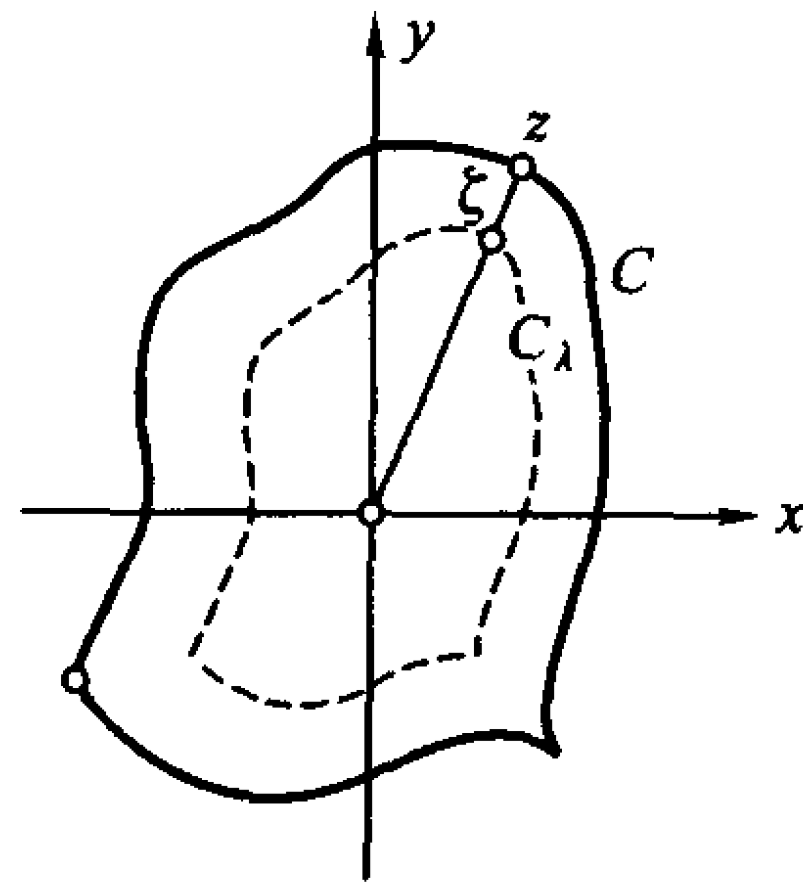


图 19

但是当点 ζ 画出 C_λ 时，点 $z=\frac{1}{\lambda}\zeta$ 就画出 C，所以等式(10)可以写成

$$\int_C f(\lambda z)d(\lambda z)=\lambda\int_C f(\lambda z)dz=0$$

的形状. 而因此，

$$\int_C f(z)dz=\int_C (f(z)-f(\lambda z))dz. \tag{11}$$

因为函数 $f(z)$是在 $\bar{D}$ 内一致连续的(见第5目),所以对任何一个 $\varepsilon>0$,总可以找到一个 $\delta>0$,使得满足不等式 $|z-\zeta|<\delta$ 的任何一对点 z,ζ 来说,不等式

$$|f(z)-f(\zeta)|<\varepsilon \tag{12}$$

都成立.

设 l 是周线 C 的长度,$R=\max r(\varphi)$;我们取 $\lambda>1-\frac{\delta}{R}$,于是对任何一对点 $z,\zeta=\lambda z$,我们将有 $|z-\zeta|=(1-\lambda)|z|\leqslant\frac{\delta}{R}|z|\leqslant\delta$,因此不等式(12)总是成立的,所以从(11)式我们便得到

$$\left|\int_C f(z)dz\right|< l\varepsilon.$$

因为在这里 ε 是可以随便怎样小的,而积分的值与 ε 无关,所以这积分等于0.对于星形的路线来说,定理已经证明了.

现在设 C 是任意一条逐段光滑的曲线.如果在 C 上有一些歧点,(即在这些点处曲线 C 的左切线与右切线所形成的角度是等于0)*,那么我们就从区域 D 中去掉那些具有很小的半径 ε 而圆心在这种点上的圆,使所得到的那个区域 D_ε 的边界上已经没有这样的点了.显然,可以在 D_ε 的内部作有限多条曲线 $\gamma_k(k=1,2,\cdots,m)$,显然,把区域 D_ε 分成若干个部分 D_k,使每一个 D_k 都是由星形的曲线 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$所围成的(图20).根据前面所已经证明的,沿着每一条曲线 C_k 的积分都等于0:

$$\int_{C_k} f(z)dz=0. \tag{13}$$

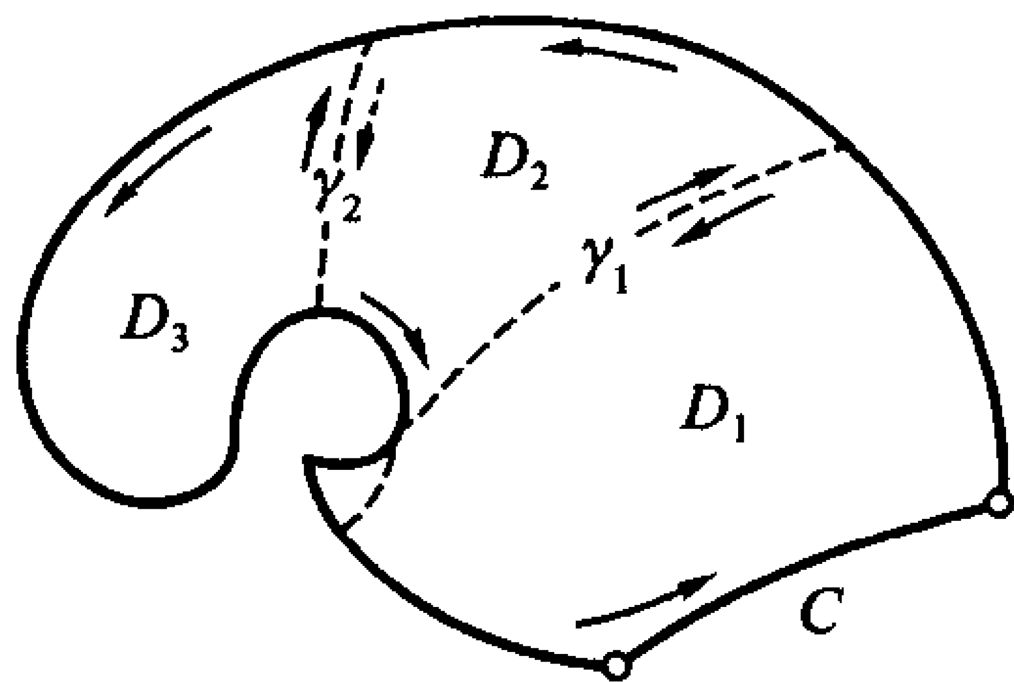


图 20

我们假定曲线 C_k 都是按照同一个方向,例如,都是按照正的方向来通过的,并且把所有这些方程(13)都加在一起.因为在每一条曲线 γ_k 上都被通过两次,而且是按照彼此相反的方向通过的,所以所有沿着 γ_k 的积分互相抵消(见第11目中的(9)与(10)式).边界 C_k 的其余的部分合起来构成区域 D_ε 的边界 C_ε,因此,沿着这边界的积分也等于0:

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz=0.$$

余下还需要证明,沿着区域 D 的边界 C 的积分等于0.而这可以从下述事实直接得出:C 与 C_ε 仅相差有很多段很小的弧,又因为函数 $f(z)$是有界的,所以它的沿着这些弧的积分的值也很小.因此,沿着 C 的积分与沿着 C_ε 的积分的差,可以是随便怎样地小,而沿着 C_ε 的积分是等于0的,所以沿着 C 的积分也等于0.定理于是完全证明了.

13. 推广到多阶连通区域的情形 一般说来,柯西定理对于多阶连通区域来说是不正确的.实际上,函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在环 $\frac{1}{2}<|z|<2$ 内处处解析,但是,从 -1 到 1 沿着圆周 $|z|=1$ 的上面一半的积分,与沿着下面一半的积分,是彼此不同的.事实

---

* 容易看出,一条逐段光滑的曲线,在它的不是歧点(即使左右切线形成异于0的角度的点)的足够小的邻域内的曲线段,是星形的曲线.而在一个歧点的邻域内,曲线就可能不是星形的(例如,由二次抛物线 $y=x^2$ 及 $y=2x^2$ 对 $x\geqslant0$ 所构成的曲线,在点 $z=0$ 的邻域内).

上,沿着上半圆周 C_1,那里 $z=e^{i\varphi}$,$0<\varphi<\pi$,我们有:

$$\int_{C_1}\frac{dz}{z}=\int_{\pi}^{0}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}}=-i\pi,$$

而沿着下半圆周 C_2,那里 $z=e^{i\varphi}$,$-\pi<\varphi<0$,我们有:

$$\int_{C_2}\frac{dz}{z}=\int_{-\pi}^{0}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}}=i\pi.$$

因此,为了表示在多阶连通区域内从 a 到 b 沿路线 C 的积分,我们有时将使用记号

$$\int_{a\,C}^{b} f(z)dz. \tag{1}$$

但是,如果是在一个多阶连通区域 D 内,有两条端点相同的曲线 C_1 与 C_2,而它们的位置是使得它们能围成一个属于 D 的单连通区域时,那么沿着这样两条曲线的积分显然是相等的.由此可以推知:**在多阶连通区域 D 内,如果积分的周线连续地改变其形状,而它的两个端点保持不动,并且在全部变动时间内周线始终留在 D 的内部,则解析函数沿这路线的积分的值,不为之改变.**

设在多阶连通区域 D 内给定两个点 a 与 b,与一条连接它们的简单曲线* C_0.设 C 是任何别的一条连接这两个点的曲线(图 21(a)).根据刚才所说的结果,可以不改变积分的值,而使曲线 C 变形成为位于区域 D 内而由下述那些曲线所组成的另外一条曲线 $\tilde{C}$:(1) 曲线 $\tilde{C}_0$,它同 C_0 一起围成一个属于 D 的单连通区域;(2) m 条简单闭曲线 γ_k $(k=1,2,\cdots,m)$的总和,每一条 γ_k 都在它本身的内部包含了 D 的边界的一个连接部分(图 21(b)).这时那些曲线 γ_k 可以被通过若干次,并且可以按不同的方向来通过(在图 21(b)中,γ_1 按顺时针的方向被通过三次,而 γ_2 则按逆时针的方向被通过一次).为了方便起见,我们规定用 γ_k $(k=1,2,\cdots,m)$来表示按逆时针方向被通过的那些曲线.在此之外,我们还要引进一些曲线 γ_k $(k=m+1,\cdots,n)$,它们也是包围着区域 D 的边界的连接部分的,但不是组成 $\tilde{C}$ 的一部分(就如在图 21(b)中的 γ_3).

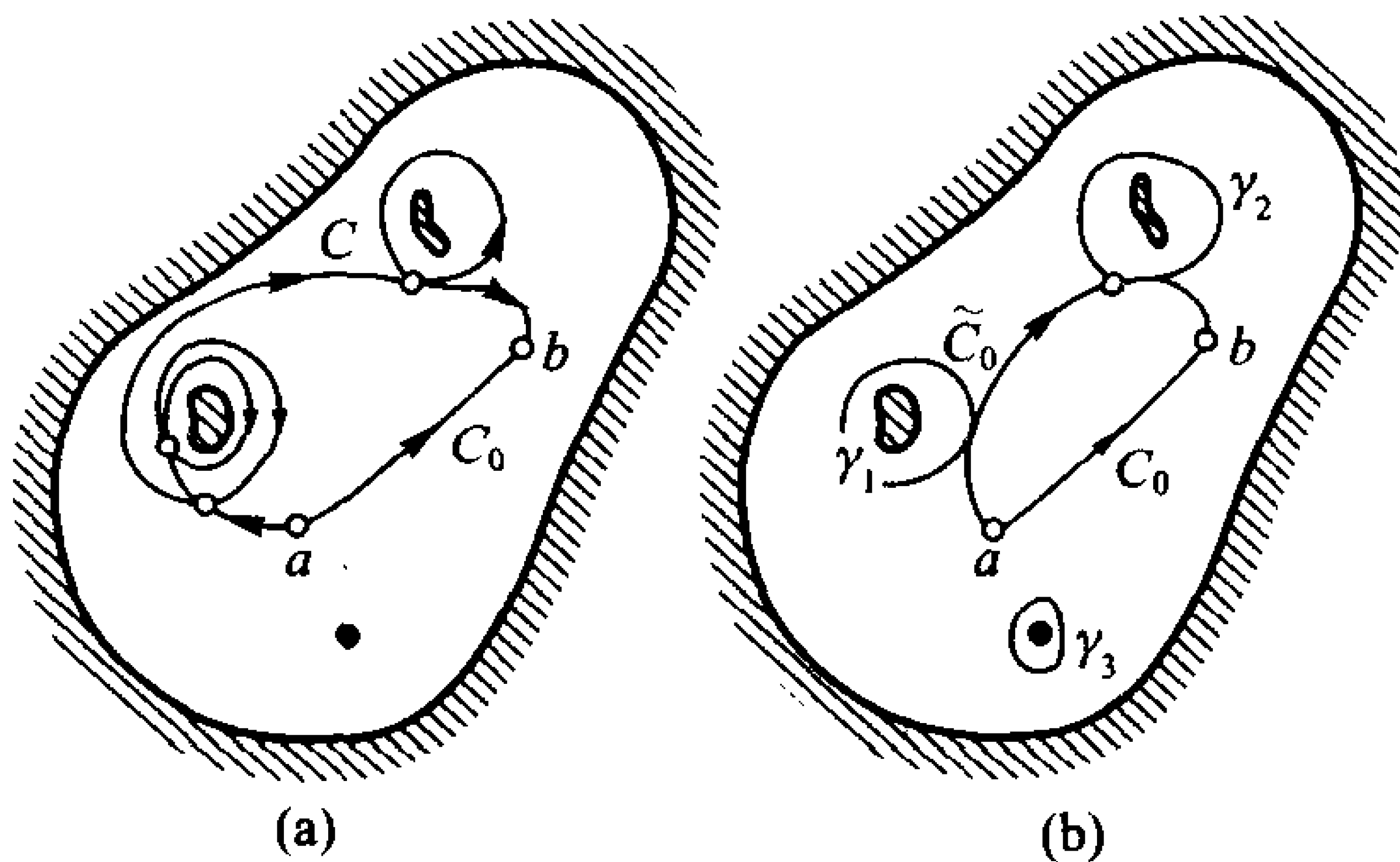


图 21

---

* 即,没有自己相交的点的曲线.

我们引进记号

$$\Gamma_k=\int_{\gamma_k} f(z)dz \quad (k=1,2,\cdots,n); \tag{2}$$

在连续形变 γ_k 下,形变时这些曲线仍留在 D 内部,积分(2)不变,从而,这些量 Γ_k 只由函数 $f(z)$ 与区域 D 来确定.设 N_k 是整数,用来指明在构成曲线 $\tilde{C}$ 时 γ_k 被通过几次以及是按照什么样的方向来通过的.这些 N_k 可以是正数,负数,或等于 0 (例如,在图 21 中,$N_1=-3,N_2=1,N_3=0$).根据上面所说,以及第 11 目中积分的性质(9)与(10),我们有

$$\int_{C\,a}^{b} f(z)dz=\int_{\tilde{C}\,a}^{b} f(z)dz=\int_{C_0\,a}^{b} f(z)dz+N_1\Gamma_1+N_2\Gamma_2+\cdots+N_n\Gamma_n. \tag{3}$$

量 Γ_k 叫做函数 $f(z)$ 在多阶连通区域 D 内的**积分周期,或周期常量**.

例 设 $f(z)=\frac{1}{z}$,又区域 D 是一个"环形"$0<|z|<R$,其中 R 是一个随意大的数.连接 1 与 z 这两个点的任何路线 C,同前面一样,都可以变形成为由被通过若干次的单位圆周 $|z|=1$,与一条连接点 1 与 z 的简单曲线 C_0 所构成的一条路线 $\tilde{C}$ (图 22).在按照逆时针方向通过单位圆周时,$z=e^{i\varphi}$,而 φ 从 0 增加到 2π,所以沿着这圆周的积分是等于

$$\Gamma=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}id\varphi}{e^{i\varphi}}=2\pi i. \tag{4}$$

根据公式(3),

$$\int_{C\,1}^{z}\frac{dz}{z}=\int_{C_0\,1}^{z}\frac{dz}{z}+2k\pi i, \tag{5}$$

其中 k 是一个整数,表明在 $\tilde{C}$ 的构成中圆周 $|z|=1$ 被通过几次以及是按照什么样的方向来通过的(在图 22 中,$k=-2$).按照上目的定理 4,

$$\int_{C_0\,1}^{z}\frac{dz}{z}=\ln z\Big|_1^z=\ln z, \tag{6}$$

其中 ln 是表示对数的那些值中,在点 $z=1$ 处等于 0 并且沿着 C_0 连续地变动的那一个值.

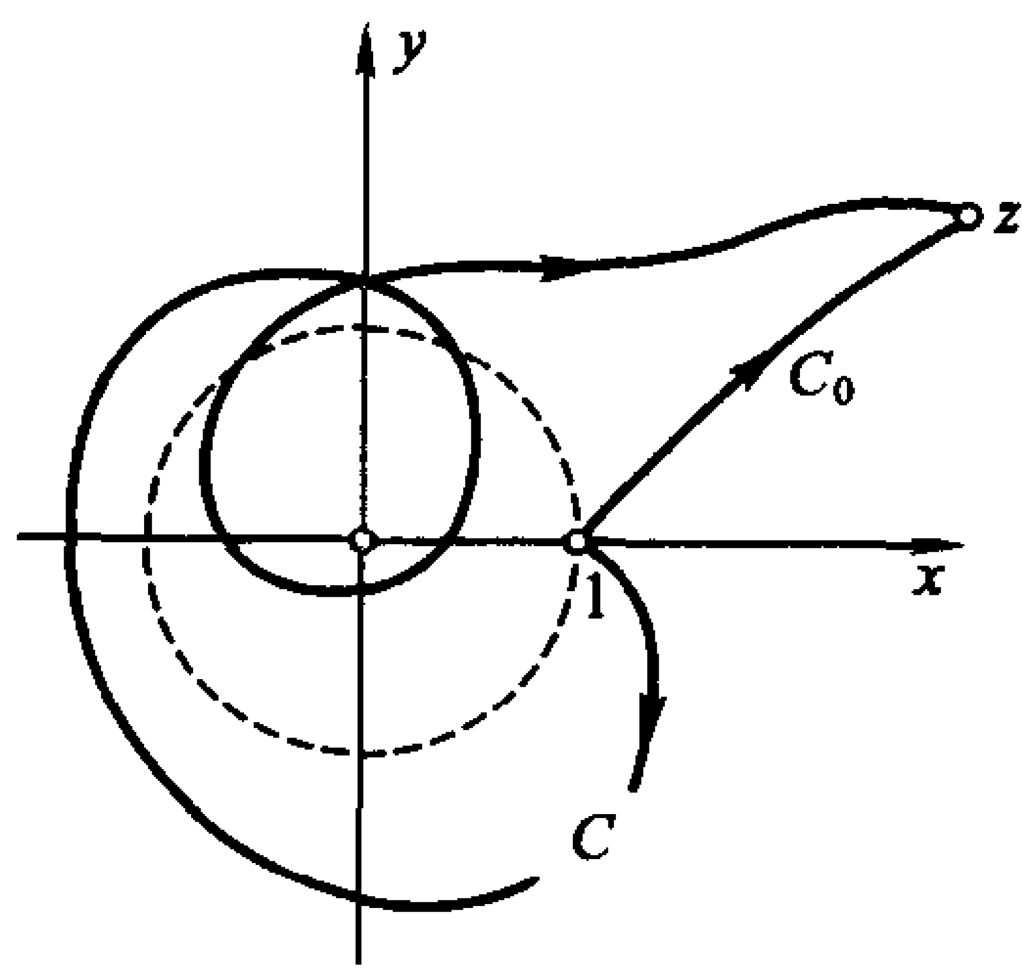


图 22

设想 C 是任意的路线,并把函数 $\frac{1}{z}$ 沿着 C 的积分值记作 $\mathrm{Ln}\, z$,我们由(5)式得出

$$\mathrm{Ln}\, z=\int_{C\,1}^{z}\frac{dz}{z}=\ln z+2k\pi i, \tag{7}$$

这样,我们便重新来到了多值函数 $\mathrm{Ln}\, z$,并且从一个新的观点阐明了它的多值性.

最后,我们要指出,可以给上一目中的柯西定理添加上一些别的意义,使得它对于多阶连通区域来说也是正确的.设函数 $f(z)$ 在一个由一些曲线 $C_0,C_1,\cdots,C_n$ 所围成的多阶连通区域 D(图 23)内是解析的,并且在 $\bar{D}$ 上是连续的.我们划一些截痕 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$,使 D 变成一个单连通区域 D^*,并用 C^* 来表示这个区域的边界——

由那些曲线段 C_k 与曲线 γ_k 所构成的那条曲线，此时这些 γ_k 都被按照彼此相反的方向通过两次(在图23中用箭头表示出). 函数 $f(z)$ 在单连通区域 D^* 内是解析的，在 $\overline{D}^*$ 上是连续的；于是，根据上一目中的定理5，及第11目中积分的性质(9)与(10)，

$$\int_{C^*} f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)dz = 0 \tag{8}$$

(沿着 γ_k 的那些积分互相抵消，C^* 的余下部分等于 $\sum_{k=0}^{n} C_k$). 这时我们应当认为，在通过曲线 C_0 及 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 时，区域 D 是始终都被保持在一边的(例如，在图23中，是在曲线左边的). 因此，对于任何连通的区域来说，下述形式的柯西定理总是正确的：

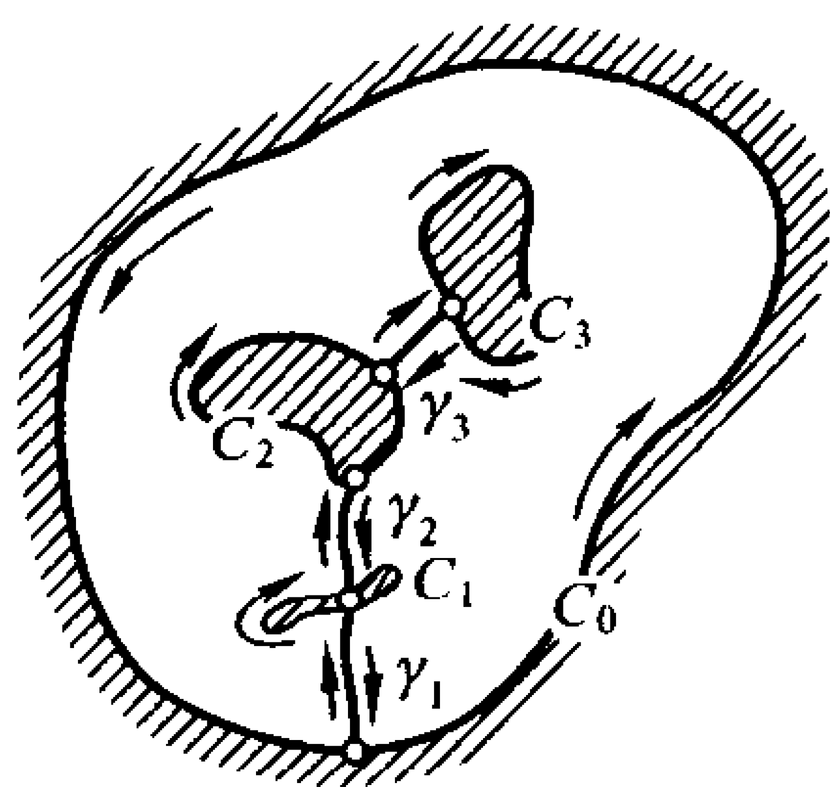


图23

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内是解析的，在 $\overline{D}$ 上是连续的，那么它的沿着这区域的边界的积分必等于0，但在通过这边界时，区域 D 要始终被保持在同一边.

14. 柯西公式与中值定理 设函数 $f(z)$ 在 n 阶连通区域 D 内是解析的，在 $\overline{D}$ 上是连续的. 我们来证明，对于这区域的任何一个内点 z，下述的所谓柯西公式(1831)都成立：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \tag{1}$$

其中 C 是区域 D 的边界，其被通过的方向是使得区域 D 始终保持在其左边.

注意到柯西公式的右端部分只包含区域 D 的边界 C 上的 $f(z)$ 值. 这样，在所设的条件之下，函数 $f(z)$ 在区域内部的那些值，完全由它在边界上的值来确定：只要知道这函数在边界上的值，利用柯西公式就能够计算出在区域内任何一点处的函数值.

为了要导出柯西公式，我们从区域 D 中去掉一个圆心为点 z 半径为 r 的小圆. 再注意到，在所得的那个 $n+1$ 阶连通区域 D^* 内，(1)式中被积函数的分子与分母对于变量 ζ 来说都是解析的，并且分母不会变成0. 因此，被积函数在 D^* 内对于 ζ 是解析的. 又因为它在 $\overline{D}^*$ 上是连续的，所以根据上一目中的柯西定理(公式(8))有：

$$\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\gamma_r^-} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

其中圆周 γ_r^- 是按照顺时针方向被通过的. 由此就有

$$\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \tag{2}$$

其中圆周 γ_r 是按照逆时针方向被通过的. 在圆周 γ_r 上我们有 $\zeta - z = re^{i\varphi}$，因此，把在积分号后对于 ζ 来说是常量的那个因子 $f(z)$ 从积分号取出，我们便得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\substack{0\\ \gamma_r}}^{2\pi} \frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} = f(z). \tag{3}$$

根据(2)和(3)式我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta; \tag{4}$$

我们来估计这个差值.就其右端来说,根据第 11 目中的不等式(11),我们有:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)| \cdot \frac{2\pi r}{r} = \max_{\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)|,$$

由此可见,当 r 继续减小时,可以使它随便怎样地小.另一方面,从(4)的左端看出,这差值不依赖 r.因此,所讨论的差等于 0.于是柯西公式得证.

特别,如果曲线 C 乃是圆周 $|\zeta - z| = R$,那么,令 $\zeta - z = Re^{i\varphi}$,由柯西公式我们得出

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\varphi})d\varphi. \tag{5}$$

最后这个公式就表达了所谓的解析函数的**中值定理**:

定理 *如果函数 $f(z)$ 在一个闭圆上是连续的,并在这个圆的内部是解析的,那么它在圆心处的值,等于它在圆周上的值的算术平均值.*

15. 最大值原理与施瓦茨引理 首先我们来证明一个简单的引理:

引理 *如果在某一个区域 D 内:1) 解析函数 $f(z)$ 的实数部分是常数,或 2) 它的模是常数,那么这函数本身也必是个常数.*

在条件 1) 的情形下,从柯西 - 黎曼方程就直接可以得出结论:$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$.因此,根据这些方程也有 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$.由此得出,函数 $v(x, y)$,也就是说函数 $f(z)$,在区域 D 内也都是常数.

现在我们就条件 2) 的情形下来证明这引理.设 $|f(z)| \equiv M$,在这里 M 是一个常数.当 $M = 0$ 时,引理显然成立.如果 $M \neq 0$,那么我们便考虑函数

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z),$$

这函数在所设的条件下是解析的.它的实数部分是一个常数($=\ln M$);于是,根据刚才所证明的,函数 $\ln f(z)$ 本身,从而函数 $f(z)$,都是常数.引理于是完全证明.

现在我们来证明解析函数的**模最大值原理**.

定理 *如果一个不恒等于一常数的函数 $f(z)$,在区域 D 内是解析的,在 $\bar{D}$ 上是连续的,那么它的模不可能在 D 的任何一个内点处达到最大值.*

根据连续函数的性质(参看第 5 目),$|f(z)|$ 在 D 的内部或边界上达到它的最大值 M (图 24).我们先姑且作相反的假定,设 $|f(z)|$ 在 D 的内部达到值 M;并把 D 中所有那些使 $|f(z)| = M$ 的点的集合记作 $\mathscr{E}$.如果 $\mathscr{E} = D$,那么我们在 D 内处处有 $|f(z)| = M$,即,$|f(z)|$ 是一个常数.根据引理,由此便将得出 $f(z)$ 在 D 内也是一个常数,这是与定理的假设条件相矛盾的.

如果 $\mathscr{E}$ 不与 D 相同，那么必有这集合的一个边界点* z_0 存在，它同时也是 D 的一个内点。由于 $f(z)$ 是连续的，我们有 $|f(z_0)|=M$，因为在 z_0 的任何邻域内都必有 $\mathscr{E}$ 的点。我们作一个在区域 D 内的圆周 $C: |z-z_0|=r$，使得在这圆周上至少有一个不属于集合 $\mathscr{E}$ 的点 z_1（这总是可以做到的，因为 z_0 是 $\mathscr{E}$ 的边界点）。这时 $|f(z_1)|<M$，又由于 $f(z)$ 是连续的，对于足够小的 $\varepsilon>0$，总可以指定圆周 C 的这样一个包含点 z_1 在内的部分 C_1，使得在 C_1 上有

$$|f(z)|<M-\varepsilon. \tag{1}$$

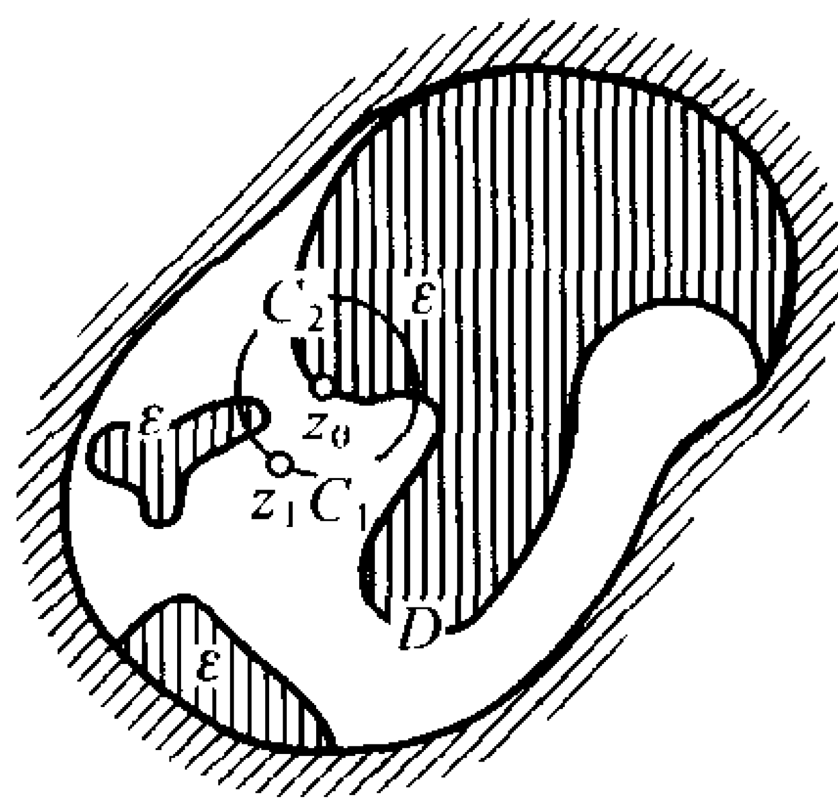


图 24

把圆周 C 的其余部分记作 C_2。显然，在 C_2 上有

$$|f(z)|\leqslant M. \tag{2}$$

根据中值定理，我们有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)d\varphi=\frac{1}{2\pi r}\left\{\int_{C_1} f(z)ds+\int_{C_2} f(z)ds\right\}, \tag{3}$$

其中 $ds=rd\varphi$ 是圆周 C 的弧长单元。

在关系式(3)中取绝对值，并考虑到不等式(1)及(2)，我们便得出

$$M=|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi r}\{(M-\varepsilon)l_1+Ml_2\}=M-\frac{\varepsilon l_1}{2\pi r},$$

其中 l_1 与 l_2 分别是 C_1 与 C_2 的长度（$l_1+l_2=2\pi r$）。但是最后这个不等式是不可能的，因此模最大值原理就证明了。

注 如果函数 $f(z)$ 不是一个常数，在 D 内是解析的，在 D 上是连续的，此外，并且是不会变成 0 的，那么它也不可能在 D 的内部达到 $|f(z)|$ 的最小值。要证明这结论，只需把最大值原理应用到函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 上去就够了。

从模最大值原理，可以得出一个对以后很有用的结果：

引理（H. 施瓦茨(Schwarz)**） 如果函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内是解析的，在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 上是连续的，并且 $f(0)=0$，又在圆内处处都有 $|f(z)|\leqslant 1$，那么在这个圆内有

$$|f(z)|\leqslant|z|. \tag{4}$$

这时，如果即使在圆内的一个点处有 $|f(z)|=|z|$，那么最后这个等式在整个圆内都成立，并且

$$f(z)=e^{i\alpha}z, \tag{5}$$

其中 α 是一个实常数。

---

* 集合的边界点与内点，是同区域的边界点与内点一样地规定的(参看第 3 目)。

** G. A. 施瓦茨(1843—1921)，德国数学家。

为了证明这个引理,我们来考虑函数

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & 当\ z\neq 0,\\ f'(0), & 当\ z=0.\end{cases}$$

从引理的假设条件可以知道,$\varphi(z)$在环形 $0<|z|<1$ 内是解析的,并且在闭圆$|z|\leqslant 1$ 上是连续的(在点 $z=0$ 处的连续性,可以从

$$\lim_{z\to 0}\varphi(z)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=f'(0)$$

得出).

在第 22 目中将要证明,$\varphi(z)$在点 $z=0$ 处是解析的.因此,我们可以对 $\varphi(z)$应用模最大值原理.由于在圆周$|z|=1$ 上我们有$|\varphi(z)|=\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|\leqslant 1$,所以按照模最大值原理,在圆内就处处有$|\varphi(z)|\leqslant 1$,即,$|f(z)|\leqslant|z|$.引理的第一部分已经证明.

现在如果在圆的某一个内点 z_0处有$|f(z_0)|=|z_0|$,那么在这个点处就有$|\varphi(z_0)|=1$,但是按照模最大值原理,这时便在圆的所有点都有$|\varphi(z)|\equiv 1$,根据本目开头的那个引理,$\varphi(z)$是一个常数.因为$|\varphi(z)|\equiv 1$,所以可把这个常数表示成 $e^{i\alpha}$的形状,这里的 α 是一个实数.因此,$f(z)=e^{i\alpha}z$.施瓦茨引理得证.

在几何上,施瓦茨引理表明,在任何一个利用解析函数 $w=f(z)$,$f(0)=0$,把单位圆映射到一个位于单位圆内部的区域 Δ 上去时,任意一个点 z 的像,都比点 z 本身距坐标原点更近(图 25).而如果即使有一个点 z 的像是与这个点本身距坐标原点有同样距离的话,那么 Δ 就与单位圆重合,映射本身成为一个旋转.

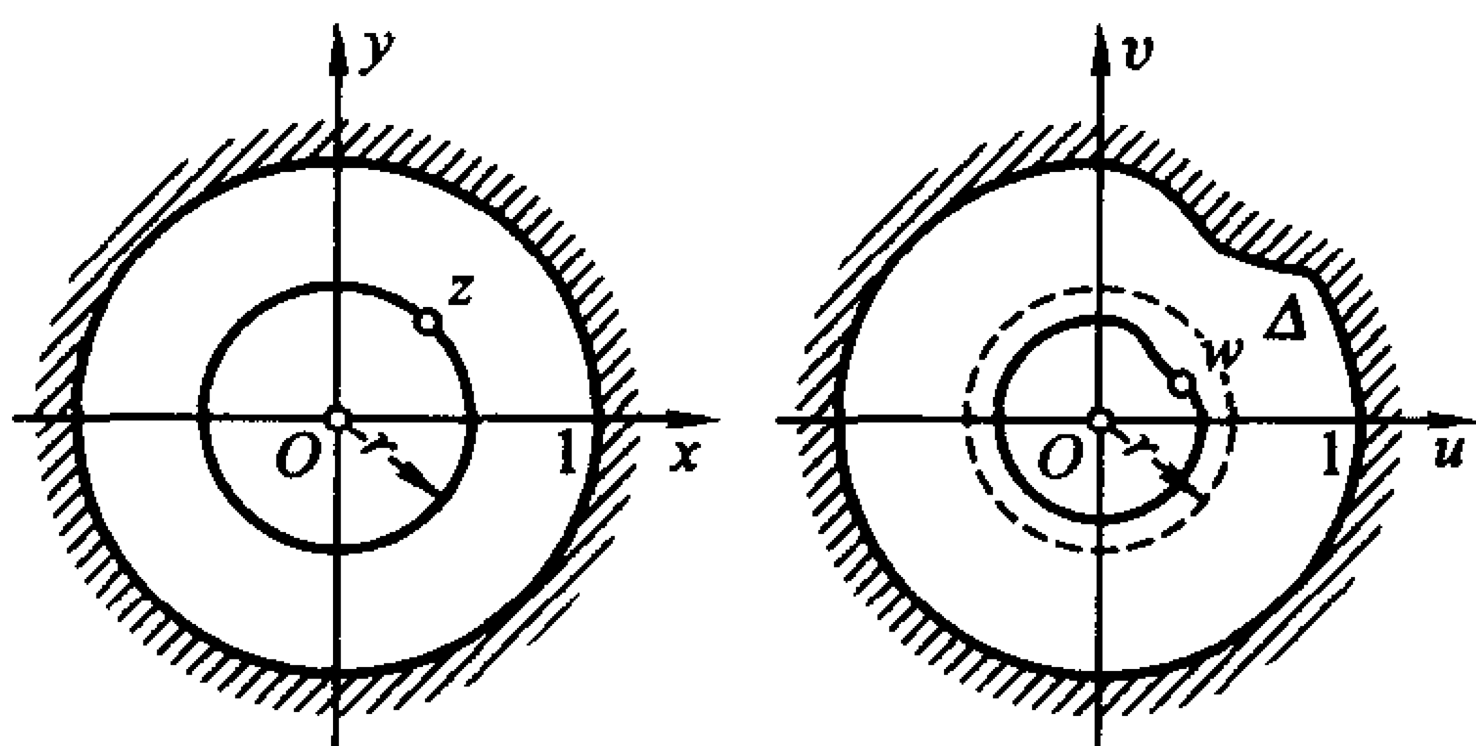


图 25

16. 一致收敛性 这一目有辅助的性质.我们在这目中将讨论一些对以后很重要的、有关解析函数的序列与级数的一致收敛性的问题.

已知函数序列 $f_1(z),f_2(z),\cdots$,如果对于任何 $\varepsilon>0$,总找得到一个只与 ε 有关的数 n_0,使得当 $n\geqslant n_0$时,对区域 D 内(或曲线 C 上)所有的点 z 来说,不等式

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon \tag{1}$$

都成立,这时这个序列就称为在区域 D 内(或在曲线 C 上)**一致收敛于**函数$f(z)$.

我们先证明两个定理,它们是与数学分析中对应的定理相类似的.

定理 1 在一个区域 D 内(或在一条曲线 C 上)一致收敛的连续函数序列 $f_1(z),f_2(z),\cdots f_n(z),\cdots$ 的极限 $f(z)$,也是一个连续函数.

任意给定一个数 $\varepsilon>0$,并把区域 D (或曲线 C)的任意一个点记作 z_0. 由于序列是一致收敛的,我们总可以找到一个数 n,使得对 D 内的(C 上的)一切 z 来说,都有

$$|f(z)-f_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

由于 $f_n(z)$ 在点 z_0 是连续的,总可以找到一个数 $\delta>0$,使得对 D 内(C 上)满足不等式 $|z-z_0|<\delta$ 的一切点 z 来说,都有

$$|f_n(z)-f_n(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

对于这样的点 z 与前面所选定的那个数 n 来说,由不等式(2)与(3)我们便有

$$\begin{aligned}|f(z)-f(z_0)|&\leqslant|f(z)-f_n(z)|+|f_n(z)-f_n(z_0)|+|f_n(z_0)-f(z_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

而这就表示了 $f(z)$ 是连续的.

定理 2 如果连续函数序列 $f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z),\cdots$ 在曲线 C 上一致收敛于函数 $f(z)$,那么极限关系式

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz=\int_C \lim_{n\to\infty}f_n(z)dz \tag{4}$$

也必成立.

给定一个数 $\varepsilon>0$,由于序列是一致收敛的,我们总可以找到这样的一个 n_0,使得对于所有的 $n\geqslant n_0$ 与曲线 C 上所有的点 z,都有

$$|f_n(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{l},$$

其中 l 是曲线 C 的长度. 对于这样的 n,我们有

$$\left|\int_C f(z)dz-\int_C f_n(z)dz\right|=\left|\int_C\{f(z)-f_n(z)\}dz\right|<\frac{\varepsilon}{l}\cdot l=\varepsilon,$$

这就表示了关系式(4)是正确的.

刚才所证明的这个定理,使得在一致收敛的函数序列的情形中,可以在积分号下取极限.

同一致收敛的序列这概念紧密地关联着的,是一致收敛的级数这个概念. 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 的部分和的序列 $s_0(z)=f_0(z),s_1(z)=f_0(z)+f_1(z),\cdots,s_n(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots+f_n(z),\cdots$ 在区域 D 内(或在曲线 C 上)一致收敛,那么级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 就称为是在这个区域 D 内(或这条曲线 C 上)**一致收敛的**.

像在数学分析中那样,我们来证明函数项级数一致收敛的一个充分条件,这个条

件是便于应用的.

定理 3 如果函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 D 内被某一个收敛的常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 所控制,即,在 D 内的任何一个点处都有

$$|f_n(z)| \leqslant a_n \quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{5}$$

那么所给的这个函数项级数必在 D 内一致收敛.

事实上,根据熟知的比较定理,所给级数在 D 的任何一点 z 处都收敛.我们把它的和记作 $s(z)$.对于任何一个 n 来说,由条件(5),这级数的余项 $r_n(z)=s(z)-s_n(z)$ 都满足不等式

$$|r_n(z)| \leqslant |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \cdots \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots. \tag{6}$$

这里右边是收敛的常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的余项 r_n,当 $n \to \infty$ 时趋于 0.因此,对于任意一个 $\varepsilon > 0$,我们总可以找到一个只与 ε 有关的数 n_0,使得从 n_0 起就都有 $r_n < \varepsilon$,于是根据不等式(6),对于 D 内的任何 z 与任何 $n \geqslant n_0$,不等式

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$$

成立.这就表示了,所给级数是一致收敛的.

由定理 1 与定理 2 可以推知,一致收敛的连续函数项级数的和,是一个连续函数,并且这样的级数可以逐项地来求积分,即,极限关系式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)\,dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,dz \tag{7}$$

是正确的.

关于函数项级数是否可以逐项地来求导数的问题,我们将在第 19 目中讨论(魏尔斯特拉斯定理).

现在我们来讨论依赖于参数 α(实数或复数)的函数族 $f(z,\alpha)$.如果对于任何 $\varepsilon > 0$,总可以找到一个 $\delta = \delta(\varepsilon)$,使得当 $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ 时,对于区域 D 内(或曲线 C 上)所有的 z,不等式

$$|f(z,\alpha) - f(z)| < \varepsilon \tag{8}$$

成立,那么我们就说,当 $\alpha \to \alpha_0$ 时,$f(z,\alpha)$ 在区域 D 内(或在曲线 C 上)**关于 z 一致地趋近于函数 $f(z)$**.

完全同对序列的情形一样,可以证明:一致收敛的连续函数族的极限是一个连续函数,并且对于这样的函数族来说,极限关系式

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_C f(z,\alpha)\,dz = \int_C \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(z,\alpha)\,dz \tag{9}$$

也必成立.

在以后我们将需要涉及沿着无限曲线的积分——反常积分,在那时我们将总是

只考虑这样的一些曲线 C，即它们在任何一个圆内的曲线段都是逐段光滑的. 给定在 C 上的那些函数 $f(z)$，我们将假定是逐段连续并且是有界的.

现在我们来定义函数 $f(z)$ 沿着一条无限曲线 C 的积分. 先设 C 仅在一端是无限的，a 是它的端点. 我们把以 a 为端点而其长度等于 l 的 C 之一部分记作 C_l，于是作为定义，令

$$\int_C f(z)dz = \lim_{l\to\infty}\int_{C_l} f(z)dz, \tag{10}$$

而且，如果这个极限存在，我们就说(反常)积分(10)收敛. 如果曲线 C 在两端都是无限的，那么我们就用任意一个点 a 把 C 分成两个部分，并定义沿着 C 的积分为沿着这两个部分的积分的和.

设函数 $f(z,\zeta)$ 对于区域 D 内所有的点 z 以及对于曲线 C 上所有的点 ζ 都有定义. 如果对于任何 $\varepsilon>0$，总能够找到一个数 l_0，使得当 $l>l_0$ 时，对于 D 内所有的点 z 都有

$$\left|\int_C f(z,\zeta)d\zeta - \int_{C_l} f(z,\zeta)d\zeta\right| < \varepsilon \tag{11}$$

(我们假设，C 只有在一端是无限的；可以像在上面那样，把它推广到一般的情形中去)，我们就说，积分

$$F(z) = \int_C f(z,\zeta)d\zeta$$

在区域 D 内**一致收敛**.

定理 4 如果函数 $f(z,\zeta)$ 对于单连通区域 D 内所有的点 z 与对于曲线 C 上所有的点 ζ 来说，依照 z 是解析的，依照 ζ 是逐段连续的，又积分

$$F(z) = \int_C f(z,\zeta)d\zeta \tag{12}$$

在区域 D 内一致收敛，那么 $F(z)$ 是一个在这区域内的解析函数*.

为了证明定理 4，我们要利用柯西定理的逆定理. 按照那个定理，如果函数 $F(z)$ 在单连通区域 D 内是连续的，并且它的沿着任何一条属于这个区域的闭周线的积分，都等于 0，那么它在这个区域 D 内一定也是解析的(这定理的证明见下一目).

由所要证明的定理的假设条件中，可以用通常的方式(如同定理 2 或关系式(9)那样)来证明函数 $F(z)$ 在 D 内是连续的. 余下还要证明，$F(z)$ 沿着属于区域 D 的任何一条闭周线 Γ 的积分都等于 0，我们有

$$\int_\Gamma F(z)dz = \int_\Gamma\left\{\int_C f(z,\zeta)d\zeta\right\}dz. \tag{13}$$

---

* 比较第 19 目中的定理 1.

由于积分(12)是一致收敛的,根据数学分析中已知的定理*,可以在(13)式的右端中交换求积分的次序,于是我们得到

$$\int_{\Gamma} F(z)dz = \int_{C} \left\{ \int_{\Gamma} f(z, \zeta) dz \right\} d\zeta = 0,$$

因为里面的那个积分按照柯西定理是等于 0 的. 于是定理 4 得证.

注意,在有界曲线 C 的情形,要使函数 $F(z)$ 在 D 内是解析的,并不需要任何关于积分(12)的收敛性的补充假设——这可从没有补充假设下在关系式(13)中交换求积分的次序的可能性得出.

17. 高阶导数 按照定义,解析函数——这是在某一个区域 D 内的每一个点处都具有导数的复变函数(见第 5 目). 我们来证明,由函数的解析性,便可以自动地得出,它的所有的各阶导数也都存在并且是解析的.

定理 1(柯西,1842) 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内是解析的,在 $\bar{D}$ 上是连续的,那么它在 D 内的每一个点处都具有所有各阶的导数,并且其第 n 阶导数可以用公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \tag{1}$$

来表示,其中 C 是区域 D 的边界.

设 z 是区域 D 的任意一个内点. 根据导数的定义,并且对于点 z 与 $z+h$ 应用第 14 目中的柯西公式,我们有:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{C} f(\zeta) \left\{ \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right\} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \to 0} \int_{C} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}.$$

但是,当 $h \to 0$ 时,显然函数 $\frac{1}{\zeta - z - h}$ 对于 C 上所有的点 ζ 来说都是一致地趋于 $\frac{1}{\zeta - z}$ 的,所以根据上一目中的定理 2(对依赖参数 h 的函数族的情形),这极限存在,并且

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{2}$$

对于 $n = 1$,定理已经证明了. 假设这定理对于一个正整数 $n - 1$ 来说是正确的,那么就可以用完全同样的方式来证明它对于 n 来说也是正确的. 这样就完整地证明了这个定理.

注 1 从证明中可以看出,还可用下述的形式来表述这个定理:如果函数 $\varphi(\zeta)$ 在区域 D 的边界 C 上是连续的,那么用柯西公式来表达的函数

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \tag{3}$$

在这区域 D 内是解析的.

---

* 见 Фихтенгольц,第二卷,第 733 页. 在那里所说的是关于实变量的定积分的,但是在引进参变量及分开积分(13)式的实数部分与虚数部分之后,就可以化成这样的积分.

注 2 把柯西公式从形式上对 z 微分，也可得到导数公式(1)；所证明的定理肯定了这样的微分过程是合法的.

由公式(1)可以导出重要的柯西不等式.把函数 $f(z)$的模在区域 D 内的最大值记作M,从点 z 到D 的边界的距离记作R,把这边界 C 的长度记作l,由(1)我们有

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{n!\ Ml}{2\pi R^{n+1}}. \tag{4}$$

特别,如果 $f(z)$在圆$|z - z_0| < R$ 内是解析的,那么,取这个圆作为 D,我们得到

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{Mn!}{R^n}, n = 0,1,2,\cdots \tag{5}$$

这就是我们所要证明的柯西不等式.

我们利用所得到的结果来证明解析函数论中的两个重要定理：

定理 2(J. 刘维尔(J. Liouville)*) 如果函数 $f(z)$有界,并且在整个平面内都是解析的,那么它必是一个常数.

设在平面内处处都有$|f(z)| \leqslant M$.对于平面上的任意一个点 z 与任何R 来说,不等式(5)在 $n=1$ 的情形下给出

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

由于这里的左端与 R 无关,而右端当 R 增大时可以变成随便怎样小,所以$|f'(z)| = 0$.由此可见,在整个平面上 $f'(z) \equiv 0$.从此,根据第 12 目定理 4 得出

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} f'(z)dz \equiv 0,$$

亦即函数 $f(z)$是常数.定理得证.

注 定理容许如下的拓广.

如果函数 $f(z)$在整个平面上解析,并且它的模增长不比 $M|z|^n$快,其中 n 为整数,M 为常数,那么这函数是幂次不高于 n 的多项式**.

证明与前面相类似.设 z_0是平面的一个任意点,由不等式(5)我们有

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leqslant \frac{M|z|^n}{R^{n+1}}(n+1)!,$$

注意到$|z| \leqslant |z_0| + R$,当 $R \to \infty$时过渡到极限后我们得到 $f^{(n+1)}(z_0) = 0$.因为 z_0是平面上任意一点,所以 $f^{(n+1)}(z) \equiv 0$,由此用上面同样的方法不难得出所需要的结果.

下一定理是第 12 目中柯西基本定理的逆定理.

定理 3(莫莱拉(Morera)***,1886 年) 如果函数 $f(z)$在一个单连通区域 D 内是连续的,并且积分$\int_C f(z)dz$ 沿着任何一条位于D 内的闭周线C 都等于 0,那么

---

* 这定理是柯西(1844)首先证明的,但是在法国数学家刘维尔(1809—1882)的著作中实际上已经被使用过了.

** 特别,当 $n=0$ 时我们得到定理 2.

*** G. 莫莱拉,意大利数学家(1856—1909).

$f(z)$在这个区域 D 内是解析的.

从定理的条件可以推知,在区域 D 内积分 $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ 与积分的路线无关,这就是说,当固定点 z_0时,这个积分便确定了 z 的某一个函数:

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz.$$

逐字重复第 12 目中定理 2 的证明,我们就看到,这个函数具有导数 $F'(z)=f(z)$,即,它是解析的(在所引用的定理中,我们只用到函数 $f(z)$的连续性及积分与积分路线无关的性质).但此时按照本目中的定理 1,函数 $f(z)$作为一个解析函数的导数,它本身也是个解析函数.莫莱拉定理被证明了.

§5　用级数表示解析函数

在本节中我们将讨论关于利用幂级数及其推广——$z-a$ 的正次幂与负次幂的级数——来表示解析函数的问题.把函数展开成级数,不仅有理论意义,而且也有实用意义.例如,我们将指出,利用级数可以计算函数的近似值,在许多带实用性质的问题(解微分方程等)中,它们的解可以立刻用级数的形式来得到,等等.

在这里我们只讨论关于函数展开成级数的基本理论命题,其中大部分都将在以后叙述复变函数理论及其应用时,起着极重要的作用(特别是见于第五章及其后面的那几章).特别,我们将要证明下面三个概念是等价的:这就是把 §2 中的意义下的解析函数看成是在定义区域内每一点都是可微的函数,以及把解析函数看成是在定义区域的每一点的邻域内都可以被表示成幂级数的和的形状的函数(见第 18 目中的泰勒定理及第 19 目中的定理 3)——这又给出了建立解析函数论中的一种观念.在第 25 目中,我们把解析性的概念推广到多值函数上去后,使得这个概念更拓广了.

18. 泰勒级数　我们首先把数学分析中已知的泰勒公式拓广到复变函数上,然后在此基础上来证明,每一个在一个点处解析的函数,都可以在这个点的邻域内被表示成幂级数的和的形状.

利用等比级数前 $n+1$ 项的和的公式

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^n,$$

把它改写成

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q} \tag{1}$$

的形状(这公式对于复数 q 来说也是正确的).在函数 $f(z)$的解析区域 D 内固定某一点a,并利用公式(1)写成

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=$$

$$\frac{1}{\zeta-a}\left\{1+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)+\cdots+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n+\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}\left(\frac{z-a}{\zeta-z}\right)^{n+1}\right\}.$$

现在把这等式的两端各乘以$\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$,并且沿着某一条位于 D 内包含点 z 及 a 的闭周线 C,按 ζ 求这等式的积分.利用第 14 目中的柯西公式与第 17 目中的高阶导数的公式,我们便得出经典的**泰勒公式**.

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+R_n, \tag{2}$$

其中余项的形状是

$$R_n=\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-a)^{n+1}}. \tag{3}$$

问题在于,要在怎样的条件下,方能使得当 $n\to\infty$ 时有 $R_n\to 0$;或者,完全一样,要在怎样的条件下函数 $f(z)$ 方可以用它的以点 a 为中心的泰勒级数*来表示,即,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \tag{4}$$

下述定理给出了这个问题的答案:

定理(A.柯西,1831 年) 函数 $f(z)$ 在任何一个以点 a 为中心的开圆内,只要 $f(z)$ 在这个圆内是解析的,就都可以用它的泰勒级数(4)来表示.在每一个属于这圆的闭区域上,泰勒级数一致收敛.

函数 $f(z)$ 在其中是解析的那个圆(以点 a 为圆心),它的半径记作 R,并考虑任意一个数 R',$0<R'<R$ 以及圆 $|z-a|\leqslant kR'$,其中 $k<1$ 是任意一个正数.设 z 是最后那个圆上的任何一个点,而 C 是圆周 $|\zeta-a|=R'$.我们有 $|z-a|\leqslant kR'$,$|\zeta-a|=R'$.因此,

$$|\zeta-z|\geqslant|\zeta-a|-|z-a|\geqslant R'-kR'=(1-k)R',$$

所以由公式(3)便得出

$$|R_n|=\left|\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-a)^{n+1}}\right|$$
$$\leqslant\frac{k^{n+1}R'^{n+1}}{2\pi}\cdot\frac{M\cdot 2\pi R'}{R'^{n+2}(1-k)}=\frac{Mk^{n+1}}{1-k},$$

其中 M 是 $f(z)$ 的模在圆 $|z-a|\leqslant R'$ 内的最大值(函数 $f(z)$ 在这个圆内是解析的,因而是有界的).因为 $k<1$,由此可见,当 $n\to\infty$ 时,$R_n\to 0$,并且对 R_n 的估值与 z 无关.所以,在任何圆 $|z-a|<kR'$ 内(其中 $0<k<1$),泰勒级数都一致收敛.

由于任意一个位于使函数 $f(z)$ 是解析的那个圆内的闭区域,总可以被完全放入某一个圆 $|z-a|<kR'$ 内,其中 $0<k<1$,$0<R'<R$,所以在这样的区域上级数也一

* 对(实数 z)这种形状的展开式最早出现在 B.泰勒(1685—1731)1715 年发表的文章中,但是仅在 1742 年麦克劳林(Maclaurin,1698—1746)才系统地用它.

致收敛.定理证明完毕.

因此,任何一个在某一个圆内解析的函数,都可以在这圆内用幂级数来表示.在这里发生了一个问题:反过来,是不是任意一个收敛的幂级数的和,都是一个解析函数呢? 要回答这个问题,必须先讨论幂级数的某些性质.这个我们放到下一目中去做,而现在则列举一些初等函数的泰勒展开式:

$$\left.\begin{array}{l} e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots, \\ \sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots,\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots, \\ \operatorname{sh} z=z+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots,\operatorname{ch} z=1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots \end{array}\right\} \tag{5}$$

(对于任何 z 来说都收敛);

$$\left.\begin{array}{l} \ln(1+z)=z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\cdots, \\ (1+z)^a=1+az+\dfrac{a(a-1)}{2!}z^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3+\cdots^{*} \end{array}\right\} \tag{6}$$

(对于 $|z|<1$ 收敛;这些展开式一望而知是为那些单值分支的,它们在 $z=0$ 时分别等于 0 和 1).获得这些展开式的方法,也同在通常数学分析中的方法完全一样,对这些我们不多说了.

19. 幂级数 我们先从两个与由解析函数组成的一致收敛级数有关的普遍定理开始,这些定理最早由 K.魏尔斯特拉斯于 1859 年证明的.第一个定理指明,一致收敛的极限保持了解析性性质.

定理 1 *设 $f_0(z),f_1(z),\cdots,f_n(z),\cdots$ 是定义在单连通区域 D 内的解析函数序列,假如级数*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

在这区域 D 内一致收敛,那么级数和在 D 内也是一个解析函数.

事实上,根据第 16 目,级数(1)的和 $s(z)$在 D 内连续.设 C 是位于D 内的任何一条闭周线;由于级数(1)的一致收敛性可以沿着 C 对它进行逐项积分,并且得到

$$\int_C s(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)dz=0,$$

因为根据第 12 目中的柯西定理,解析函数 $f_n(z)$沿着单连通区域内一条闭周线的积分等于 0.现在按照第 17 目中的莫莱拉定理我们能够确信,函数 $s(z)$在区域 D 内是解析函数,定理得证.

---

* 在这公式中 a 为任意一个复数.在自然数 $a=n$ 的特殊情况,级数终止在第 n 项,从而在整个平面内是收敛的.

第二个定理表明，对于解析函数，有关级数的逐项微分的可能性问题，解决起来比通常数学分析要简单些：

定理 2 由在区域 D 中解析和在 $\bar{D}$ 中连续的函数组成的任意级数(1)，在 $\bar{D}$ 中一致收敛，那么可以在 D 中逐项微分任何次数.

设 ζ 是区域 D 的边界线 C 上任意一点，而 z 是该区域的任意一个内点. 因为当固定 z 时，差 $\zeta - z$ 的模有下界为一个正数，所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}$ (其中 k 为任意自然数)关于 ζ 在 C 上是一致收敛的. 因此，可以沿着 C 对它施行逐项积分，这就意味着，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(k)}(z) \tag{2}$$

(对级数的每一项，我们使用了第 17 目中的柯西求导公式). 留下要证明的是，级数(2)的和是级数(1)的和 $s(z)$ 的 k 阶导数. 但是根据一致收敛性，可以把公式(2)的左边部分写成如下形状

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta=\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{s(z)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta=s^{(k)}(z),$$

(我们再次使用同一个柯西公式)，这就是所需要的.

注 1 为了证明闭区间 $\bar{D}$ 中解析函数构成的级数的一致收敛性，只要求它在这区域边界上一致收敛就足够了. 这直接由第 15 目中的最大值原理推出，按照这一原理

$$\max_{(D)}|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots|=\max_{(C)}|f_{n+1}(\zeta)+f_{n+2}(\zeta)+\cdots|.$$

注 2 简单的例子说明，定理 2 可以确认的只是在区域 D 内由导数组成的级数的收敛性，而不是在 $\bar{D}$ 内. 事实上，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 显然在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 上是一致收敛的，因为它在闭圆上受一个收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 控制. 但是导数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$ (按照定理 2 在 $|z|<1$ 时是收敛的)在圆的边界点 $z=1$ 上是发散的.

在今后幂级数将起着基本的作用. 下述这个定理阐明了它的收敛性的特征：

定理 3(N. 阿贝尔(N. Abel)*，1826 年) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在点 z_0 处收敛，那么它在满足不等式 $|z-a|<|z_0-a|$ 的任何点 z 处也必收敛，并且在任何一个圆 $|z-a|\leqslant k|z_0-a|$ $(0<k<1)$ 内，这级数都是一致收敛的.

我们假定 z 是圆 $|z-a|\leqslant k|z_0-a|$ 内的任意一个点，并把级数的第 n 项表示成

$$c_n(z-a)^n=c_n(z_0-a)^n\cdot\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n$$

---

* N. 阿贝尔(1802—1829)，挪威数学家.

的形状.由于级数在点 z_0处收敛,它的一般项趋于零,所以它在这个点处是有界的,即,对于一切 n 都有$|c_n(z_0-a)^n|\leqslant M$.除此之外,根据所给条件我们有$\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|\leqslant k$.因此,对于一切 n 都有

$$|c_n(z-a)^n|\leqslant Mk^n, 0<k<1. \tag{3}$$

由此便得出级数在圆$|z-a|\leqslant k|z_0-a|$内是一致收敛的.由于数 k 可以取得随意地与 1 接近,这样就证明了级数在圆$|z-a|<|z_0-a|$内的任何一个点处都是收敛的,阿贝尔定理的证明于是便完成了.

从阿贝尔定理可以导出:幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛区域是一个以点 a 为圆心的开圆(它也可能退化成一个点,或者充满整个平面),或许还有在这个圆的边界上的某一些点.这个圆的半径,叫做这幂级数的**收敛半径**.

我们来指出一个确定收敛半径 R 的公式:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}, \tag{4}$$

其中$\overline{\lim}$表示上极限*,这个公式是 A.柯西在 1821 年所得到的,到 J.阿达马(J. Hadamard)才主要地加以使用(已经在 20 世纪里了).它被称做柯西-阿达马公式.

要导出这个公式,必须证明:对于满足$|z-a|\leqslant kR$ $(0<k<1)$的任何 z,幂级数都收敛;而对于满足$|z-a|>R$ 的任何z,这级数都发散.根据上极限的定义,对于任何 $\varepsilon>0$,总可以找到这样的一个 n_0,使得从 n_0起都有$\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{1}{R}+\varepsilon$.我们选取 ε 使得$\frac{1}{R}+\varepsilon<\frac{1}{R\cdot\frac{k+1}{2}}$,于是当 $n\geqslant n_0$并且$|z-a|\leqslant kR$ 时,我们就有

$$|c_n(z-a)^n|<\frac{k^nR^n}{R^n\left(\frac{k+1}{2}\right)^n}=\left(\frac{2k}{k+1}\right)^n.$$

由于$\frac{2k}{k+1}<1$,所以根据熟知的比较定理,由上式左端的那些项所组成的级数,是收敛的.

并且,从上极限的定义我们有:对于任何 $\varepsilon>0$,我们总可以找到无穷序列 $n=n_k$,使得对这些n_k来说都有$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}>\frac{1}{R}-\varepsilon$,即,

$$|c_{n_k}(z-a)^{n_k}|>\left\{\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)(z-a)\right\}^{n_k}.$$

但是,当$|z-a|>R$ 时,总可以选取 ε 使得有$\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)|z-a|>1$,所以就对应于 ε 的那些无穷序列 $n=n_k$来说,项 $c_{n_k}(z-a)^{n_k}$ 的模将无限制地增大,因之,级数是发散的(它的一般项不趋于 0).

魏尔斯特拉斯定理与阿贝尔定理对上一目末所提出的那个问题给予了肯定的回答:

---

* 见 Фихтенгольц,第 1 卷.

定理 4 任何一个幂级数的和,在它的收敛圆内都是一个解析函数.

事实上,设$|z-a|<R$是我们的幂级数的收敛圆.在任何一个圆$|z-a|\leqslant kR$内(其中$0<k<1$),根据阿贝尔定理,级数都一致收敛.而由于级数的项$c_n(z-a)^n$都是解析函数,所以根据魏尔斯特拉斯定理,它的和在这个圆内也必然是解析的.但是因为在收敛圆内的任何一个内点z,都可以被放在某一个圆$|z-a|\leqslant kR$,$0<k<1$的内部,所以这样就证明了:级数的和在它的整个收敛圆内都是解析的.

最后,我们证明下述定理是成立的:

定理 5 任何幂级数都是它的和的泰勒级数.

事实上,设在某一个圆内有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n. \tag{5}$$

这时令$z=a$,我们得到$f(a)=c_0$.对级数(5)进行逐项微分,然后令$z=a$,我们得到$f'(a)=c_1$.继续逐次对级数(5)微分并且在每微分一次之后都令$z=a$,我们便得到

$$f''(a)=2c_2,\quad f'''(a)=3!\,c_3,\cdots,f^{(n)}(a)=n!\,c_n,\cdots.$$

因此,

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \tag{6}$$

所以级数(5)其实就是函数$f(z)$的泰勒级数.

定理 5 叫做展开成泰勒级数的展开式的唯一性定理,因为由它便可以得出:不论用任何方式把解析函数$f(z)$展开成幂级数,其所得到的展开式,总是这个函数的泰勒展开式.

此外,由这一定理和第 18 目中的定理可以得出,幂级数(5)的收敛半径与从圆心a到该级数的和的解析性被破坏的最近点的距离相同.例如第 18 目中级数(6)的收敛半径等于 1,因为在$z=-1$时它们的和失去解析性(当然,我们只对a不是自然数来讨论第二个级数).

20. 唯一性定理 在第 14 目中我们已经知道,一个解析函数可以由它在解析区域的边界上的值来完全确定.作为这个定理的补充,在这里我们要证明:一个解析函数,可以由它在任一点列上的一组值来完全确定,只需这点列向其解析区域的某一个内点收敛.

我们先从与解析函数的零点有关的一个定理开始.设有任何一个点$z=a$,函数$f(z)$在其上取 0 值,$f(a)=0$,这个点就叫做函数$f(z)$的**零点**.如果一个解析函数在它的零点a的邻域内不恒等于 0,那么在它的以点a为中心的泰勒级数中,不可能全部的系数都等于 0(不然的话,级数的和就要恒等于 0 了).这个展开式中那些异于 0 的系数的标号最小的那一个,叫做零点a的**阶数**.因此,在n阶零点的邻域内,函数的泰勒展开式的形状是

$$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots, \tag{1}$$

其中 $c_n \neq 0, n \geqslant 1$.

显然,零点 a 的阶数,也可以这样来定义:它就是最低阶的异于 0 的导数 $f^{(n)}(a)$ 的阶数.

显然也可以知道,在 n 阶零点的邻域内,解析函数 $f(z)$ 可以表示成

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z) \tag{2}$$

的形状,其中函数

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots, \varphi(a) = c_n \neq 0 \tag{3}$$

在点 a 的邻域内也是解析的(因为它可以用收敛的幂级数来表示).

由于 $\varphi(z)$ 是连续的,所以它必在点 a 的某一个邻域内处处异于 0. 由此便有

定理 1 设函数 $f(z)$ 在它的零点 a 的邻域内是解析的,并且在点 a 的任何一个邻域内,都不恒等于 0. 那么就必有点 a 的一个邻域存在,在这邻域内函数 $f(z)$ 除 a 以外没有别的零点.

从这个已证明的定理中,就可以导出我们在本目开始时已经说起过的那个解析函数的唯一性定理.

定理 2 如果函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在区域 D 内都是解析的,并且在向区域 D 的一个内点 a 收敛的某一点列 a_n 上,这两个函数的值相同,那么在区域 D 内必定处处都有

$$f_1(z) \equiv f_2(z).$$

为了证明这个定理,我们考虑函数

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

这函数在区域 D 内是解析的,并且那些点 a_n 都是它的零点. 由此可见, $f(z)$ 必定在点 a 的某一个邻域内恒等于 0,因为假如不然的话,就要同刚才所证明的定理 1 相冲突了. 因此,函数 $f(z)$ 的全体零点的集合,至少具有一个内点.

我们把函数 $f(z)$ 的零点集合的所有内点的总和记作 $\mathscr{E}$. 如果 $\mathscr{E}$ 与 D 相合,那么我们的定理便已被证明了,而如果 $\mathscr{E}$ 仅是区域 D 的一个部分集合的话,那么我们总可以找到集合 $\mathscr{E}$ 的一个边界点 b,使它同时又是 D 的内点. 因此,集合 $\mathscr{E}$ 中存在收敛于点 b 的序列 b_n,并且由于 $f(z)$ 在点 b 处是连续的,我们有 $f(b) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0$, 即,点 b 是 $f(z)$ 的零点. 另一方面, $f(z)$ 在点 b 的任何一个邻域内都不能恒等于 0, 因为不然的话 b 就是集合 $\mathscr{E}$ 的内点,而不是一个边界点了. 由此,根据定理 1 便可得出,在点 b 的某一个邻域内没有 $f(z)$ 的任何一个别的零点,但这就与 b 是集合 $\mathscr{E}$ 的边界点这一事实相矛盾. 所得到的矛盾情形,证明了唯一性定理是正确的.

从唯一性定理可以得出:在某一个区域 D 内解析而且不恒等于 0 的一个函数 $f(z)$,既不可能在区域 D 的任何一个子区域内都取 0 值,也不可能在任何一段位于 D 内的弧上都取 0 值,甚至于也不可能在 D 内一个向它的某一内点收敛的点列上都取 0 值.

但是，很容易举出这样的例子，函数的零点的无穷序列可以向函数的解析区域的一个边界点收敛：函数 $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ 在由点 $z_n=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 所构成的那个无穷点列上都取 0 值，而这点列是向点 $z=0$ 收敛的.

21. 洛朗级数 泰勒级数是一种工具，很便于用来表示在圆形区域内解析的函数.但是，还需要有一种工具，可以用来表示在别种形状区域内解析的函数，这也是非常重要的.例如，当研究在点 a 的某一个邻域内，除了点 a 本身以外处处解析的函数时，就需要来考虑具有 $0<|z-a|<R$ 形状的环形区域.事实上是，对于那些在环形区域 $r<|z-a|<R$ 内(其中 $r\geqslant0, R\leqslant\infty$)解析的函数来说，可以建立按照 $(z-a)$ 的正次幂与负次幂而展开的式子，它的形状为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

这是泰勒展开式的拓广.在本目中我们就要来讨论这样的展开式.

设函数 $f(z)$ 在某一个环形 $K: r<|z-a|<R$ 内(其中 $r\geqslant0, R\leqslant\infty$)是解析的.我们任意选取两个数 r' 与 R'，使 $r<r'<R'<R$，以及一个数 k，$0<k<1$，然后来考虑环形 $\frac{r'}{k}<|z-a|<kR'$.在这个环形的任意一个内点 z 处，我们可以把 $f(z)$ 照柯西公式(第 14 目)来表示，这公式在现在的情形下的形状是

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{2}$$

其中的那两个圆周 $C:|\zeta-a|=R'$ 与 $c:|\zeta-a|=r'$ 都是按逆时针方向通过的.

对于第一个积分，我们有 $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<\frac{kR'}{R'}=k<1$，所以，在这积分中的分式，可以展开成一个在 C 上关于 ζ 一致收敛的等比级数：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\frac{1}{\zeta-a}+\frac{z-a}{(\zeta-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}+\cdots.$$

这个展开式乘以 $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$，然后再逐项对 ζ 求积分(由于级数一致收敛，这样做是可以的)，我们便得出了一个把(2)式中的第一项展开成幂级数：

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{3}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{4}$$

要注意，我们不能把表达式(4)像在第 18 目中那样地表示成 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ 的形状，因为，一般说来，$f(z)$ 在点 a 处不是解析的.

对于(2)中的第二个积分,我们有

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|\leqslant\frac{kr'}{r'}=k<1,$$

因此,级数

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=-\frac{1}{z-a}-\frac{\zeta-a}{(z-a)^2}-\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3}-\cdots-\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}-\cdots$$

在 c 上一致收敛.

同前面一样,我们可得出一个把(2)式中的第二项展开成幂级数,但现在是按照 $(z-a)$ 的负次幂来展开的:

$$f_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n},\tag{5}$$

其中

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{6}$$

我们在公式(5)与(6)中,用历经整数值 $-1,-2,\cdots$ 的 n 取代历经整数值 $1,2,\cdots$ 的 $-n$,因此,把两个展开式(3)与(5)合并成一个,我们便得到

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n.\tag{7}$$

并且,根据第 13 目,在公式(4)与(6)中的那两个圆周 C 与 c,都可以用任何一个圆周 $\gamma:|z-a|=\rho$ (其中 $r'<\rho<R'$)来代替.所以这两个公式也可以合并成一个:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{8}$$

在这里所得到的函数 $f(z)$ 的按照 $z-a$ 的正次幂与负次幂的展开式具有依公式(8)所规定的系数,这个展开式(7)就叫做函数 $f(z)$ 的以点 a 为中心的**洛朗展开式**;级数(3)叫做这展开式的**正则部分**,级数(5)叫做它的**主要部分**.

因为在我们的讨论中,r' 与 R' 可以取得随意地接近 r 与 R,而 k 与 1 的相差也可以随意地小,所以对于函数 $f(z)$ 在其中解析的那环形内所有的点 z,展开式(7)可以认为已经建立.

根据阿贝尔定理,洛朗级数的正则部分在圆 $|z-a|<R$ 内处处收敛,并且在任何一个圆 $|z-a|<kR$ $(0<k<1)$ 内,它都是一致收敛的.主要部分代表一个关于变量 $Z=\dfrac{1}{z-a}$ 的幂级数,因此,根据同一定理,当 $|Z|<1/r$ 时它收敛,亦即它在圆 $|z-a|>r$ 的外面处处收敛,并且当 $|z-a|>\dfrac{r}{k}$ $(0<k<1)$ 时,它也是一致收敛的.

这样,我们便已经证明了:

定理 1（洛朗(P. Laurent)，* 1843 年） 在一个使函数 $f(z)$ 解析的任何环形 K：$r<|z-a|<R$ 内，这个函数 $f(z)$ 可以用它的洛朗级数(7)来表示，这级数在属于环 K 的任何闭区域内都是一致收敛的.

完全同在第 17 目中一样，从洛朗级数的系数公式(8)，可以导出下述**柯西不等式**：如果函数 $f(z)$ 在圆周 $|z-a|=\rho$ 上是有界的，设 $|f(z)|\leqslant M$，那么便有

$$|c_n|<\frac{M}{\rho^n}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{9}$$

最后，我们要注意，任意一个形如

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

的级数的收敛区域，总是某一个圆环** $r<|z-a|<R$，其中 $0\leqslant r\leqslant\infty, 0\leqslant R\leqslant\infty$. 这很容易用阿贝尔定理来证实，只要把级数分成正则部分与主要部分就是了. 对于 $r<R$ 的情形来说，下述定理成立.

定理 2 如果级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n\tag{10}$$

在环形 $r<|z-a|<R$ 内收敛，那么它的和 $f(z)$ 在这个环形内必是解析的，并且展开式(10)是函数 $f(z)$ 的洛朗级数.

实际上，$f(z)$ 是一个解析函数这事实，可以像上一目的定理 4 那样，根据阿贝尔定理与魏尔斯特拉斯定理来证明. 并且，在任何一个圆周 γ：$|z-a|=\rho$（其中 $r<\rho<R$）上，级数(10)都一致收敛，而且在乘以 $(z-a)^{-n-1}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 之后仍保持这性质. 如果把展开式

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^{k-n-1}$$

沿着圆周 γ 求积分，并利用那个对于任何整数 n 都容易证明的关系式

$$\int_\gamma(z-a)^n dz=\begin{cases}0, & n\neq-1,\\ 2\pi i, & n=-1\end{cases}\tag{11}$$

（参看第 13 目中对公式(4)的证明），那么我们便得出级数(10)的系数的表达式：

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},$$

它与表达式(8)相符合. 因此，级数(10)是函数 $f(z)$ 的洛朗级数，于是定理 2 得证.

定理 2 是展成洛朗级数的展开式的唯一性定理，因为由这定理便可得出：不论用

---

* P. 洛朗(1813—1854)，法国数学家. 定理也被 K. 魏尔斯特拉斯在 1841 年得到过，但是他只是在 1894 年发表了自己的结果. 形如(7)的级数还在 L. 欧拉(1748 年)的文章中见到过.

** 这圆环在 $r\geqslant R$ 时，可以是一个空集，而在 $r=R$ 的情形中，收敛集合可能是任何一个在圆周 $|z-a|=r$ 上的集合.

任何方式把一个解析函数展开成按照 $z-a$ 的正次幂与负次幂排列的级数，其所求得的展开式是这个函数的洛朗展开式.

22. 奇点 在上一目中所发展的洛朗展开式这一工具，使我们能够在所谓孤立奇点的邻域内完整地研究一个解析函数的性状，这种孤立奇点是这些函数的解析性被破坏的点中最简单的一种类型. 如果有点 a 的一个邻域 $0<|z-a|<R$（点 a 本身不在内）存在，函数 $f(z)$ 在这个邻域内是解析的，那么点 a 就叫做是函数 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**. 我们要着重指出，所讲的是关于那些使函数在其邻域内是单值的点（函数是单值的这一条件，包括在函数是解析的条件中，见第 5 目）. 关于多值性的奇点，我们将在第 25 目中讨论.

孤立奇点，依照函数 $f(z)$ 在它们的邻域中的性状，可以区分成三种类型：

(1) 如果有一个有限的极限 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在，则点 a 就叫做**可去奇点**.

(2) 如果当 z 趋于 a 时函数 $f(z)$ 是无穷大，即，如果存在着

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty$$

（这表示了，当 $z\to a$ 时，$|f(z)|\to\infty$），则点 a 就叫做**极点**.

(3) 如果 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在，则点 a 就叫做**本性奇点**.

我们来陈述函数有关它们的奇点的一些基本性质. 如果点 a 是函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，那么根据上一目中的定理 1，这个函数在它的解析环形 $0<|z-a|<R$ 内可以展开成洛朗级数：

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots. \quad (1)$$

这个展开式依奇点的特性而有不同的形式. 我们来举三个与此有关的定理.

定理 1 *为了点 a 是函数 $f(z)$ 的一个可去奇点，其充分必要条件是，$f(z)$ 在点 a 的邻域内的洛朗展开式中不含有主要部分.*

显然，如果 $f(z)$ 的洛朗展开式中不含有主要部分，即，如果 $f(z)$ 是可用幂级数

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots \quad (2)$$

来表示的，那么有限的 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=c_0$ 存在*，所以 a 是一个可去奇点.

反过来讲，设点 a 是函数 $f(z)$ 的一个可去奇点. 那么，由于 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在并且是有限的，因此函数 $f(z)$ 在 a 的邻域内是有界的，设 $|f(z)|\leqslant M$.

我们利用第 21 目中的柯西不等式

$$|c_n|<M\rho^{-n}.$$

因为其中的数 ρ 可以选取得随意地小，所以显然由此便可得出，所有具有负下标的系数 c_n 都等于 0，因此，$f(z)$ 的洛朗展开式不含有主要部分. 定理于是得证.

---

* 根据第 19 目中的定理 4，(2) 式的右端在点 $z=a$ 处是解析的，因而，它是连续的，并且当 $z\to a$ 时，它的极限等于级数在点 a 处的和，即，等于 c_0.

注 实际上我们已经证明了一个更强的结论：*如果函数 $f(z)$ 在一个孤立奇点 a 的邻域内是有界的，那么点 a 必定是这函数的一个可去奇点.*

现在已经很明显，“可去奇点”这个名称被证实是恰当的，因为只要令 $f(a)=\lim\limits_{z\to a}f(z)=c_0$，就可以把这样的奇点“去掉”. 而且这样做了以后，函数 $f(z)$ 在点 a 处将是解析的了，因为那时在整个圆 $|z-a|<R$ 内它都可以用幂级数(2)来表示(见第19目中的定理4).

现在我们转到极点的情形上来. 由极点 a 的定义可以推知，在它的某一个邻域 $0<|z-a|<R'$ (其中 $R'\leqslant R$)内，函数 $f(z)$ 是异于0的. 在这样的邻域内，函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 是解析的，对于这个函数来说，显然 $\lim\limits_{z\to a}g(z)=0$. 因此，根据上面的定理，点 a 是函数 $g(z)$ 的一个可去奇点，而且在令 $g(a)=0$ 后，我们便得出，点 a 是函数 $g(z)$ 的一个零点. 反过来讲，如果函数 $g(z)$ 在点 a 处等于0 (而不是恒等于0)，那么根据第20目中的定理1，函数 $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 在 a 的某一个邻域 $0<|z-a|<R$ 内是解析的. 显然，点 a 是函数 $f(z)$ 的一个极点.

因此，解析函数的零点与极点是十分自然地互相关联着的. 我们并且规定把函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点 a 的阶数，称做是函数 $f(z)$ 的**极点 a 的阶数**.

定理2 *要点 a 是函数 $f(z)$ 的一个极点，其充分必要条件是，$f(z)$ 在点 a 的邻域内的洛朗展开式的主要部分，只含有限多个项：*

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k. \tag{3}$$

这时，展开式中最先的那个负次幂项的下标数，其数值等于极点的阶数.

设点 a 是函数 $f(z)$ 的一个 n 阶极点. 于是函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，$g(a)=0$ 在点 a 处有一个 n 阶的零点，并且，根据第20目，在点 a 的一个邻域内它可以表示成

$$g(z)=(z-a)^n\varphi(z)$$

的形状，其中 $\varphi(z)$ 是一个解析函数，并且 $\varphi(a)\neq0$. 在这个邻域内

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^n}\frac{1}{\varphi(z)}. \tag{4}$$

但是函数 $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在点 a 的某一个邻域 $|z-a|<R$ 内是解析的，因此，它在那个邻域内可以展开成泰勒级数：

$$\frac{1}{\varphi(z)}=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+\cdots+c_0(z-a)^n+\cdots,$$

其中 $c_{-n}=\dfrac{1}{\varphi(a)}\neq0$. 把这个展开式代到(4)式中去，我们便得出所求的展开式(3)，它是在点 a 的邻域 $0<|z-a|<R$ 内成立的.

现在反过来,设展开式(3)在点 a 的某一个邻域 $0<|z-a|<R$ 内成立,并且 $c_{-n}\neq 0$. 于是函数 $\varphi(z)=(z-a)^n f(z)$, $\varphi(a)=c_{-n}$ 在圆 $|z-a|<R$ 内便可以用泰勒级数

$$\varphi(z)=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+\cdots \tag{5}$$

来表示,这就是说,$\varphi(z)$ 是解析的. 由于 $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=c_{-n}\neq 0$,所以

$$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}=\infty,$$

于是点 a 是 $f(z)$ 的一个极点. 函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z-a)^n}{\varphi(z)}$ 显然在点 a 处有一个 n 阶零点,因此,极点 a 的阶数等于 n. 定理于是得证.

从所证明的这两个定理可以直接得出

定理 3 当在点 a 的一个邻域内函数 $f(z)$ 的洛朗展开式的主要部分含有无限多个项时,而且也只有当这时,点 a 才是函数 $f(z)$ 的一个本性奇点.

下述定理说明函数在一个本性奇点的邻域内的性状:

定理 4(Ю. В. 索霍茨基*, 1868 年) 如果点 a 是函数 $f(z)$ 的一个本性奇点,那么对于任何一个复数 A,总有一点列 $z_k\to a$ 存在,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=A$.

首先,一定存在着一个点列 $z_k\to a$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=\infty$,因为假如不然的话,$f(z)$ 在点 a 的某一个邻域内是有界的,而点 a 就将是 $f(z)$ 的一个可去奇点了(见定理 1 后的注). 现在设已给定一个任意复数 A. 在下述的两种情形之中必定有一种成立:1) 在点 a 的任何一个邻域内都可以找到一个点 z,在这个点处有 $f(z)=A$,——这时索霍茨基定理便已经证明,因为这样的点构成一个序列 $z_k\to a$,在序列的所有点处都有 $f(z_k)=A$;2) 在点 a 的某一个邻域内函数 $f(z)$ 不取 A 值.

在第二种情形中,函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$ 在所说的那个邻域内是解析的. 点 a 既不可能是函数 $g(z)$ 的极点,也不可能是它的可去奇点,因为假如 a 是函数 $g(z)$ 的极点或可去奇点,就要存在着有限的或无限的极限 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\lim\limits_{z\to a}\left(A+\dfrac{1}{g(z)}\right)$ 了. 因此,点 a 必是函数 $g(z)$ 的一个本性奇点. 根据刚才所证明的,一定有一个点列 $z_k\to a$ 存在,使 $\lim\limits_{k\to\infty}g(z_k)=\infty$. 对于这点列来说,显然有

$$\lim_{k\to\infty}f(z_k)=\lim_{k\to\infty}\left(A+\frac{1}{g(z_k)}\right)=A,$$

于是证明了索霍茨基定理.

---

* 这个定理通常认为是属于魏尔斯特拉斯的,但是它在俄罗斯数学家尤利安·瓦西里耶维奇·索霍茨基(Юлиан Васильевич Сохоцкий, 1842—1929)的学位论文中已经被证明,并且在魏尔斯特拉斯的论文出现之前八年,就已经发表了. 与索霍茨基同时意大利数学家卡索拉基(F. Kasorati)也得到了这一定理.

索霍茨基定理同这一目中前面的那几个定理,使我们能够断定:在一个孤立奇点的邻域内,解析函数或者趋于一个确定的(有限的或无限的)极限,或者是完全不确定的,即,可以(循着不同的点列)趋于任意一个预先给定的极限.任何中间情形都是不可能的.

我们来举几个初等函数的例子,它们具有不同类型的奇点:

例1 函数$\frac{\sin z}{z}$,$\frac{1-e^z}{z}$,$\frac{1-\cos z}{z^2}$在坐标原点处都有一个可去奇点.要证实这个,最简单的办法是利用第18目中大家所熟知的泰勒展开式(5),与本目中的定理1.例如,在任何$z\neq 0$的情形下我们总有

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots,$$

所以点$z=0$是函数$\frac{\sin z}{z}$的一个可去奇点.

例2 函数$f(z)=\frac{1}{e^{z^2}+1}$有无限多个极点,就是点$z=\pm\sqrt{\pi(2k+1)i}$,$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$,在这些点处分母变成0(这些点排列在坐标轴的那两条等分角线上).所有这些极点都是一阶极点,因为函数$\frac{1}{f(z)}=e^{z^2}+1$在这些点处都有一阶零点(其导数$2ze^{z^2}$在这些点处不等于0).

例3 函数$e^{\frac{1}{z}}$,$\sin\frac{1}{z}$,$\cos\frac{1}{z}$在坐标原点处都有本性奇点.要证实这个,最简单的做法是,在第18目的泰勒展开式(5)中用$\frac{1}{z}$来代替z.然后再利用本目中的定理3(例如,在任何$z\neq 0$的情形下,我们都有

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots).$$

我们举这三个函数中的第一个作为例子,来检验索霍茨基定理的正确性.对于$A=\infty$,可以取点$z_k=\frac{1}{k}$,$k=1,2,3,\cdots$来作为这定理中的点列z_k,因为,显然我们有$\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=\lim\limits_{k\to\infty}e^k=\infty$;对于$A=0$,可以取$z_k=-\frac{1}{k}$,$k=1,2,3,\cdots$,因为在那时就有$\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=\lim\limits_{k\to\infty}e^{-k}=0$;最后,对于一个有限数$A\neq 0$,我们可以取$z_k=\frac{1}{\ln A+2k\pi i}$,$k=1,2,3,\cdots$,于是$\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=\lim\limits_{k\to\infty}e^{\ln A+2k\pi i}=A$(记号ln表示对数的某一个值).

例4 函数$f(z)=\frac{1}{e^{\frac{1}{z^2}}+1}$在坐标原点处有一个非孤立的奇点,因为坐标原点是这个函数的极点$z_k=\pm\frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)i}}$的聚点(参看例2).

根据奇点的特征,可以区分出下述简单的两类单值解析函数:

(1) 整函数 如果函数$f(z)$完全没有奇点*,那么$f(z)$就叫做是一个**整函数**,

* 在这里和随后的定义中谈到平面的有限点,在主要内容中不强调这一点,因为无穷远点的概念我们将在后面的第24目中引入.

或**全纯函数**.根据第 18 目的泰勒定理,可以断定,任何一个整函数都可以用一个在整个平面内收敛的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 来表示(而且,反过来,每一个可以用一个处处收敛的幂级数来表示的函数,也都是一个整函数).所有的多项式,指数函数,$\sin z$,$\cos z$ 等,都是整函数的例子.显然,整函数的和,差与积,都仍然是整函数.

(2) 分式函数 如果函数 $f(z)$除了极点以外没有别的奇点,那么 $f(z)$就叫做一个**分式函数,或亚纯函数**.从这个定义可以得出:在任何有界区域内,一个亚纯函数只可能有有限多个极点.事实上,假如在一个有界区域内它可以有无限多个极点的话,那么就必定存在着这些极点的向某一个点 a 收敛的序列,这个点 a 就是一个非孤立奇点,而不是一个极点了.但在整个平面上,极点便可以有无限多个.所有整函数,有理函数,三角函数等,都是亚纯函数的例子.显然,两个亚纯函数的和,差,积与商,以及一般地说,亚纯函数的任何有理函数 $R(f_1, f_2, \cdots, f_n)$,都仍然是亚纯函数.

关于整函数与亚纯函数的详细讨论,见第五章.

23. 留数定理.辐角原理 在这里我们要介绍一个对以后的应用极端重要的概念——函数的留数这概念*,并证明一些与其有关的一般性的定理.留数的计算的例子,与其各种应用,我们将放在后面来讨论(主要是在第五章与第六章中).

设点 a 是函数 $f(z)$的一个孤立奇点,γ 是以点 a 为圆心的沿正方向行进的某一个足够小的圆周 $|z-a|=\rho$,则数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz \tag{1}$$

叫做 $f(z)$在奇点 a 处的**留数**,记作 $\operatorname{res} f(a)$.根据第 13 目我们知道,当 ρ 足够小时,留数的值与 ρ 的值无关.

从第 21 目中的洛朗级数的系数公式(8),$n=-1$ 时可以直接导出:

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz = c_{-1}, \tag{2}$$

即,函数 $f(z)$在一个奇点 a 处的留数,等于 $f(z)$在点 a 的邻域内的洛朗展开式中 -1 次幂项的系数.

由此便得出,在可去奇点处函数的留数总等于 0.在 n 阶极点处的留数,容易由下述公式来求得:

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}. \tag{3}$$

要得出这个公式,我们只需把洛朗展开式

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+\cdots$$

* 留数的概念是 A. 柯西在"Mémoire sur les intégrales définies"(1814)中引进的.在他自己的"数学习题"("Exercices de mathématiques")(1826—1829)中,他还给出了这个概念在数学分析上的许多应用.柯西在他自己的著作中指出,他发展欧拉的思想,而得出了留数的概念.

乘以$(z-a)^n$，把所得到的等式微分 $n-1$ 次，然后再当 $z\to a$ 时取极限就可以了（不可能直接把 $z=a$ 代入导数中去，因为 a 是$f(z)$的一个奇点）.

对于一阶极点，公式(3)有着特别简单的形式：

$$\operatorname{res} f(a)=\lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}. \tag{4}$$

如果在点 a 的邻域内，函数 $f(z)$被规定为两个在点 a 处解析的函数的商：

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

并且 $\varphi(a)\neq 0$，而 $\psi(z)$在点 a 处有一阶零点（即 $\psi(a)=0$，而 $\psi'(a)\neq 0$），那么公式(4)就可以用下面这一公式来代替：

$$\operatorname{res} f(a)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(z)}{\psi'(a)}. \tag{5}$$

例 亚纯函数 $\cot z^2$在点 $z=\pm\sqrt{\pm k\pi}$ $(k=1,2,3,\cdots)$处有一阶极点，在点 $z=0$ 处有二阶极点（要证实这个，最简单的办法是考虑函数 $\tan z^2$的零点）. 按照公式(3)，在点 $z=0$ 处的留数等于

$$\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z^2\cot z^2)=\lim_{z\to 0}\frac{z\sin 2z^2-2z^3}{\sin^2 z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{-\dfrac{4}{3}z^7+\cdots}{z^4-\cdots}=0^*$$

（这也可以从下述事实来看出：$\cot z^2$的以点 $z=0$ 为中心的洛朗展开式，只能够含有 z 的偶次幂）. 按照公式(5)，取 $\varphi(z)=\cos z^2$，$\psi(z)=\sin z^2$，得出在点 $z=\pm\sqrt{\pm k\pi}$处的留数等于

$$\frac{\cos z^2}{2z\cos z^2}=\frac{1}{2z}=\pm\frac{1}{2\sqrt{\pm k\pi}}.$$

留数理论的应用，主要是以下面这个重要的留数定理为基础的：

定理 1（A. 柯西，1825 年） 设函数 $f(z)$在区域 D 的边界C上连续**，在这区域的内部，除了有限多个奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 处外，处处都解析. 那么，如果 C 按正方向绕行，则有

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(a_k). \tag{6}$$

这定理的证明，可以从多阶连通区域的柯西定理（第 13 目）得出. 我们把每一个奇点 a_k都包括在一个小圆周 $\gamma_k:|z-a_k|=\rho_k$内，并且把 ρ_k取得足够小，使所有这些小圆周都全部位于区域 D 内，而且彼此不相交（图 26）. 由于函数 $f(z)$在由曲线 C与全体小圆周 γ_k所围成的那个区域D^*内是解析的，在 $\bar{D}^*$ 上是连续的，所以根据所

* 我们把分子与分母都用它们在点 $z=0$ 的邻域内的泰勒展开式中的前几项来代替.

** 在这里以及在以后，我们说"$f(z)$在一个区域的边界上连续"，总理解为是"沿着这区域连续"的意思，即，其意义是说：在边界上的任何一个点 z_0处，都有极限

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

存在，这时 $z\to z_0$是沿着区域 D 的点来趋近的. 如果 C 有重点，例如两岸割痕，那么条件可以减弱，只要求从割痕的每一边上 $z\to z_0$时 $f(z)$的极限值存在（并且从一边和从另一边的极限不一定要相等）.

引用的定理，

$$\int_C f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0,$$

其中所有的 γ_k^- 都是按照顺时针的方向来行进的.我们把绕行这些圆周 γ_k 的方向完全改变,并利用留数的定义(1),按照这定义有

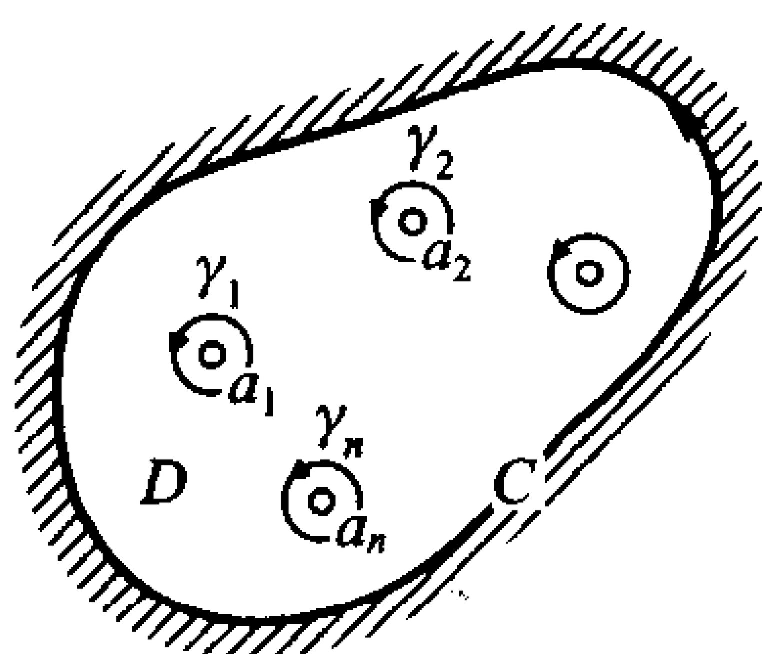


图 26

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res} f(a_k),$$

于是便得到了所需的结果(6).

留数定理的根本重要性在于:它使得我们可以把对一个"整体范围内"的量——如沿着一条闭周线的有限量的积分——的计算,化成对一些"在小范围内"的量、微分的量——如留数就是这样的一些量——的计算.实际上,留数是利用沿无限小周线的积分,或者甚至于是利用简单的取极限方式(公式(3),(4)与(5))来计算的.把对一个"整体范围内"的量的计算化成对一些微分的量的计算这个方法,在数学分析中是很普通的(参看利用原函数来求积分的计算,原函数是根据已知的导数来确定的).关于留数理论的应用,我们将专门在第五章中讲述.

我们还要谈一谈对数留数的概念.所谓一个解析函数 $f(z)$ 在点 a 处的**对数留数**,是指 $f(z)$ 的对数导数

$$\{\ln f(z)\}' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

的留数.

显然,说起对数留数,不仅在 $f(z)$ 的奇点处有意义,而且在 $f(z)$ 的零点处也是有意义的.如果点 a 是 $f(z)$ 的一个 n 阶零点,那么在点 a 的邻域内

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots, c_n \neq 0,$$

因此,

$$f'(z) = nc_n(z-a)^{n-1} + (n+1)c_{n+1}(z-a)^n + \cdots,$$

而对数的导数

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{nc_n + (n+1)c_{n+1}(z-a) + \cdots}{c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots}.$$

等式右端的第二个因子在点 a 处是解析函数,因为 $c_n \neq 0$,所以它可以展开成具有中心 a 的泰勒级数(级数中与 $z-a$ 无关的那项等于 n),于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a}\{n + d_0(z-a) + d_1(z-a)^2 + \cdots\}$$

$$= \frac{n}{z-a} + d_0 + d_1(z-a) + \cdots. \tag{7}$$

这样,我们便已得出了对数的导数 $\{\ln f(z)\}'$ 在点 $z=a$ 的邻域内的洛朗展开

式,从这展开式中可以看出,点 a 是它的一阶极点,其留数等于 n.

现在设点 a 是 $f(z)$ 的一个 n 阶极点. 因为函数 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 在点 a 处有一个 n 阶零点,并且由于 $\{\ln f(z)\}'=-\{\ln g(z)\}'$,所以按照刚才所证明的,就对数的导数 $\{\ln f(z)\}'$ 来说,点 a 是一个一阶极点,其留数为 $-n$. 因此,证明了下列定理.

定理 2 在函数 $f(z)$ 的零点与极点处,它的对数的导数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 都有一个一阶极点,并且在函数的零点处,其对数留数的值等于这个零点的阶数,在极点处其对数留数的值等于极点的阶数的负数.

定理 2 与留数定理给我们应用对数留数来计算解析函数在给定区域内的零点与极点的个数的可能性.

设函数 $f(z)$ 在有界区域 D 的内部,除了在有限多个阶数分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 的极点 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 处以外,是处处解析的,在这个区域的边界 C 上是连续的,并且在 C 上不等于 0;再假设 $f'(z)$ 在 C 上连续. 那么函数 $f(z)$ 在 D 内就只可能有有限多个零点,因为假如不然的话,就要存在着向区域 D 的一个内点或边界点收敛的、由零点构成的无穷序列了,但是这序列既不可能向一个内点收敛(根据第 20 目中的唯一性定理),也不可能向一个边界点收敛(因为 $f(z)$ 在 C 上是连续的并且 $f(z)\neq 0$). 我们把 $f(z)$ 在区域 D 内的零点记作 $a_1, a_2, \cdots, a_l$,而把它们的重数分别记作 $n_1, n_2, \cdots, n_l$. 把留数定理与定理 2 应用到 $f(z)$ 的对数的导数上我们便得到:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=(n_1+n_2+\cdots+n_l)-(p_1+p_2+\cdots+p_m)=N-P, \tag{8}$$

其中 N 与 P 分别表示这函数的零点与极点的总个数,每一个零点与每一个极点都要按照它的阶数来重复计算.

我们来说明上面最后那个等式的左端的几何意义. 我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\ln|f(z)|+\frac{1}{2\pi}\int_C d\arg f(z), \tag{9}$$

其中 ln 与 arg 表示这两个函数的某一个沿着 C 连续的分支. 因为在沿闭周线 C 绕行一周时,函数 $\ln|f(z)|$ 回到它自己原先的值上,所以(9)式右端中的第一个积分等于 0. 另一方面,如果当 z 沿 C 绕行一周时,点 $w=f(z)$ 所画成的那条曲线 Γ,包含点 $w=0$ 在其内部,那么 $\arg f(z)$ 的最终值就可能与其初始值不同(图 27),于是(9)式右端中的第二项就可能不等于 0. 量

$$\frac{1}{2\pi}\int_C d\arg f(z)=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

是函数 $f(z)$ 的辐角在沿 C 绕行完整一周时的全变差除以 2π,这个值几何上表示在绕行 C 完整一周时向量 $f(z)$ 环绕原点 $w=0$ 的回转次数,或者,也就是在映射 $w=f(z)$ 下绕行 C 的像曲线 Γ 时向量 w 环绕原点 $w=0$ 的回转次数,(在图 27 上该数等于 1). 关系式(8)与(9)表达了所谓的**辐角原理**.

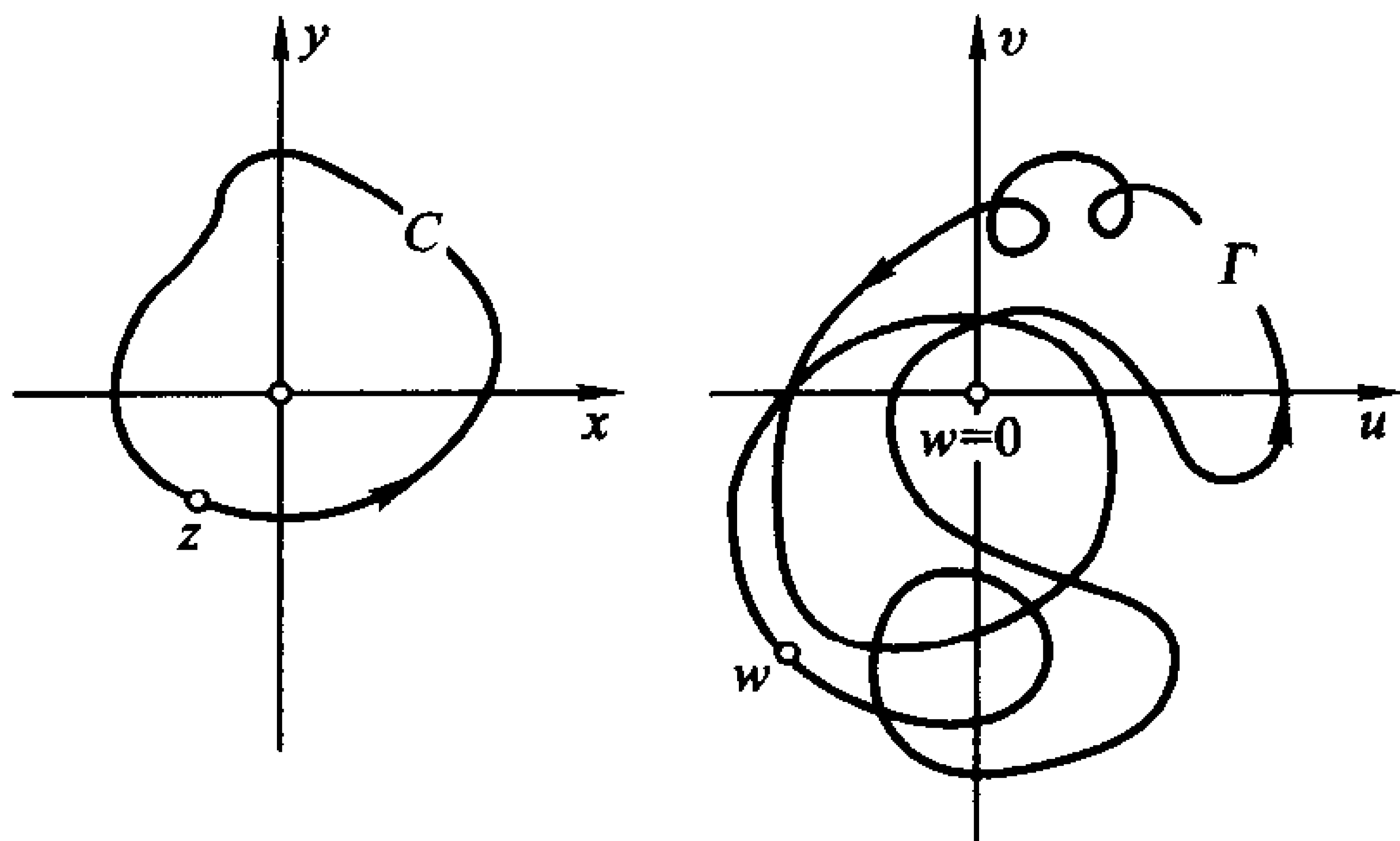


图 27

定理 3　如果函数 $f(z)$在区域 D 内除了在有很多个极点处以外是处处解析的，在这区域的边界 C 上是连续的，并且在 C 上不等于 0；再假设 $f'(z)$在 C 上连续，那么这函数在 D 内的零点的总个数与极点的总个数(每一个零点与每一个极点，都按照它是几阶而被计算几次)之间的差，等于向量 w 绕行曲线C 在映射 $w=f(z)$下的像曲线 Γ 时的回转次数，或者，完全一样，等于在区域 D 内 $f(z)$的对数留数的和：

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{10}$$

关于计算函数的零点与极点的个数的进一步结果及其重要应用，我们将在第 75 目中来陈述. 在这里我们只举出公式(8)的另外一种形式，它不仅顾及零点与极点的个数，并且还顾及它们的位置.

我们除了考虑那个满足辐角原理的条件的函数 $f(z)$之外，同时还考虑另外一个在 D 中解析并且在$\bar{D}$ 上连续的函数$\varphi(z)$. 可以是函数 $g(z)=\varphi(z)\cdot\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的奇点的，显然只有 $f(z)$的那些零点与极点，并且在每一个这种点 c 的邻域内，这函数都可以展开成如下的形状：

$$g(z)=\{\varphi(c)+\cdots\}\left\{\pm\frac{n}{z-c}+\cdots\right\}=\pm\frac{n\varphi(c)}{z-c}+\cdots$$

(见定理 2)，其中的符号"+"用于当点 c 是$f(z)$的零点时的情形，符号"−"用于当点 c 是$f(z)$的极点时的情形. 由此可见，$g(z)$在点 c 处的留数等于 $\pm\varphi(c)n$，在关系式(8)中用函数 $g(z)$来代替函数$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$，我们得到：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=n_1\varphi(a_1)+\cdots+n_l\varphi(a_l)-p_1\varphi(b_1)-\cdots-p_m\varphi(b_m). \tag{11}$$

特别，当令 $\varphi(z)\equiv z$ 时，便有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{l}n_ka_k-\sum_{k=1}^{m}p_kb_k. \tag{12}$$

这里的右端部分表示在区域 D 中函数 $f(z)$ 的所有零点的和与所有极点的和之间的差,其中的每一个零点与每一个极点都按照它的几阶而在和中被计算几次.

现在我们不考虑函数 $f(z)$,而来考虑函数 $g(z)=f(z)-a$,其中 a 是一个固定的复数.函数 $g(z)$ 的极点与 $f(z)$ 的极点相同,而它的零点则是函数 $f(z)$ 的 a 值点,即,使 $f(z)$ 在其处取值 a 的那些点.如果 $f(z)$ 在区域 D 内除了在有限多个极点处以外是处处解析的,在这个区域的边界 C 上是连续的而且不取值 a,并且 $f'(z)$ 在 C 上连续,那么公式(10)与(12)就可以应用于函数 $g(z)=f(z)-a$.于是我们便得到:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg\{f(z)-a\}=\sum_{k=1}^{l} n_k-\sum_{k=1}^{m} p_k, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz=\sum_{k=1}^{l} n_k a_k-\sum_{k=1}^{m} p_k b_k, \tag{14}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 是函数 $f(z)$ 在区域 D 内的 a 值点,它们的阶数* 分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_l$,而 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 则是 $f(z)$ 在 D 内的极点,它们的阶数分别是 $p_1,p_2,\cdots,p_m$.

24. 无穷远点 直到此时为止,我们所考虑的只是复变量平面上的那些有限点.但是在许多问题的讨论中,如果把无穷远点也引进来,将是很有用的.要引进无穷远点,最直观易懂的做法是借助于所谓的球极平面投影,就是把 z 平面投影到一个其南极与 z 平面相切的球面上去的投影.这种投影,使复平面上的每一个点 z,都同球面上的一个点 Z 成对应,这个点 Z 便是连接.点 z 与球面的北极的那条射线同球面的交点(图 28).球极平面投影在复平面同不包括北极的球面之间,建立起一种一一对应的关系.点 Z 可以看作是复数 z 的球面映像,这球面本身,就叫做**复数球面**.

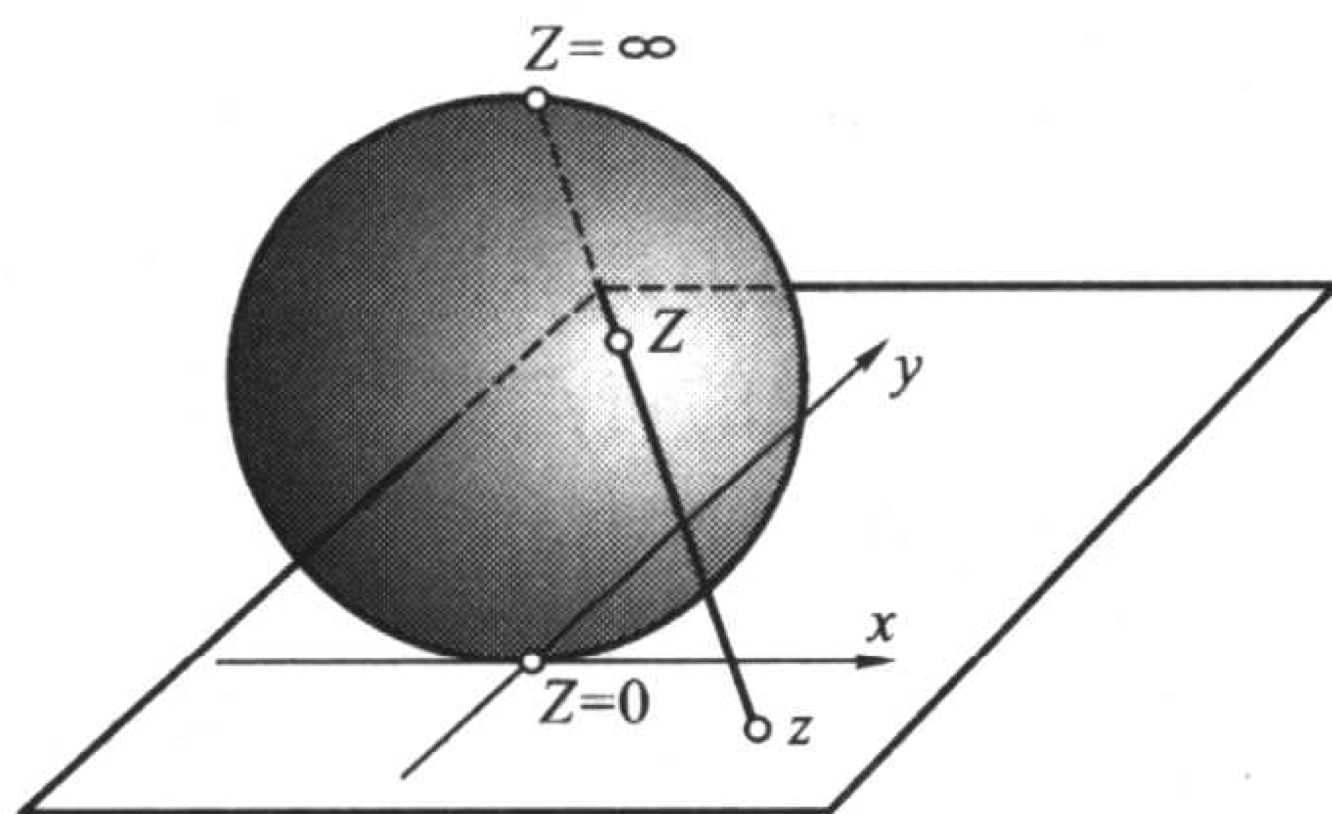


图 28

为了要把这种对应关系扩大到整个球面上来,我们引进一个假定的*无穷远点*(复数 $z=\infty$),并把它当作是同球面的北极成对应的.数 $z=\infty$ 不能像通常的复数那样来作算术运算.但是,譬如说,如果对于任何 $M>0$,总可以找到一个下标数 n_0,使得当 $n\geqslant n_0$ 时都有 $|z_n|>M$ 的话,我们就说序列 $\{z_n\}$ 向无穷远点收敛:$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$ (前

* 函数 $f(z)-a$ 的对应的零点的阶数,叫做 $f(z)$ 的 a 值点的阶数.

面在类似的情形中,我们已经这样做了).这种说法被证实是适当的,因为序列的点 z_n 的球极平面投影 Z_n 确实形成一个向球面的北极收敛的点列.

加入了无穷远点的那个复变量平面,叫做**完全的复数平面**(于是,没有这个无穷远点的复数平面,就称做是**开的**).我们已经知道,完全的复数平面是与球面对等的,凡是与无穷远点有关的那些概念的几何表示,用复数的球面映像来表示为最方便.

所谓无穷远点的**邻域**,我们是指在球面上以北极为圆心的一个圆,或者,换一种说法,是指所有那些满足不等式 $|z|>R$ 的点 z (包括无穷远点在内)的集合.在引进了这个概念之后,我们便可以讨论包含无穷远点于其内部或边界上的那些区域,即,那些无界区域.在第 3 目中谈到的关于有界区域的连通阶数的定义,可以一字不改地移用到无界区域上来(例如,点 $z=\infty$ 的邻域,包括点 $z=\infty$ 在内的,是一个单连通区域;而把点 $z=\infty$ 除外的那个邻域,则是一个二阶连通区域).

在第 5 目中曾利用邻域来定义函数的极限,这定义也可以一字不改地推广到无穷远点 z_0 与 w_0 上来.这时趋于极限 $w_0=\infty$ 的那个函数,叫做**无穷大**(参看第 22 目中极点的定义).

设函数 $f(z)$ 在无穷远点的某一个邻域内是解析的(点 $z=\infty$ 本身除外,因为到现在为止,在这个点处的解析性的概念,还是未曾定义的).第 22 目中的奇点的定义,可以不加任何改变地推广到这种函数上来:我们按照极限 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 是有限的、无穷的、或根本不存在的,而说 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的*可去奇点*、*极点*或*本性奇点*.

但是与洛朗展开式有关的奇点的类型的准则(第 22 目中的定理 1-3),这时却改变了,这可以从下面的讨论中看到.我们令

$$z=\frac{1}{\zeta}\text{及}f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi(\zeta),$$

于是函数 $\varphi(\zeta)$ 在点 $\zeta=0$ 的某一个邻域内是解析的.点 $\zeta=0$ 对于 $\varphi(\zeta)$ 来说是一个奇点,其类型与点 $z=\infty$ 对于 $f(z)$ 来说的奇点类型相同,因为 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\lim\limits_{\zeta\to0}\varphi(\zeta)$.函数 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的邻域内的洛朗展开式,显然可以从 $\varphi(\zeta)$ 在点 $\zeta=0$ 的邻域内的洛朗展开式中,用一个简单的代换 $\zeta=\dfrac{1}{z}$ 而得到.但是在这样的代换下,展开式的正则部分就改变成主要部分,而主要部分则改变成正则部分.

因此,下列定理成立.

定理 1 *当无穷远点是函数 $f(z)$ 的一个可去奇点时,$f(z)$ 在无穷远点的邻域内的洛朗展开式完全不含 z 的正次幂项;当无穷远点是一个极点时,展开式含有有限多个 z 的正次幂项;当无穷远点是一个本性奇点时,展开式含有无限多个 z 的正次幂项.*

如果 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 处有一个可去奇点,通常就说 $f(z)$ 在无穷远处是解析的,并且取 $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$.这时,显然函数 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的某一个邻域内是有界的.

设函数 $f(z)$ 在整个复数平面上是解析的.由于函数在无穷远点处是解析的,所

以它必定是在无穷远点的某一个邻域内是有界的;设当$|z|>R$时$|f(z)|<M_1$.另一方面,由于$f(z)$在闭圆$|z|\leqslant R$上是解析的(因此是连续的),推出它在这个圆上必定是有界的;设在这个圆上$|f(z)|<M_2$.于是函数$f(z)$便在整个平面上都是有界的:对于一切的z来说,我们都有$|f(z)|<M=\max(M_1,M_2)$.

因此,我们可以给予刘维尔定理(第17目)以下述的形式:

定理2 如果函数$f(z)$在整个z平面上是解析的,那么它必定是一个常数.

最后我们还要谈到在无穷远点处的留数的概念.设函数$f(z)$在点$z=\infty$的某一个邻域内是解析的(无穷远点本身或许除外),所谓函数$f(z)$在无穷远点处的留数,我们指的是

$$\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)\,dz,$$

其中γ^-是一个足够大的圆周$|z|=\rho$,并且是按照顺时针方向来通过的(这样便使得点$z=\infty$的邻域,如同有限点的情形一样,始终都保持在左边).从这个定义可以直接得出:函数在无穷远点处的留数,等于这函数在点$z=\infty$的邻域内的洛朗展开式中z^{-1}的系数的负数.

最后,容易得出

定理3 如果函数$f(z)$在整个z平面上只有有限多个奇点,那么所有它的留数,连在无穷远处的留数也包括在内,其和等于0.

事实上,设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是函数$f(z)$的有限多个奇点,γ是一个包含所有这些奇点在其内部的圆周$|z|=\rho$.根据积分的性质、留数定理以及在无穷远处的留数的定义,我们有

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)\,dz=\operatorname{res} f(a_1)+\cdots+\operatorname{res} f(a_n)+\operatorname{res} f(\infty),$$

这便是所需要证明的.

25. 解析延拓.解析函数概念的拓广 在本目中我们将讨论关于函数的解析延拓的问题,并且将要引进多值解析函数这个概念,它把第5目中的解析性概念加以推广.

设两个没有公共点的区域D_0与D_1有一段公共的边界γ(图29)并且在这两个区域内已经分别给定了两个(单值的)解析函数$f_0(z)$与$f_1(z)$.如果有一个在区域$D_0+\gamma+D_1$内解析的函数$f(z)$存在,它在D_0中的所有的点处都等于$f_0(z)$,在D_1中所有的点处都等于$f_1(z)$:

$$f(z)=\begin{cases}f_0(z), & \text{在 } D_0 \text{ 内},\\ f_1(z), & \text{在 } D_1 \text{ 内},\end{cases}\qquad(1)$$

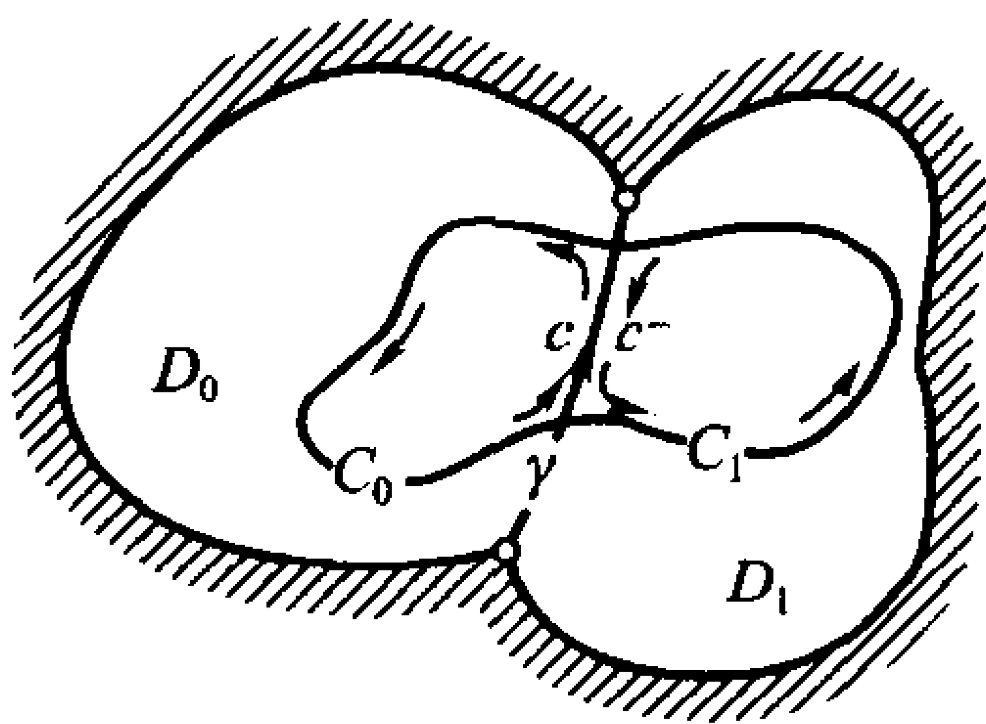


图29

那么我们就说,函数$f_1(z)$是函数$f_0(z)$向区域D_1内的直接解析延拓.根据唯一性

定理(第 20 目),在给定了的区域 D_0, D_1 和一段边界 γ,已知函数 $f_0(z)$ 的解析延拓(如果这是可能的话)是单值地确定了的.

我们引出解析延拓的一个简单的充分条件,就是所谓**连续延拓原理**:

定理 1 设已经给定了两个没有公共点的单连通区域 D_0 与 D_1,它们的边界有一段 γ 是公共的,并且在这两个区域内分别给定了两个解析函数 $f_0(z)$ 与 $f_1(z)$. 如果,除此之外,这两个函数还分别在各自区域 $D_0+\gamma$ 与 $D_1+\gamma$ 内连续,并且在曲线 γ 上所有的点处都彼此相等,那么函数 $f_1(z)$ 是函数 $f_0(z)$ 在区域 D_1 内的直接解析延拓.

这定理的证明可以根据莫莱拉定理(第 17 目)与柯西定理(第 12 目)导出. 实际上,根据我们的假设条件,函数

$$f(z)=\begin{cases} f_0(z) & \text{在 } D_0 \text{内,} \\ f_0(z)=f_1(z), & \text{在 } \gamma \text{ 上,} \\ f_1(z), & \text{在 } D_1 \text{内} \end{cases} \tag{2}$$

在区域 $D=D_0+\gamma+D_1$ 内是连续的. 我们来证明:它的沿着任何一条位于 D 内的闭周线 C 的积分都等于 0. 如果 C 全部在区域 D_0 内或全部在区域 D_1 内,那么这就是柯西定理的直接推论. 如果 C 属于 D_0 与 D_1,那么,把周线 C 在 D_0 内的部分与在 D_1 内的部分分别记作 C_0 与 C_1,把曲线 γ 在 C 的内部的那部分记作 c (见图 29),根据柯西定理(用推广后的形式,见第 12 目中的定理 5),我们便有

$$\int_{C_0+c} f(z)dz=0, \int_{C_1+c^-} f(z)dz=0.$$

把这两个等式加起来,我们得到

$$\int_{C_0+c} f(z)dz+\int_{C_1+c^-} f(z)dz=\int_C f(z)dz=0.$$

由此根据莫莱拉定理我们便可以得出结论说,函数 $f(z)$ 在区域 D 内是解析的,而这也就是说,$f_1(z)$ 是 $f_0(z)$ 的解析延拓. 定理得证.

简短地来讲,这个所证明的定理就是说:如果解析函数 $f_1(z)$ 是一个解析函数 $f_0(z)$ 经过弧 γ 的连续延拓,那么它必定也是 $f_0(z)$ 的解析延拓*.

以定理 1 为基础,我们可以把前面所引进的那个直接解析延拓的概念稍加推广. 这就是,我们假设区域 D_0 与 D_1 除了有公共的一段边界 γ 外,还可以有公共的内点(见图 30),并设在这两个区域内,像在前面一样,给定了解析函数 $f_0(z)$ 与 $f_1(z)$. 于是,如果函数 $f_0(z)$ 与 $f_1(z)$ 分别在 $D_0+\gamma$ 内与在 $D_1+\gamma$ 内是连续的,并且它们在

---

* 在实数区域中,类似的定理并不正确:如果在两个相邻的开区间 (a,b) 与 (b,c) 内分别给定了两个可微函数 $f_0(x)$ 与 $f_1(x)$,在这两个开区间的公共边界点 b 处函数 $f_0(x)$ 与 $f_1(x)$ 都连续,并且彼此相等,那么把这两个函数联合起来而得到的那个函数 $f(x)$,就可能不是在 (a,c) 内可微的——它的图形可能在 b 处有一个角点.

γ 上的值都相等,我们就说,$f_1(z)$是 $f_0(z)$经过弧 γ 的直接解析延拓.

如果 D_0与 D_1没有公共内点,那么这个定义就同旧的定义一致.如果 D_0与 D_1有公共点的话(例如,在图 30 中有公共的部分 δ'),那么依照公式(2)所定义的那个函数 $f(z)$,在 δ'的这些点处可能是双值函数,因为不论从哪里都不能推出 $f_0(z)$与 $f_1(z)$在 δ'中的点 z 处的值必须相等这个结论来.因此,解析延拓的这第二个定义,要比第一个定义更为一般.

我们还要把我们的定义再推广一些.设已经给出了这样的一串单连通区域 D_0,D_1,…,D_n,其中每两个相继的区域 D_k与D_{k+1}都有一段公共的边界 $\gamma_{k,k+1}$(图 31).并且设在每一个区域 D_k内都已经给定了一个单值的解析函数$f_k(z)$.如果对于任何一个 $k=0,1,\cdots,n-1$ 来说,函数 $f_k(z)$与 $f_{k+1}(z)$都分别在 $D_k+\gamma_{k,k+1}$内与 $D_{k+1}+\gamma_{k,k+1}$内是连续的,并且在 $\gamma_{k,k+1}$上它们的值相等,那么我们便说:$f_n(z)$是 $f_0(z)$的经过所给的那一串区域向区域 D_n内的解析延拓*.当 $n=1$ 时,我们便得到先前的那个定义.

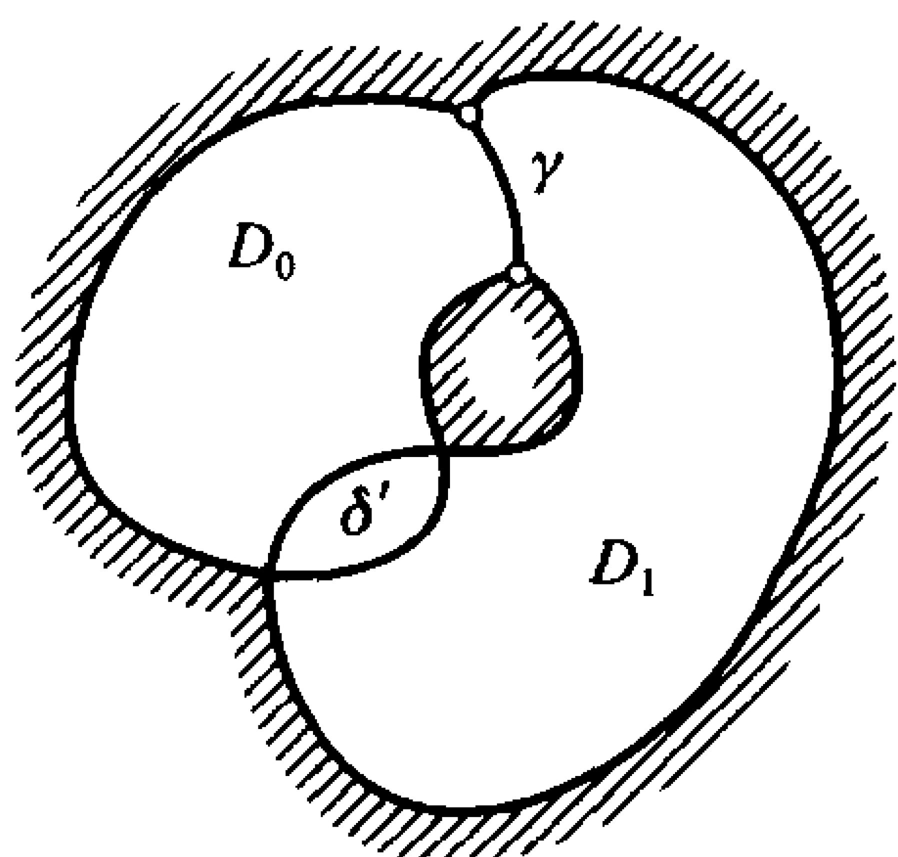


图 30

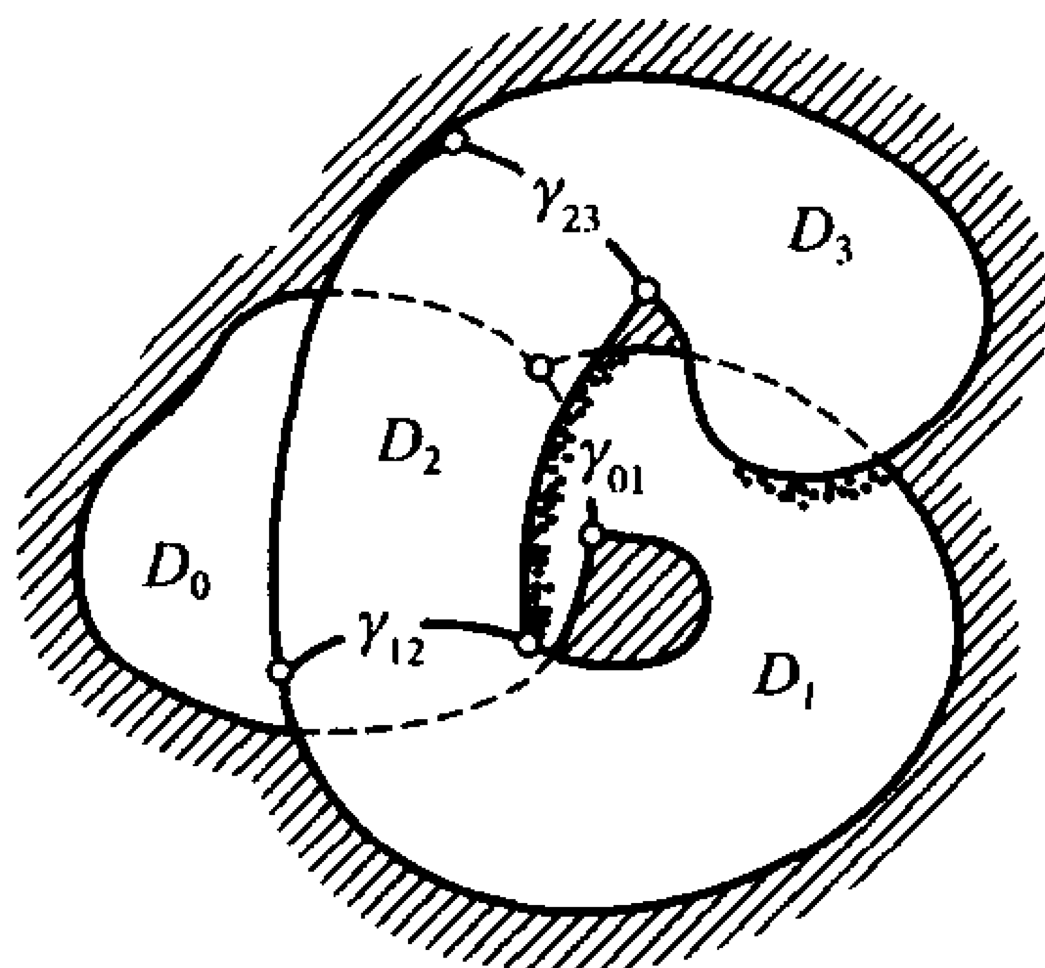


图 31

我们要注意,就是在这里,当已经是 $D_0,D_1,\cdots,D_n$与$\gamma_{01},\gamma_{12},\cdots,\gamma_{n-1,n}$都固定了时,函数 $f_0(z)$向区域 D_n内的解析延拓(如果这是可能有的话)也是单值地确定了的.而当这区域串的一个中间环节 D_k改变时,或者甚至于只要把某一段弧 $\gamma_{k,k+1}$用区域 D_k与D_{k+1}的边界的另外一段公共弧 $\tilde{\gamma}_{k,k+1}$来代替时,解析延拓的值都可能改变.

例 设 D_0与 D_1分别是环形 $1<|z|<2$ 中的上半个环 $\operatorname{Im} z>0$ 与下半个环 $\operatorname{Im} z<0$,并设$f_0(z)$是函数$\sqrt{z}$的用条件 $0<\arg z<\pi$ 来表示的那一个分支.如果取直线段$(-2,-1)$来作为γ_{01},那么 $f_0(z)$向 D_1内的解析延拓,可以完全确定为函数$\sqrt{z}$的适合条件$\pi<\arg z<2\pi$ 的那个分支(在 γ_{01}上辐角的值必须是连续地改变的).如果现在把 $f_0(z)$与区域 D_0及 D_1都保持不动,而用

* 已没有"直接的"那三个字了.

线段 $\tilde{\gamma}_{01}$:(1,2)来替代线段 γ_{01},那么 $f_0(z)$向 D_1内的解析延拓确定为$\sqrt{z}$的适合条件 $-\pi<\arg z<\pi$ 的那个分支了(现在辐角的值在 $\tilde{\gamma}_{01}$上应该是连续变化着的).这两个延拓 $f_1(z)$与 $\tilde{f}_1(z)$是不同的,例如,

$$f_1(-i)=\sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}i}}=e^{\frac{3\pi i}{4}},\tilde{f}_1(-i)=\sqrt{e^{-\frac{\pi}{2}i}}=e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

(它们只相差一个符号).因此,甚至只是连接那一串区域的弧改变时,解析延拓的值也确实可能改变.

现在设 $f_0(z)$,D_0,D_1与 γ_{01}具有上面所说的意义,我们再取区域串中的一个环节 $D_2=D_0$来看,设区域 D_2通过线段 γ_{12}:(1,2)与 D_1相连接,于是解析延拓 $f_2(z)$就被确定为函数$\sqrt{z}$的适合条件 $2\pi<\arg z<3\pi$ 的那个分支,所以在上半个圆环内的任何一个点 z 处,$f_0(z)$与 $f_2(z)$的值将是不同的(相差一个符号).我们看到,当区域 D_0与 D_k互相叠合时,在它们的公共点处,函数的值与它的解析延拓的值可能不同.

所引进的解析延拓的概念,使我们可以来导出完全解析函数(一般说来,是多值的)这个概念.

设在某一个区域 D_0内已经给定了一个单值的解析函数 $f_0(z)$.可能会发生这样的情形:$f_0(z)$不论经过 D_0的边界 C 的怎样一段弧,都是不可延拓的.例如,设 D_0是圆$|z|<1$,又

$$f_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^{2^k}. \tag{3}$$

函数 $f_0(z)$在点 $z=1$ 处有一个奇点;因为对于实数 $z=x$,容易看出$\lim\limits_{x\to1}f_0(x)=\infty$.事实上,$\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{k=1}^{n}x^{2^k}=n$,所以,对于任何一个 n,总可以找到一个 $\delta>0$,使得在 $x>1-\delta$时有 $\sum\limits_{k=1}^{n}x^{2^k}>n-1$,而意味着,就更加有 $f_0(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{2^k}>n-1$.从而我们有

$$f_0(z)=z^2+\sum_{k=1}^{\infty}(z^2)^{2^k}=z^2+f_0(z^2),$$

由此可见,在点 $z=\sqrt{1}$处(即 $z=\pm1$ 处)也有奇点.类似地,对于任何一个自然数 n 来说,我们都有:

$$f_0(z)=z^2+z^4+\cdots+z^{2^n}+f_0(z^{2^n}),$$

因此,在那些点 $z=\sqrt[2^n]{1}$处,这些点位于圆$|z|=1$ 内接正 2^n多边形的顶点上,函数 $f_0(z)$也有奇点.这样,函数 $f_0(z)$的奇点的集合在圆周$|z|=1$ 上处处稠密,所以 $f_0(z)$确实是不论经过这圆周的怎样一段弧都是不可延拓的.

在这样的情形下,我们就说周线 C 是*函数 $f_0(z)$的自然边界*,并且把 D_0称做是这个函数的*存在区域*,而这个函数本身,则称为是*完全解析函数*.

现在设 $f_0(z)$是可以向 D_0的边界外面延拓的.我们考虑它沿各种可能的区域串的各种解析延拓.把所有的这些解析延拓的值当作一个函数 $f(z)$的值来看.这样的

一个函数我们把它叫做**完全解析函数**,而组成它的那些单值解析函数(函数 $f_0(z)$ 的那些解析延拓),则称做是它的**分支**. 把用来实施解析延拓的那些区域串中所有的区域,以及用来连接这些区域的所有的弧,连接起来所得到的那个区域 D,称做是 $f(z)$ 的**存在区域**.

函数 $f(z)$ 也可以不在整个的存在区域内,而只在它的一个部分内来讨论;那时我们就把 $f(z)$ 只称做**解析函数**. 解析函数的这种定义,是第 5 目中的定义的推广,因为它显然也包括了多值函数的情形在内. 在以后,说起解析函数,我们就理解为在这个较普遍意义下的解析性. 而如果需要着重指出所讲的是在第 5 目中的意义下的解析性时,我们就要说单值的解析函数.

我们用函数奇点的描述来结束解析函数一般概念的叙述,在这些点上函数的解析性被破坏了. 不要想像,这些点是某种例外的、不正常的,从而对应用没有多大好处的东西. 相反,奇点在研究解析函数时表现出最大的好处,直截了当地说,奇点中具有有关函数的全部重要信息. 读者将在学习例如第五章时就会更好地评价这一断言的正确性,并且将会看到奇点,可以这样说:在"作功"中. 暂时我们只建议读者记起,根据刘维尔定理(第 24 目中的表述)除常数以外所有解析函数都有奇点,同时也请回忆起本书的许多地方,那里在研究奇点的基础上作出了有关函数性质的重要结论(第 23 目的定理,第 19 目末的注等等). 我们转向精确定义.

如果在函数 $f(z)$ 的存在区域内或它的边界上的一个点 a 处,至少有 $f(z)$ 的一个分支不是解析的,我们就称点 a 是函数 $f(z)$ 的一个**奇点** *.

如在第 22 目中一样,我们只限于讨论最简单类型的奇点——所谓的孤立奇点. 如果存在这样的一个邻域 $0<|z-a|<R$,使得 $f(z)$ 沿着在这邻域内的任何一串区域,都是可以延拓的,则点 a 称为函数 $f(z)$ 的**孤立奇点**.

我们来考虑由区域 $D_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 所构成的区域串,其中每一个 D_k 都是环形 $0<|z-a|<R$,但沿着某一条半径,例如 $\arg(z-a)=0$,被割去了的. 设 $f_0(z)$ 是 $f(z)$ 的一个分支,它在某一个具有割痕 γ_0 的环形 D_0 内是单值的解析函数,如果在割痕 γ_0 的两侧沿岸上,$f_0(z)$ 的值相同,那么我们就说,点 a 是所给分支 $f_0(z)$ 的**单值性的奇点**(在这时候,根据第 20 目的唯一性定理,分支 $f_0(z)$ 向其他环形 D_k 内的解析延拓,与 $f_0(z)$ 相同). 这样的奇点,我们在第 22 目中已经讨论过了.

如果 $f_0(z)$ 在割痕 γ_0 的两侧沿岸上的值不相同,点 a 就称做是**多值性的奇点**,或者叫做**支点**. 在这里可能有两种情形:

(1) 存在着这样的一串环形 $D_0,D_1,\cdots,D_{n-1}$,它们是,例如,按照逆时针的方向

---

* 一个奇点 a,只有当除了在这个点处不解析的那个分支以外,还存在着 $f(z)$ 的一个在点 a 处正则的分支时,才可能属于存在区域. 例如,对函数 $w=1/(\sqrt{z}+1)$ 来说,$z=1$ 就是这种点,对 $\sqrt{1}=-1$ 那一个函数的分支,它是奇点,并且对于它的另一分支($\sqrt{1}=1$)是正则的.

依次互相连接起来的(也就是,D_0中割痕的下沿与 D_1 中割痕的上沿相粘合,等等),在所余留下的 D_0中与 D_{n-1}中割痕的那两条空着的割痕沿岸(D_0中的上沿与 D_{n-1}中的下沿)上,$f_0(z)$与 $f_{n-1}(z)$的值相等.于是,$f_n(z)\equiv f_0(z)$,$f_{n+1}(z)\equiv f_1(z)$,…,$f_{2n-1}(z)\equiv f_{n-1}(z)$,一般地讲,当 k 从 $-\infty$变到∞时,$f_k(z)$的值周期性地重复着$f_0(z)$,$f_1(z)$,…,$f_{n-1}(z)$这些值.在这种情形时,我们就说,点 a 是一个**有限 n 阶支点**.

在这种情形中,如果当 $z\to a$ 时所有的分支 $f_k(z)$都趋于一个有限的或无穷的极限,那么我们就说,点 a 是一个**代数支点**.例如,对于函数 $f(z)=\sqrt[n]{z}$或$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt[n]{z}}$来说,点 $z=0$ 与 $z=\infty$就是这样的支点.而如果当 $z\to a$ 时,$f_k(z)$的极限不存在,那么点 a 就称做是一个**超越支点**.例如,对于函数 $f(z)=e^{\frac{1}{\sqrt[n]{z}}}$来说,点 $z=0$ 就是这样的一个支点(点 $z=\infty$是这函数的一个代数支点).

(2) 在区域串中所有的环形 D_k内,函数的值都是不同的.在这种情形下,点 a 叫做**对数支点**.例如,对于多值函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 来说,点 $z=0$ 与 $z=\infty$就都是这样的支点.对数支点也属于超越支点.

在一个有限 n 阶支点a 的邻域内,函数 $f(z)$可以展开成广义幂级数:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^{\frac{k}{n}}. \tag{4}$$

事实上,令 $z-a=\zeta^n$.于是在 ζ 平面内就有环形 $0<|\zeta|<\rho=\sqrt[n]{R}$的一串其圆心角等于$\dfrac{2\pi}{n}$而相邻接的扇形$\Delta_v(v=0,1,\cdots,n-1)$,与区域串 D_v相对应.我们考虑复合函数 $\varphi(\zeta)=f(a+\zeta^n)$,这时在每一个扇形 Δ_v内,我们都选取函数 f 的对应的那一个分支f_v.显然,函数 $\varphi(\zeta)$可以从 Δ_0连续地延拓到 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{n-1}$内去,并且在$\Delta_0$中与 Δ_{n-1}中割痕的那两条空着的沿岸上,$\varphi(\zeta)$的值相等.所以点 $\zeta=0$ 是函数 $\varphi(\zeta)$的单值性的孤立奇点,因此,在点 $\zeta=0$ 的邻域内 $\varphi(\zeta)$可以用洛朗级数来表示:

$$\varphi(\zeta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\zeta^k.$$

把 $\zeta=(z-a)^{\frac{1}{n}}$代入这等式中,我们便得出了所求的展开式(4).

当 $a\neq\infty$是一个代数支点时,展开式(4)中只含有有限多个 k 是负数的项(或许,连这些项也完全没有);而当 a 是超越支点时,则含有无限多个这样的项.

26. 黎曼曲面 这一章的最后我们要谈一谈多值函数的黎曼曲面这个概念.利用这种曲面,可以使前面所说的解析延拓的过程,以及多值解析函数概念本身,都成为在几何上直观可见的了.设已经给出了一个定义在复变量 z 平面的一个区域D 内的(多值的)解析函数 $f(z)$.我们约定,把在解析延拓过程中用来构成区域 D 的那些区域D_k,看作是一些互相分开的页片,函数在所给区域 D 内有多少值,它们就被分

成多少份页片.

考虑在 z 平面内的某一串区域 $D_0, D_1, \cdots, D_n$，它们的公共边界段为 γ_{01}，$\gamma_{12}, \cdots, \gamma_{n-1,n}$. 设区域 D_0 与 D_1 有公共的部分，并且在这些公共部分的一些部分内 $f_0(z)$ 与 $f_1(z)$ 的值相等，而在另外一些部分内则不相等. 我们取对应于 D_0 与 D_1 的那两张页片，并且把它们沿着对应于 γ_{01} 的那条曲线黏合起来. 把这两张页片放在 $D_0+\gamma_{01}+D_1$ 上，使得每一张页片都恰好位于它所对应的那个区域的上面，至于页片在使 $f_0(z)$ 同 $f_1(z)$ 相等的 D_0 与 D_1 的公共部分上面的那些部分，也都黏合起来，黏合起来的部分都看作一层页片. 而在使 $f_0(z)$ 与 $f_1(z)$ 的值不相等的区域 D_0 与 D_1 的那些公共部分上，我们就在各自的上面安放了其所对应的页片的部分，于是在这些部分上面，页片是双层的. 我们规定，值 $f_0(z)$ 属于第一张页片中位于 z 上面的那个点值 $f_1(z)$ 属于第二张页片中位于 z 上面的那个点，于是函数

$$f(z)=\begin{cases} f_0(z), & \text{在 } D_0 \text{内}, \\ f_0(z)=f_1(z), & \text{在 } \gamma_{01} \text{上}, \\ f_1(z), & \text{在 } D_1 \text{内} \end{cases}$$

在这两张已经黏合起来的页片的全部上是单值的.

我们再对于那张对应于区域 D_2 的页片来进行完全同样的手续*，等等. 这时可能会发生，在实施把页片作适当的黏合时，不能使页片不相交；我们规定可以不注意这种相交(见图 32，图中表示了一个 3 阶支点的邻域，是由三个具有割痕的环 $0<|z-a|<R$ 所黏合而成的；我们不必注意在黏合环形 D_0 与 D_2 时所发生的相交). 一般地说，最后我们便得到了一块安放在区域 $D_0+\gamma_{01}+D_1+\cdots+\gamma_{n-1,n}+D_n$ 上面的多层的曲面. 如果我们对于用来确定解析函数 $f(z)$ 的各种可能的区域串，都进行这里所说的手续的话，那么一般说来，便得到了安放在区域 D 上面的一个多层的曲面 R. 这个曲面我们就称为是函数 $f(z)$ 的**黎曼曲面**.

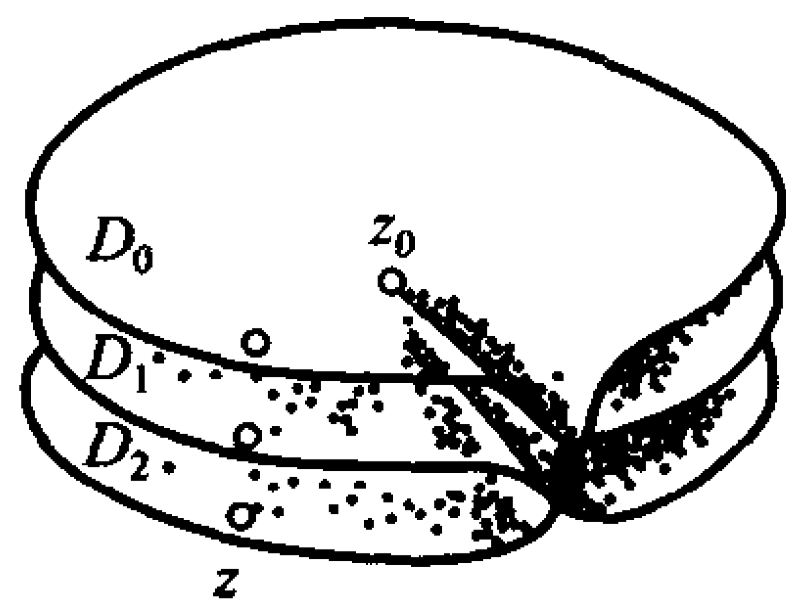


图 32

必须指出：*任何一个解析函数都可以看作是在它的黎曼曲面上的单值函数*. 要证明这结论，只需把这函数在某一个点 z 处的那些不同的值，分别归入黎曼曲面在这个点 z 上面的那些不同的页片层上去就可以了. 例如，根式 $\sqrt[3]{z-z_0}$ 在 z_0 的邻域中的点 $z\neq z_0$ 处的三个值，我们规定把它归入图 32 上曲面的位于点 z 上方的 3 个点的值.

如果函数 $w=f(z)$ 是一个单值函数 $z=\varphi(w)$ 的反函数(像我们在 §3 中所讨论过的那些例子里一样)，那么，显然它作出一个把它的黎曼曲面映到整个 w 平面或

---

* 这时可能会遇到这样一些点 z，在这个点上面安放着三层页片——如果 D_2 叠置在 D_0 与 D_1 的使 $f_0(z)$ 与 $f_1(z)$ 的值不相等的一个公共部分上面，并且在这个部分内 $f_2(z)$ 的值既与 $f_0(z)$ 不相等，也与 $f_1(z)$ 不相等，那时就要发生这所说的情况.

它的某一个部分上去的双向单值映射. 在一般情形中, $w = f(z)$把一个黎曼曲面映到另外一个黎曼曲面上.

我们来举黎曼曲面的几个最简单的例子*:

例 1 方根 $w=\sqrt[n]{z}$的黎曼曲面. 我们取割去了正向半轴的那个平面来作为区域 D_k: 区域 D_k 用不等式 $2k\pi<\arg z<2(k+1)\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$来表示. 在开始的那个区域 D_0 内, 我们考虑由条件 $0<\arg z<2\pi$ 所确定的那个分支 $f_0(z)$, 然后把它延拓到区域 $D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}$ 内. 与此相对应, 我们准备 n 张形状与 D_k 相同的页片, 把区域 D_0 中割痕的下沿与区域 D_1 中割痕的上沿黏合起来, 区域 D_1 中割痕的下沿与区域 D_2 中割痕的上沿黏合起来, 如此类推. 在正向半轴上(以及在整个区域 $D_n=D_0$ 内)函数 $f_0(z)$与 $f_n(z)$的值相等. 因此, 我们必须把余留下来空着的页片 D_0 中割痕的上沿与 D_{n-1} 中割痕的下沿, 互相黏合起来(不必顾虑在这时所发生的页片相交的现象). $\sqrt[n]{z}$的在其他区域 D_k 内的值, 不过是重复这些已分出的值 $f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}$ 而已, 因此, 所构成的这个 n 层的曲面, 便是函数 $w=\sqrt[n]{z}$的黎曼曲面. 在点 $z=0$ 与 $z=\infty$的上面, 这曲面有 n 阶的代数支点(见图 33, 其中令 $n=4$).

例 2 对数函数 $w=\mathrm{Ln}\, z$ 的黎曼曲面. 区域 D_k 与上面那个例子中相同. 在 D_0 内选取分支 $w=\ln|z|+i\arg z$, 其中 $0<\arg z<2\pi$, 把这个分支无限制地延拓到区域 D_k 内去(其中 $k=\pm 1, \pm 2, \cdots$). 与此相应, 无限多张形状与 D_k 相同的页片按照下述规定互相连接起来: 每一张页片 D_k 的割痕的下沿与页片 D_{k+1} 的割痕的上沿相黏合. 所得到的对数函数的黎曼曲面, 有如在图 34 中所描绘的形状. 在点 $z=0$ 与 $z=\infty$上面, 曲面有对数型支点.

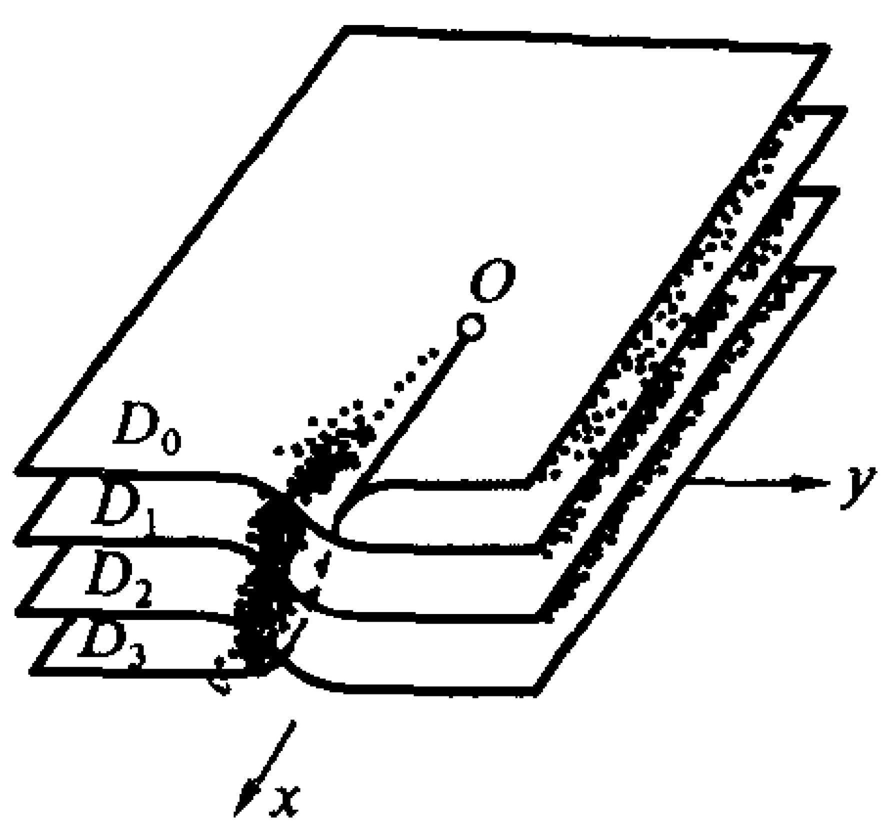


图 33

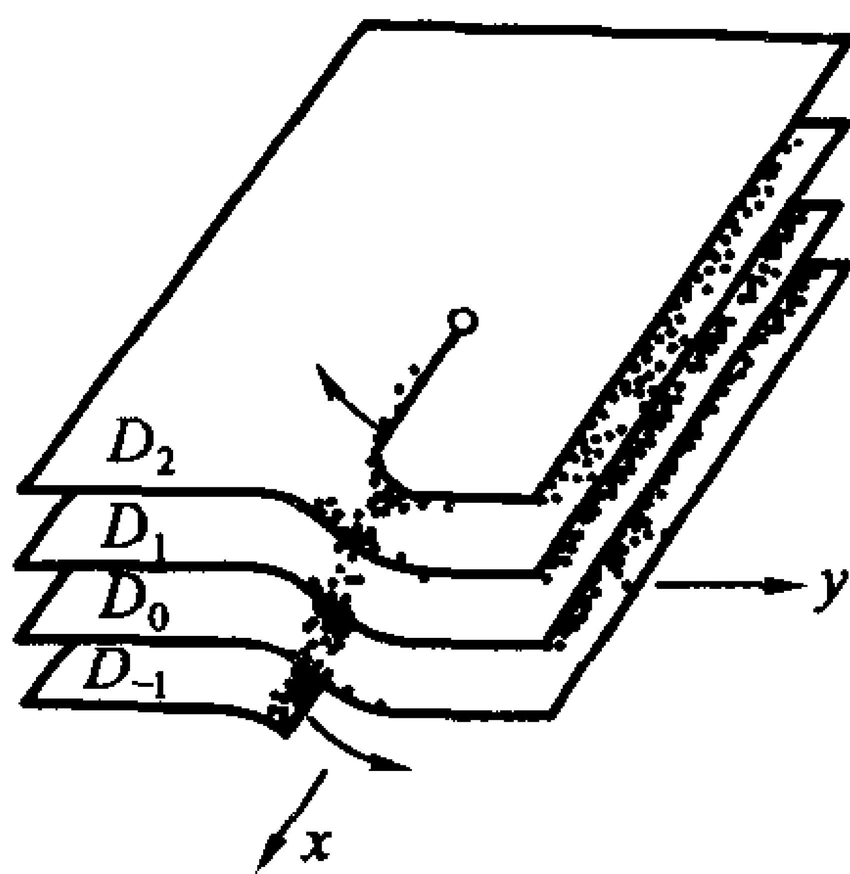


图 34

例 3 茹科夫斯基函数的反函数 $w=z+\sqrt{z^2-1}$的黎曼曲面. 我们取去掉了线段$[-1,1]$的 z 平面来作为区域 D_k, 设 $f_0(z)$与 $f_1(z)$分别是这函数的把 D_0 映到单位圆的内部上去与把 D_1 映到单位圆的外部上去的那两个分支(见第 7 目). 因为 $f_0(z)$把线段$[-1,1]$的下沿映到单位圆的上半个圆周上, 而 $f_1(z)$把线段$[-1,1]$的上沿映到这上半个圆周上, 所以我们应当把页片 D_0 中割痕的下沿与页片 D_1 中割痕的上沿互相黏合起来. 同样, 应当把 D_0 中割痕的上沿与 D_1 中割痕的下沿互相黏合起来, 因为它们都是被映到单位圆的下半个圆周上去的. 所得到的这个双层的曲面, 就是

* 我们建议, 用纸黏制出在这里所讨论的那些黎曼曲面的模型, 然后在这些模型上来按迹探究书中所作的推理.

我们这个函数的黎曼曲面. 它在点 $z=\pm 1$ 上面有 2 阶支点*(图 35). 这曲面与$\sqrt{z}$的曲面只相差两个辅助的分式线性映射. 实际上, 用变换 $z=\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ 与 $\omega=\frac{w+1}{w-1}$ 就可以把函数 $w=z+\sqrt{z^2-1}$ 变换成函数 $\omega=\sqrt{\zeta}$(见第 31 目).

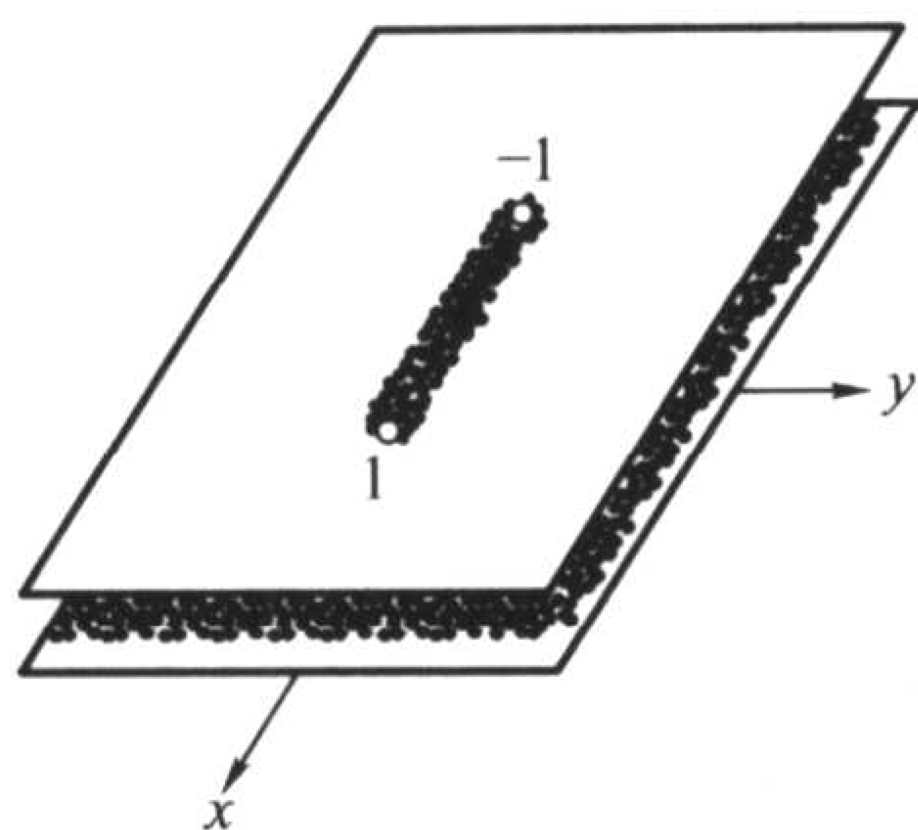


图 35

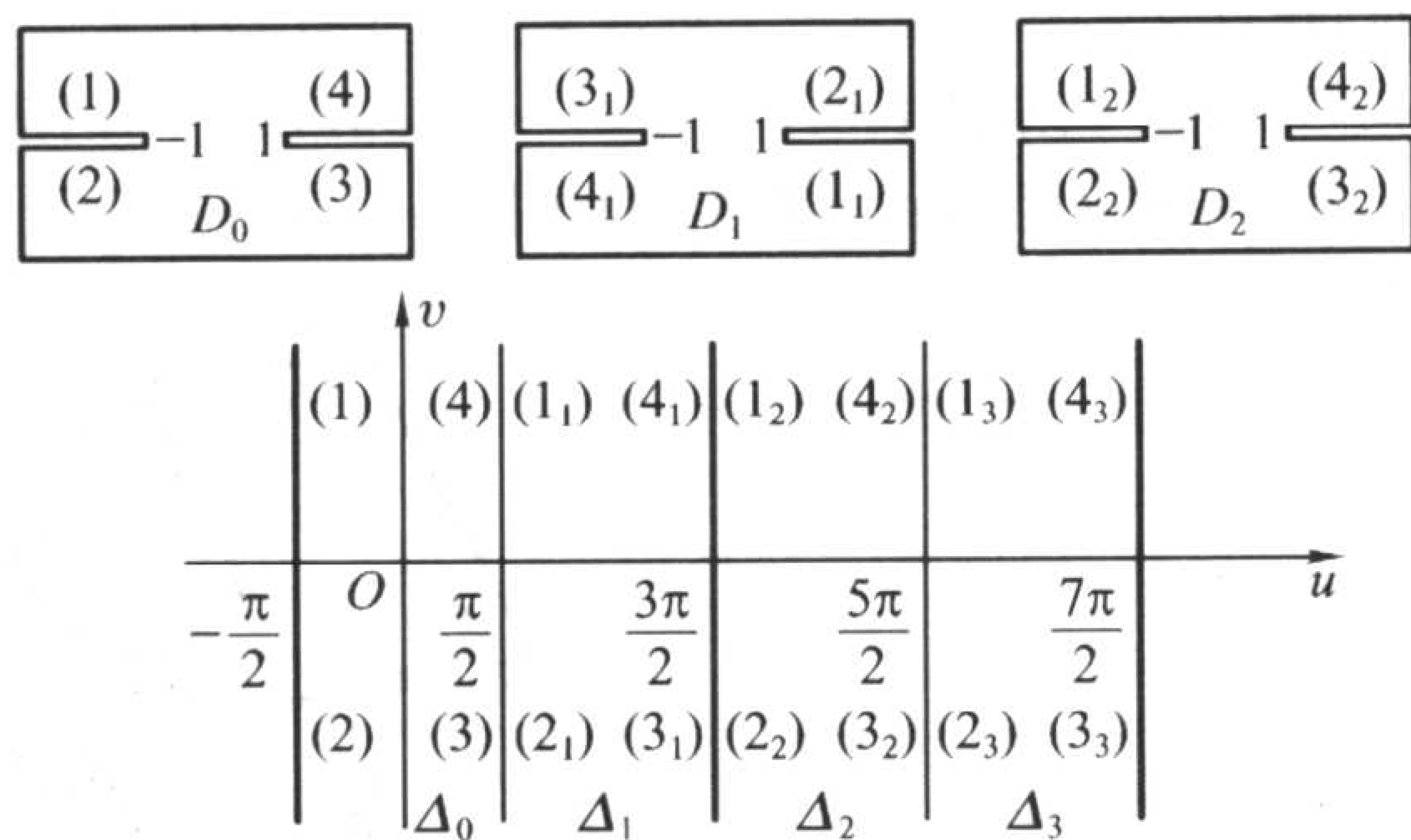


图 36

例 4 反正弦函数 $w=\operatorname{Arc}\sin z$ 的黎曼曲面. 在第 9 目中我们曾看到, 函数 $z=\sin w$ 把半个带形 $\operatorname{Im} w>0,-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2}$ 映到上半个平面上**, 这时射线(1)与(4)在图 36 中被变换成射线 $x<-1$ 与 $x>1$; 由 $\sin w$ 是一个奇函数, 推出半带形 $\operatorname{Im} w<0,-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2}$ 被变换成下半平面, 并且射线(2)与(3)对应着同样的两条射线 $x<-1$ 与 $x>1$ (图 36). 因此, $w=\operatorname{Arc}\sin z$ 的那些分支中, 有一个分支(我们用 $f_0(z)$来表示它)把沿着线段$(-\infty,-1)$与$(1,\infty)$有割痕的那个 z 平面(我们把它记作 D_0)映到带形 Δ_0: $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2}$ 上, 在这映射下有图 36 中所指出的那些边界的对应关系. 因为 $\sin(w+\pi)=-\sin w$, 所以带形 Δ_1: $\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{3\pi}{2}$ 在映射 $z=\sin w$ 下变换成 z 平面中同样的区域, 我们把这个区域记作 D_1, 并且用 $f_1(z)$来表示作出其逆映射的那个函数. Δ_1 与 D_1 的边界的对应关系, 已在图 36 中指明.

显然, 分支 $f_1(z)$是 $f_0(z)$向 D_1 内的解析延拓, 并且在这样的延拓中, 函数 $z=\sin w$ 在直线 $\operatorname{Re} w=\frac{\pi}{2}$ 上是保持连续的. 与此相应, 我们应当把页片 D_0 中与页片 D_1 中割痕的边沿交叉十字形地黏合起来: (4)与(1_1)黏合在一起, (3)与(2_1)黏合在一起. 这样便得到了一个双层的曲面, 这曲面在点 $z=1$ 上面有一个 2 阶支点, 在射线$(-\infty,-1)$的上面有一条割痕, 在割痕上放着四条割痕边岸: (1)、(2)、(3_1)、(4_1) (图 37). 由于函数 $z=\sin w$ 的周期性, 带形 Δ_2 与 Δ_3 的总和也被映到由页片 D_2 与页片 D_3 所构成的同样的一个带有割痕的双层曲面上, 这个曲面有 4 条自由的割痕边岸: (1_2)、(2_2)、(3_3)、(4_3). 我们应当把刚才所构造成的这两个双层曲面连接起来, 把页片 D_1 中与 D_2

---

* 在点 $z=\infty$ 上面, 曲面是两张不分支的页片.

** 我们在其中互换了 z 与 w.

中割痕的自由的边沿十字交叉地黏合起来：(4_1)与(1_2)黏合在一起，(3_1)与(2_2)黏合在一起——这对应于函数 $z=\sin w$ 的经过直线 $\mathrm{Re}\ w=\frac{3\pi}{2}$的连续延拓(图 36)．这时在点 $z=-1$ 的上面出现了一个连接页片 D_1与 D_2的支点．把这种构造法无限制地延拓开去，从基本的带形 Δ_0出发向左及向右进展，我们便得到了一个无限多层的反正弦的黎曼曲面．这曲面在点 $z=\pm 1$ 上面有无数多个 2 阶支点，在点 $z=\infty$上面有一个对数支点*．(图 37)

我们的这个构造法表明，函数 $z=\sin w$ 作出一个把整个有限的 w 平面映到我们这黎曼曲面上来的双向单值而且连续的映射．反函数 $w=\mathrm{Arcsin}\ z$ 在这个曲面上是单值的．

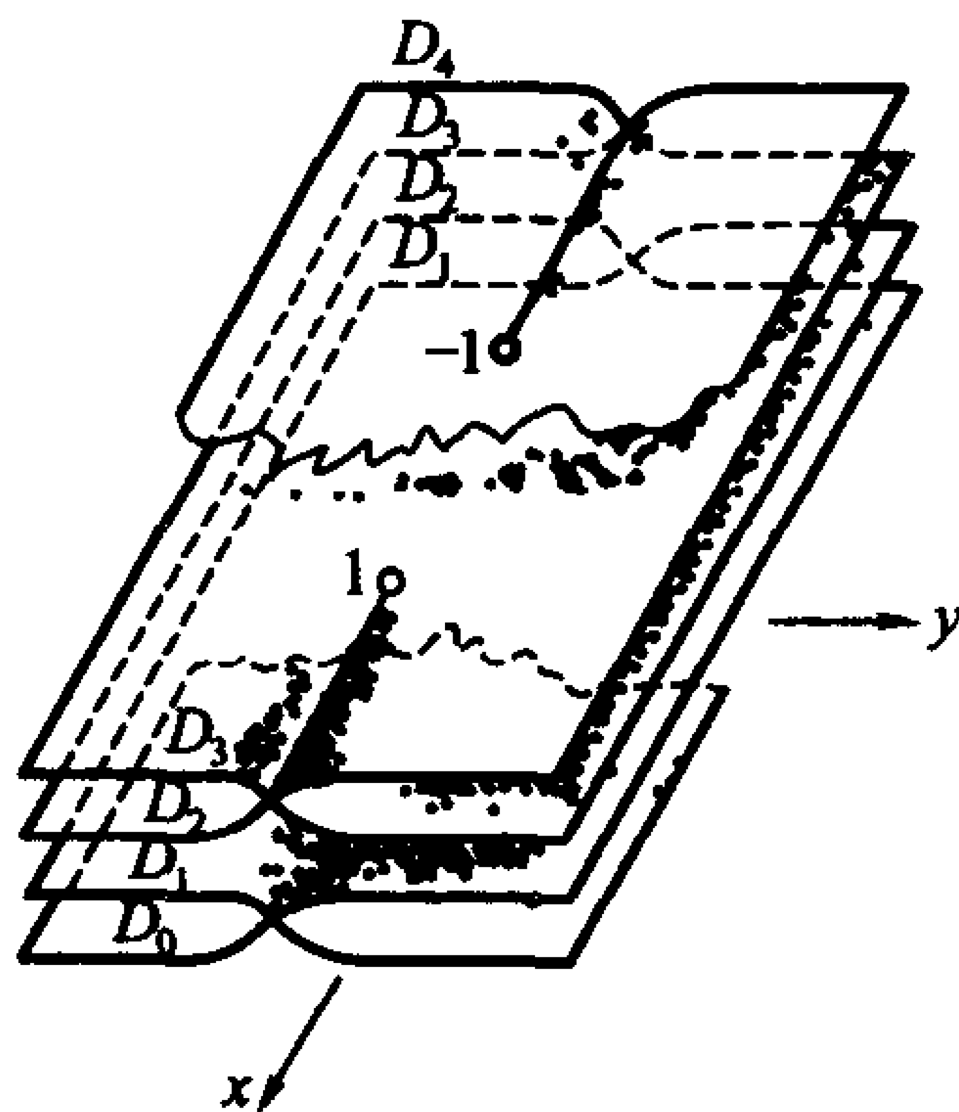


图 37

---

* 要证实这结论，只要考虑在圆周$|z|=2$上的点沿着曲面的运动便够了．设我们从页片 D_0中在 $z=2$ 上面的那个点出发，并且按照逆时针方向来移动．如同在图 36 中所表示出的，我们立刻就落到页片 D_1上；然后，经过 $z=-2$ 的上面时，我们落到页片 D_2上；再后，在 $z=2$ 的上面落到 D_3上，这样类推下去．由此，在 $z=\infty$上面的那个奇点的对数性质，就很明显了．

第二章　共形映射

这一章将用来讲由解析函数所实施的映射,所谓的共形映射.

共形映射这个概念,是数学中最重要的概念之一.它是从物理学的观念中产生的,对于物理学的不同领域有许多重要的应用——共形映射的方法,成功地解决了在流体动力学与空气动力学,弹性理论,静电场,磁场与热场等方面的许多实际问题.

达朗贝尔,欧拉,高斯(K. F. Gauss)* 都曾解决了一些与共形映射有关的个别问题.以他们的那些工作为基础,B.黎曼在他的学位论文"复变函数一般理论的原理"(1851)中奠定了函数的几何理论的基础,并且特别证明了把任意一个单连通区域相互映到另一个单连通区域上去的共形映射的可能性的基本定理(虽说这个证明并不正确).黎曼在他自己的著作中,遵循着欧拉,利用了与共形映射相关联的那些物理观念.

从 19 世纪中叶开始共形映射作为数学工具广泛应用于稠密介质力学的研究中,这种应用的首创者中 H. E. 茹科夫斯基,S. A. 恰普雷金(流体动力学与空气动力学),Г. В. 科洛索夫,Н. И. 穆斯海利什维里(弹性理论)占着显著的地位.

§1　一般原理.例题

在这一节中将陈述共形映射的概念以及共形映射理论的一般原理.其中有许多不可能加以证明(证明需要牵涉到超出本书范围的一些内容),我们只限于讲清这些

* K. F. Gauss 高斯(1777—1855),德国数学家.

原理的实质,并用一些例子来解释它们.

27. 共形映射的概念 我们假设,已经给定了一个把区域 D 映到某一个区域 D^* 上去的连续而且双向单值的映射:

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \tag{1}$$

还假设函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在这个区域 D 内都是可微的.我们固定 D 中的任意一个点 z_0,在这个点的邻域内把函数 u 与 v 的增量用它们的微分来代替.按照微分的定义,这两个增量可以表示成下述的形状:

$$\left.\begin{aligned} u-u_0&=\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0)+\eta_1\Delta r,\\ v-v_0&=\frac{\partial v}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(y-y_0)+\eta_2\Delta r,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中的偏导数都是在点 z_0 处取的,$\Delta r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$,而当 $\Delta r\to 0$ 时,η_1,η_2 都趋于 0.用 u 与 v 的微分来代替增量,就是在关系式(2)中弃去项 $\eta_1\Delta r$ 与 $\eta_2\Delta r$,这两项比起式中其他的那些项来,是更高阶的无穷小(我们假定,$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 与 $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ 都不等于 0).

从几何观点来说,这个代替相当于把映射 $w=f(z)$ 用映射

$$\left.\begin{aligned} u-u_0&=\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0),\\ v-v_0&=\frac{\partial v}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(y-y_0)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

来代替,这个映射叫做映射(1)的**主要线性部分**.映射(3)可以改写成

$$\left.\begin{aligned} u&=ax+by+l,\\ v&=cx+dy+m\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

的形状,其中

$$\left.\begin{aligned} &a=\frac{\partial u}{\partial x},b=\frac{\partial u}{\partial y},c=\frac{\partial v}{\partial x},d=\frac{\partial v}{\partial y},\\ &l=u_0-\frac{\partial u}{\partial x}x_0-\frac{\partial u}{\partial y}y_0,m=v_0-\frac{\partial v}{\partial x}x_0-\frac{\partial v}{\partial y}y_0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

都是同 x 与 y 无关的.这就是所谓(x,y)平面的线性变换.

我们来指出线性变换的一些基本性质.每一个线性变换(4)都是在整个(x,y)平面内被单值地确定了的.我们假定行列式

$$\Delta=ad-bc$$

不等于 0*,于是(4)的逆变换

---

* 当 $\Delta=0$ 的情形,我们说映射(4)降秩.

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{\Delta}(du-bv-dl+bm),\\y&=\frac{1}{\Delta}(-cu+av+lc-am)\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

在整个 w 平面内也是被单值地确定的.因此,当 $\Delta\neq0$ 时,不仅对应每一个 z 值有一个 w 的值,而且对应每一个 w 的值有一个 z 的值,亦即变换(4)实施一个把整个 z 平面映到整个 w 平面上去的双向单值映射.

我们来考虑具有斜率 $k=\tan\varphi$ 的平行直线族,即,直线族 $y=kx+C$.把其中的 x 与 y 按照公式(6)来代换,我们便看到,对应于这族直线的也是一族平行的直线

$$-cu+av+lc-am=k(du-bv-dl+bm)+C\Delta,$$

它们的斜率是

$$k^{*}=\tan\theta=\frac{c+kd}{a+kb}.$$

由此得出:映射(4)把 z 平面上的正方形变换成 w 平面上的平行四边形.

设 $z_0=x_0+iy_0$ 与 $w_0=u_0+iv_0$ 是在映射(4)下互相对应的一对点.于是这个映射便可以表示成

$$\left.\begin{aligned}u-u_0&=a(x-x_0)+b(y-y_0),\\v-v_0&=c(x-x_0)+d(y-y_0)\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

的形状,而其逆映射便可以表示成

$$\left.\begin{aligned}x-x_0&=\frac{d}{\Delta}(u-u_0)-\frac{b}{\Delta}(v-v_0),\\y-y_0&=-\frac{c}{\Delta}(u-u_0)+\frac{a}{\Delta}(v-v_0)\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

的形状(要得出公式(7)与(8),只需把 $x=x_0,y=y_0,u=u_0,v=v_0$ 代入关系式(4)与(6),由(4)与(6)中减去所得到的方程式便行了).根据公式(8),我们就可以断定说:以点 z_0 为中心的一个圆周

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,$$

在映射(4)下变换成以点 w_0 为中心的一个椭圆:

$$(d^2+c^2)(u-u_0)^2-2(bd+ac)(u-u_0)(v-v_0)+(b^2+a^2)(v-v_0)^2=\Delta^2r^2.\tag{9}$$

我们提出一个问题:要想使变换(4)把一个圆周重新变换成一个圆周,它的系数应当满足怎样的条件?由(9)可以得出,要想这样,其充分必要条件是,变换(4)的系数满足关系式

$$bd+ac=0,a^2+b^2=c^2+d^2.\tag{10}$$

其中的第一个方程式给出 $\frac{a}{d}=-\frac{b}{c}=\lambda$,由此有 $a=\lambda d,b=-\lambda c$.将这代入(10)中的第二个方程式内,我们得到 $\lambda^2=1$,或 $\lambda=\pm1$.

在 $\lambda=1$ 的情形导出关系式

$$a=d,b=-c. \tag{11}$$

在这时 $\Delta=ad-bc=a^2+b^2>0$. 我们令

$$a=d=\sqrt{\Delta}\cos\alpha, c=-b=\sqrt{\Delta}\sin\alpha,$$

这是可以做到的,因为我们有

$$\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{\Delta}=1.$$

于是变换(4)就被改写成

$$u=\sqrt{\Delta}(\cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y)+l,$$

$$v=\sqrt{\Delta}(\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y)+m$$

的形状. 这两个关系式可以写成复数的形状,如:

$$u+iv=\sqrt{\Delta}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+iy)+l+im,$$

它们导出线性复变函数:

$$w=Az+B, \tag{12}$$

其中

$$A=\sqrt{\Delta}e^{i\alpha}, B=l+im. \tag{13}$$

由此可见,在(11)的情形下,线性变换(4)化成 z 平面平移一个向量 $B=l+im$,旋转一个角度为 $\alpha=\operatorname{Arg}A$,与延伸系数为 $\sqrt{\Delta}=|A|$ 的一个相似延伸变换(参看第 4 目).

在 $\lambda=-1$ 的情形,我们有:

$$a=-d,b=c \tag{14}$$

及 $\Delta=-a^2-b^2<0$. 重复刚才所作的计算,我们便看到,变换(4)可以被写成

$$w=\sqrt{-\Delta}\,e^{i\alpha}\bar{z}+B. \tag{15}$$

因此,在条件(14)下,线性变换(4)便化成:在上面所列举过的那几种变换之外,再加上一个从 z 到 $\bar{z}$ 的变换,即,加上一个关于实轴的对称变换(参看第 1 目).

由变换(12)与(15)的几何意义显然可以看出:这样的变换保存了图形的相似性,特别保存了两条直线之间的角度,把 z 平面上的正方形变换成 w 平面上的正方形,等等. 具有这种性质的线性变换,叫做**正交变换**. 因此,条件(10)就是变换(4)是正交变换的条件*. 其次,显然变换(12)也保存了绕行闭周线时的方向(简短地说,保存了序向),而变换(15)则把它们换成了相反的方向(改变了序向). 因此,条件(11)就分出了保存序向的那种正交变换,条件(14)分出了改变序向的正交变换.

我们回到任意的映射上来. 如果一个把区域 D 映到 D^* 上的双向单值映射

---

* 注意,如果我们要求任何一条射线 $\arg z=\varphi$ 的旋转角 $\theta-\varphi$ 都与角 φ 无关,就也达到这同样的正交性条件.

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1}$$

的主要线性部分,在 D 中任何一个点的邻域内都是保存序向的正交变换的话,这个映射就称为是**共形映射**[*].从这个定义可以导出共形映射的两个基本性质:

(1) 共形映射在可以相差一个高阶无限小的程度内,把无限小的圆周变换成圆周(圆性质).

(2) 共形映射使在曲线的交点处曲线所成的角度保持不变(角保持性质).

第一个性质的意思是,当 r 很小时,圆周 $C:|z-z_0|=r$ 被变换成这样的一条曲线 C^*,它的任何一个点,与经过曲线 C^*(它是曲线 C 在所考虑的映射下的像)上任何一个点所作的圆周 $|w-w_0|=\rho$ 的距离,都是一个关于 r 的高阶无限小.第二个性质的意思是,在点 z_0 处任何两条曲线 Γ_1 与 Γ_2 所成的角度,等于在点 w_0 处这两条曲线的像 Γ_1^* 与 Γ_2^* 所成的角度[**](图 38).

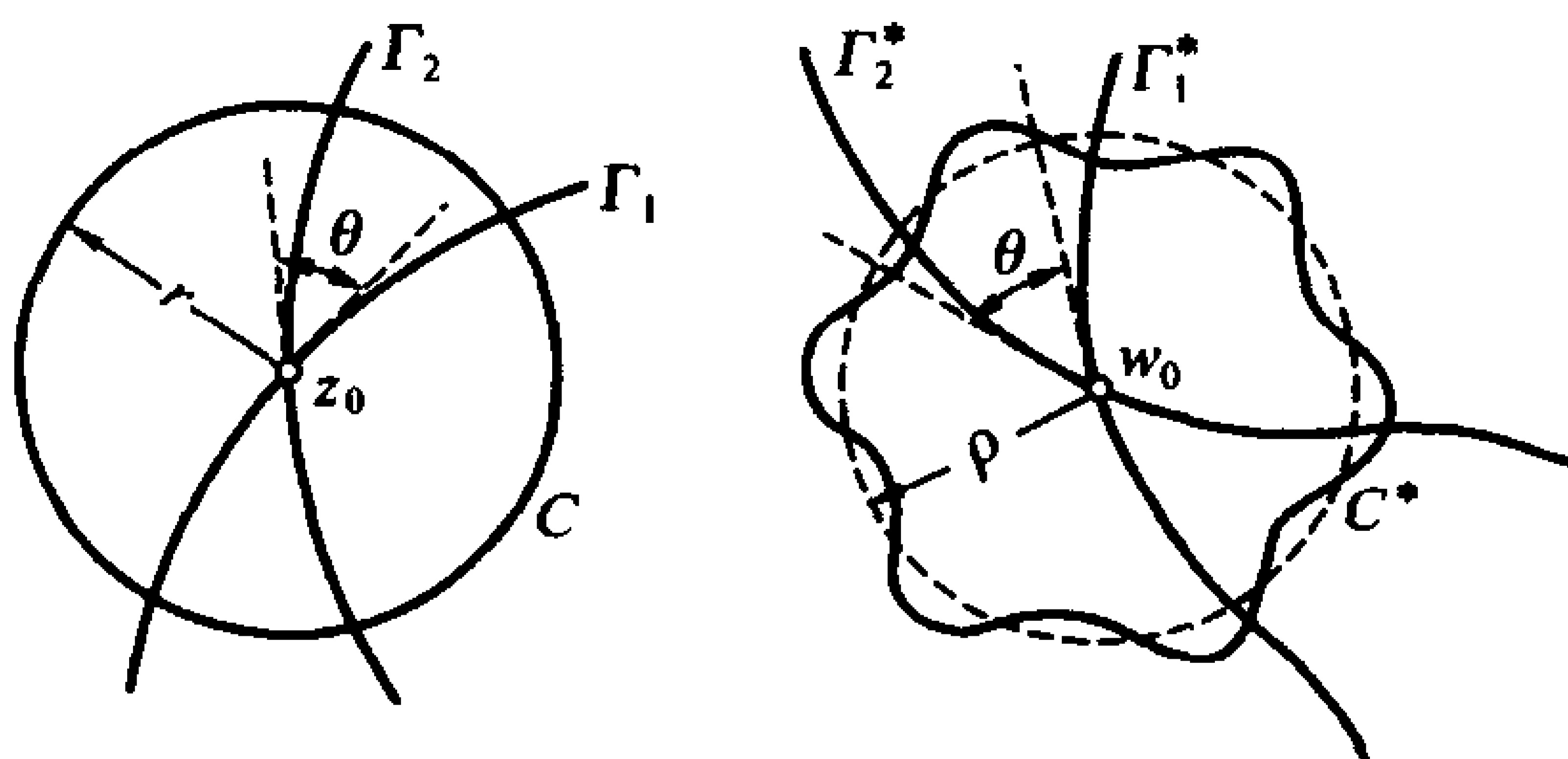


图 38

考虑到公式(5)与(11),我们可以把使映射(1)是共形映射的条件改写成

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{16}$$

的形状,并且必须有

$$\Delta=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z_0)|^2\neq 0, \tag{17}$$

因为当 $\Delta=0$ 时,映射 $w=f(z)$ 的主要线性部分是退化的,这与它是共形映射的条件相矛盾.这样,方程组(16)与第 5 目中函数 $f(z)$ 在区域 D 内的可微性(解析性)的柯西-黎曼条件相符合,而不等式(17)则表明,导数 $f'(z)$ 必须处处都是不等于 0 的.

又,我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\sqrt{\Delta}\cos\alpha,\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\sqrt{\Delta}\sin\alpha,$$

---

[*] 如果映射 $w=f(z)$ 的主要线性部分是改变序向的正交变换的话,这映射就称为是**第二类共形映射**.

[**] 要证明这个性质,只需注意下述事实便够了;所谓两条曲线所成的角度,是指它们的切线所成的角度,而一个可微的映射的主要线性部分,是把曲线 Γ_k 的切线变换成 Γ_k^* 的切线.

从这里容易得出复变函数的导数的几何解释.我们有:

$$|f'(z)|=\sqrt{\Delta},\arg f'(z)=\alpha. \tag{18}$$

亦即,导数 $f'(z)$ 的模与辐角,分别表示映射 $w=f(z)$ 的主要线性部分在点 z 处的延伸系数与旋转角度,或者,换种说法,就表示了映射 $w=f(z)$ 本身在点 z 处的延伸系数与旋转角度.

我们在这一目中已作过的那些推理,导出下述的结论:

要函数 $w=f(z)$ 作出一个对区域 D 的共形映射,其充分必要条件是,它在这个区域内是 1)单叶的,2)解析的,和 3)它的导数 $f'(z)$ 在 D 内处处都不等于 0.

我们要注意,如果 $f'(z_0)=0$,那么在点 z_0 的邻域内,差 $f(z)-w_0$ 的泰勒展开式就具有形状

$$f(z)-w_0=c_n(z-z_0)^n+c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots, \tag{19}$$

其中 $n\geqslant 2, c_n\neq 0$ (参看第 20 目).由此得出:当 $|z-z_0|=r$ 很小时,由函数 $f(z)$ 所作出的映射,与映射

$$w-w_0=c_n(z-z_0)^n \tag{20}$$

仅相差一个高阶无限小.但是,映射(20)的逆映射在点 w_0 处有一个 n 阶支点,这就是说,映射(20)在点 z_0 的邻域内不是单叶的.所以映射 $w=f(z)$ 在点 z_0 的邻域内也不是单叶的.因此,刚才所导出的那个定理中条件 3)可以去掉,因为它可以从条件 1)(映射是单叶的)中得出.

我们也要指出:反过来讲,条件 $f'(z_0)\neq 0$ 也保证了映射在点 z_0 的足够小的邻域内是单叶的——这可以像上面那个结论一样来证明.但是,如果在区域 D 的每一个点处都满足条件 $f'(z)\neq 0$,那么并不一定就能由此得出结论说,这映射在整个区域 D 内是单叶的,甚至于当 D 是一个单连通区域时也是这样.例如,在半环形 $1<|z|<2, 0<\arg z<\pi$ 内,映射 $w=z^4$ 显然不是单叶的,但是在这个半环形的任何一个点处,却都有 $\frac{dw}{dz}=4z^3\neq 0$.

在结束时,关于由那些在区域 D 内是单值的但不是单叶的函数所实施的映射,我们要说几句话.在第 26 目中我们已经看到,每一个这样的函数 $w=f(z)$ 都实施一个把区域 D 映到反函数 $z=\varphi(w)$ 的黎曼曲面 R 上去的双向单值映射.设曲面 R 的位于点 w_0 上面的点 P 不是一个支点,并且设对应着点 P 的是区域 D 的某一个点 z_0.这就是说,有多值函数 $\varphi(w)$ 的一个分支 $\varphi_0(w)$ 存在,使 $\varphi_0(w_0)=z_0$.在点 z_0 处导数 $f'(z_0)\neq 0$,因为假如不然的话,由展开式(19)中可以看出,点 P 就是曲面 R 的一个支点了.因此,函数 $f(z)$ 实现一个把点 z_0 的足够小的邻域映到点 w_0 的一个邻域上去的双向单值映射.这映射显然是一个共形映射.

所以,由一个在区域 D 内是单值但不是单叶的函数 $w=f(z)$ 所实施的映射,在每一个满足条件 $f'(z_0)\neq 0$ 的点 z_0 的足够小的邻域内,都是一个共形映射.使 $f'(z)$

$=0$ 的那些点,以及它们在黎曼曲面上的像,我们称之为**支点**(例如,茹科夫斯基函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 有支点在点 $z=\pm 1$ 处,$w=\sin z$ 有支点在点 $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 处,$k=0,\pm 1,\cdots$ 等等).

28. 基本问题 有了任意一个解析函数,我们便可以考虑由它所实施的各种共形映射.任何一个区域 D,只要这函数在 D 内是单叶的,都可以用这函数来实施共形映射把 D 映到某一个区域 D^* 上去.因此,我们可以得出在几何上说明一个已给函数的共形映射的各种不同的例子.其实,在上一章的§3中,我们已经研究过这个问题了,在那里所考虑过的一切映射,都是在相应的区域内单叶的,并且都是由解析函数所作出的,所以,都是共形映射.

但是,就实用的目的来说,引起巨大兴趣的乃是它的那个更为困难得多的逆问题,所谓

共形映射理论的基本问题 给定了区域 D 与 D^*,要求构造一个函数,它实施把其中一个区域映到另一个区域上去的共形映射.

要解决这个问题,还没有一个足够简单的计算方法,所以共形映射理论的发展照下述这些方向来进行:

(1) 弄清楚共形映射的存在与它的唯一性的一般条件;

(2) 定义各种特殊的区域类,它们的映射可以用初等函数的组合来实施;

(3) 利用解析函数的一般性质,来研究依赖于被映射区域的形状的共形映射的各种性质;

(4) 探究共形映射的近似方法.

我们来谈上面所列问题中的第一个问题.首先,在像前面所表述的共形映射基本问题那样的一般形式,这问题显然是不可能有解的.例如,多阶连通区域就不可能被双向单值并且连续地映到一个单连通区域上去.我们不来讲完全的证明,仅指出这种映射不可能的理由.我们假设,把多阶连通区域 D 映到单连通区域 D^* 上去的一个双向单值而且连续的映射是存在的.在 D 内取一条其内部包含了 D 的外点或边界点的闭曲线 C (这样的闭曲线总是存在的).所考虑的那个映射把 C 变换成位于 D^* 内的一条闭曲线 C^*.如果在区域 D^* 的内部使曲线 C^* 连续地聚缩成 D^* 中的某一个点 w_0,那么,由于映射是连续的,曲线 C 应当也始终保持在区域 D 的内部而连续地聚缩成 D 的某一个点.这显然是不可能的,因为在周线 C 的内部有着不属于 D 的点.

又例如,把整个 z 平面或开的 z 平面映到 w 平面的一个有界区域 D^* 上去的共形映射是不可能有的.事实上,假如有这样的一个映射存在的话,那么,作出这映射的那个函数 $w=f(z)$,就要在整个开平面内都是解析的,并且同时也是有界的,因为这个函数所有的值都位于区域 D^* 内;但是,根据刘维尔定理(第17目),这时函数 $f(z)$ 必须是一个常数,这是不可能的.

虽然如此,但是,任意两个单连通区域,只要它们的边界都由多于一个的点所构

成，却已经证明用共形映射来把它们互相由这一个映到那一个上去是可能的，并且还可以用无数多种方式来做到，这就是，可以做得使任何两个固定的点以及在这两个点处的任何两个方向彼此成对应.换句话说，下述的所谓共形映射理论的基本定理成立：

定理(B.黎曼，1851年) 不论两个单连通区域 D 与 D^*（它们的边界都是由多于一个的点所构成的）是怎么样，也不论在这两个区域中的两个点 z_0 与 w_0 以及一个实数 α_0 是怎样给定的，总有一个而且只有一个把区域 D 映到区域 D^* 上去的共形映射

$$w=f(z) \tag{1}$$

存在，使得

$$f(z_0)=w_0,\quad \arg f'(z_0)=\alpha_0. \tag{2}$$

要证明这样的共形映射存在，需要用超出本书范围的专门工具，所以我们把它省略掉了（见譬如 Б.В.沙巴特[3]）.现在我们只依据它的存在，在给定条件(2)的情形下，来证明这共形映射是唯一的.

开始我们先讨论一个特殊的情形：区域 D 与 D^* 分别是单位圆 $|z|<1$，$|w|<1$，而 $z_0=w_0=\alpha_0=0$. 在这情形下我们应当证明：如果函数 $w=f(z)$ 作出一个把圆 $|z|<1$ 映到圆 $|w|<1$ 上去的共形映射，并且 $f(0)=0$，$f'(0)>0$，那么必有

$$f(z)\equiv z.$$

证明是以施瓦茨引理（第15目）为基础的.因为，由于 $w=f(z)$ 把圆 $|z|<1$ 映到圆 $|w|<1$ 上，当 $|z|<1$ 时我们有 $|f(z)|<1$，所以，根据施瓦茨引理，

$$|f(z)|\leqslant|z|.$$

对 $f(z)$ 的反函数使用同样的推理，我们得到：

$$|z|\leqslant|f(z)|.$$

所以，$|f(z)|\equiv|z|$，并且根据同一引理，

$$f(z)=e^{i\alpha}z.$$

由于按照条件有 $f'(0)>0$，所以 $\alpha=0$，因此 $f(z)\equiv z$.

我们转到一般的情况.假设有两个把 D 映到 D^* 上去的映射

$$w=f_1(z),\quad w=f_2(z)$$

存在，它们满足条件

$$f_1(z_0)=f_2(z_0)=w_0,\quad \arg f_1'(z_0)=\arg f_2'(z_0)=\alpha_0.$$

利用函数

$$z=\varphi(\zeta),\quad \varphi(0)=z_0,\quad \varphi'(0)>0,$$

把圆 $|\zeta|<1$ 映到区域 D 上.又利用函数

$$\omega=\psi(w),\quad \psi(w_0)=0,\quad \arg\psi'(w_0)=-\alpha_0,$$

把区域 D^* 映到圆 $|\omega|<1$ 上.显然，

$$\omega = F_1(\zeta) = \psi\{f_1[\varphi(\zeta)]\}, \omega = F_2(\zeta) = \psi\{f_2[\varphi(\zeta)]\},$$

这两个函数实施两个把圆$|\zeta|<1$映到圆$|\omega|<1$上去的共形映射,都适合条件

$$F_1(0) = F_2(0) = 0, \quad \arg F_1'(0) = \arg F_2'(0) = 0.$$

根据上面已证明的结果,$F_1(\zeta) \equiv F_2(\zeta)$,但此时也就有$f_1(z) \equiv f_2(z)$,所以映射的唯一性便已经证明.

最后我们要提出刘维尔定理(第17目)的一个推广,这是黎曼定理的直接推论:

如果函数$w = f(z)$在开平面内是解析的,并且不取位于某一条弧γ上的那些值,那么它必是一个常数.

事实上,设函数$\omega = \varphi(w)$是实施把曲线γ的外部映到单位圆的内部上的共形映射(根据黎曼定理,这函数是存在的,并且当然不是一个常数).我们来看复合函数$\omega = \varphi[f(z)] = g(z)$,它在开平面内是解析的,并且所有的它的值都位于单位圆的内部,因此,根据刘维尔定理(第17目),这函数是个常数.但如果$g(z)$是常数的话,那么函数$f(z)$也必定是个常数,而这便是我们所需要的结果.例如,特别当$f(z)$在开平面内是解析的,并且它的值全部位于某一个半平面内(这时它便不取位于其他一个半平面内任何一条弧上的那些值),那么它必定是个常数.

29. 边界对应 将区域作共形映射时要建立边界对应,有关这种对应的一些基本事实,我们就要在这里讨论.为了方便起见,我们在区域D的边界C上引进一个实数的参变量s——从曲线C上某一个固定的点算起的弧长,于是在C上我们有$\zeta = \zeta(s)$.如果一个函数$f(z)$在闭区域$\bar{D}$上是连续的,那么我们就在这个区域的边界C上令

$$f(\zeta) = f\{\zeta(s)\} = \varphi(s),$$

并把$\varphi(s)$叫做函数$f(z)$的**边界函数**.

我们来举出下述的边界对应定理,不予证明.(见 Голузин[6])

定理 1 *设函数$w = f(z)$作出区域D与D^*之间的一个共形映射.于是*

1) 如果D^*的边界没有无穷远分支,那么函数$f(z)$在区域D的边界上是连续的,并且边界函数$w = f(\zeta) = \varphi(s)$实施在区域$D$与$D^*$的边界之间的一个连续而且双向单值的对应关系;

2) 如果D与D^*的边界都不含有无穷远分支,并且在每一个点处都具有连续的(因而,也是有界的)曲率,那么边界函数$\varphi(s)$是连续可微的.

这时处处我们都假定:边界上的多重点,都是按照它是个几重点而被计算几次的;例如,在图39中,截痕的两沿cd与de上的点都认为是不同的点(所以它们对应着不同的两条线段c^*d^*与d^*e^*),点b^*与f^*也是这样(所以它们也对应着不同的两个点b与f).如果在定理的第一部分中,弃去D^*的边界没有无穷远分支这个条件,那么函数$\varphi(s)$在D的边界上所有与有限点相对应的点处,仍然是连续的.而在与D^*的边界上的无穷远点相对应的那些点(它们可以有几个,如果那个无穷远点是

个多重点的话)处,函数$\frac{1}{\varphi(s)}$是连续的.

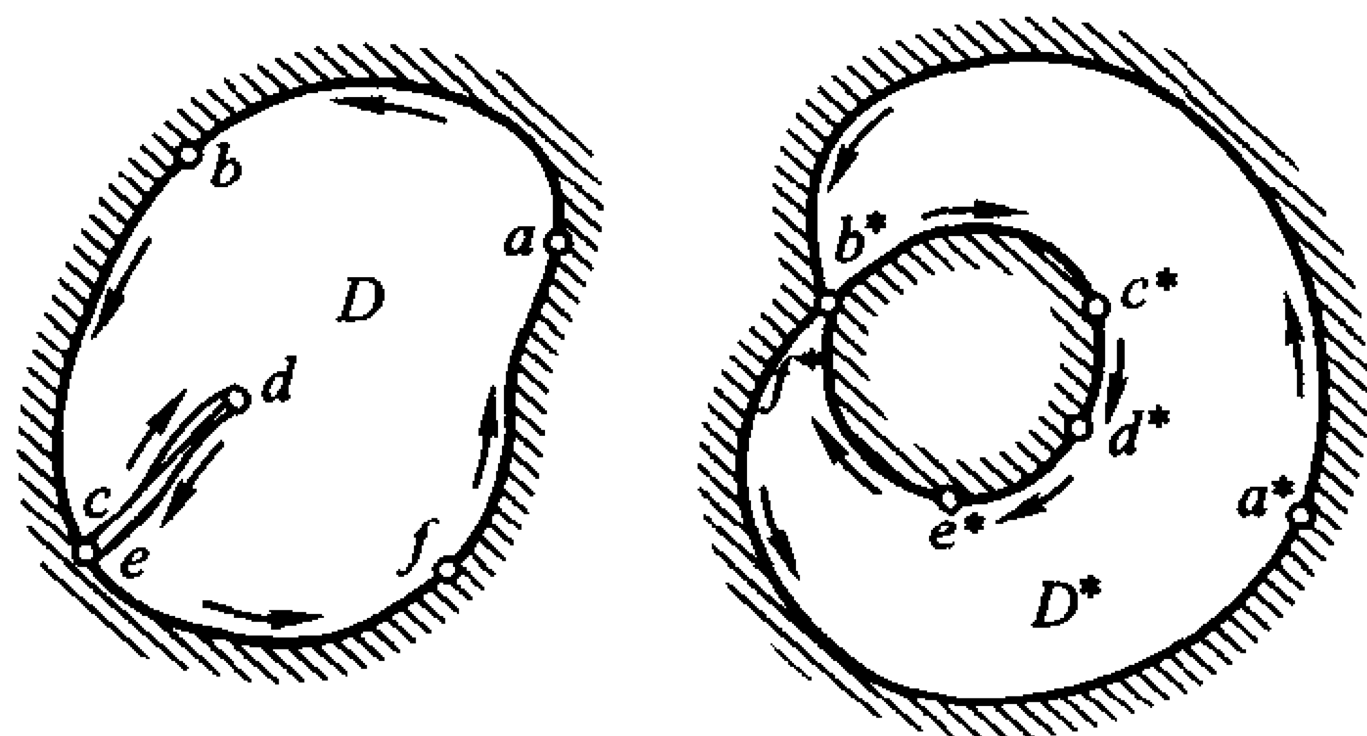


图 39

同样不加证明地列举一些更精确的结果,这些结果与区域边界上共形映射的导数的存在有关.第一个这种结果是 K.卡拉捷奥道利在 1929 年获得的:

(1) 如果函数 $w=f(z)$,$f(0)=0$ 实施把上半平面映到区域 D 的共形映射,区域 D 的边界 C 在点 $w=0$ 的邻域内是一段连续曲线.并且存在通过 $w=0$ 的圆周,其中一个圆周整个置于 D 内,而另一个圆周整个在 D 外,那么当沿着上半平面的点 $z\to 0$ 时存在

$$\lim\frac{f(z)}{z}=\lim f'(z)=\gamma,0<|\gamma|<\infty.$$

这一结果在 1931 年被 M.A.拉夫连季耶夫和 П.A.贝逊诺夫强化:

(2) 如果在点 $w=0$ 的邻域内边界 C 可求长*,位于曲线 $v=\pm|u|^{1+\alpha}$,$0<\alpha<1$ 和$\lim\limits_{s\to 0}\frac{u(s)}{s}=1$之间,其中 $u(s)$——曲线 C 的点的横坐标,该点沿 C 到点 $w=0$ 的距离等于 s,那么存在

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}}\frac{f(z)}{z}=\gamma,0<\gamma<\infty.$$

为了实际目的,O.凯洛格的结果就足够了.为了给出它的措辞,我们约定称某段弧为李雅普诺夫弧,如果它可求长的,在每一点有切线和这一切线和 x 轴的倾斜角 θ,作为弧长 s 的函数满足赫尔德(Hölder)条件

$$|\theta(s_2)-\theta(s_1)|<K|s_2-s_1|^{\alpha},$$

其中 K 为某一常数和 $0<\alpha\leqslant 1$.下列定理成立.

定理　假如函数 $w=f(z)$实施一个把区域 D 映射到区域D^*的共形映射,D 的边界包含李雅普诺夫弧 c,并且 c 同时也变换到李雅普诺夫弧c^*,那么在 c 上导数 $f'(z)$存在,不变成 0 和满足赫尔德条件.

凯洛格定理的证明读者可以在 Г.М.Голузин[6]的书中找到.

* 也就是每一个它的线段有确定的长.

我们还要注意,在上一目的基本定理中,条件(2)内含有三个实参变数 $x_0, y_0(x_0 + iy_0 = z_0)$ 与 α_0,所以可以用区域 D 与 D^* 的三对边界点互相对应:

$$f(z_k) = w_k, k = 1,2,3 \tag{1}$$

这条件来代替,这三对边界点是可以任意取的,不过要保持在绕行边界时它们之间的先后顺序*.这个结论我们将在第 35 目中来证明.

在共形映射的实际应用中,下述的边界对应原理很为重要,这原理在熟悉意义下是定理 1 的逆定理:

定理 2 设已经给定了两个单连通区域 D 与 D^*,其边界分别是 C 与 C^*,并且区域 D^* 是有界的.如果函数 $w = f(z)$

1) 在 D 内是解析的,在 $\bar{D}$ 上是连续的;

2) 实施一个把 C 映到 C^* 上,并且保持其绕行时方向的双向单值映射,那么它也是实施一个把区域 D 映到 D^* 上去的(单叶)共形映射.

为了证明这个定理,我们要利用第 23 目中的辐角原理.设 w_0 是任意一个这样的复数,在区域 D 的边界 C 上不论哪一个点处,$f(z)$ 的值都不等于 w_0,函数 $f(z)$ 在 D 的内部的 w_0 值点的个数等于

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\{f(z) - w_0\},$$

其中 $\Delta_C \arg\{f(z) - w_0\}$ 是当 z 走过周线 C 时,$\arg\{f(z) - w_0\}$ 的全部改变量(参看第 23 目中的公式(13);在区域 D 内 $f(z)$ 的极点的个数等于 0,因为 $f(z)$ 是连续的).

由于在周线 C 上的点与 C^* 上的点之间的那个对应关系,是双向单值而且连续的,我们有:

$$\Delta_C \arg\{f(z) - w_0\} = \Delta_{C^*} \arg(w - w_0).$$

但是,显然 $\Delta_{C^*} \arg(w - w_0)$ 对所有在 C^* 内部的点 w_0 来说都等于 2π,对所有在 C^* 的外面的点 w_0 来说都等于 0.所以,对于所有在 C^* 内部的点 w_0 来说,$N(w_0) = 1$,而对于所有在 C^* 的外面的点 w_0 来说,$N(w_0) = 0$.因此,函数 $w = f(z)$ 在 D 内取 D^* 中的每一个值一次,也只取一次,而不取任何其他的值,这就是说,它实施一个把 D 映到 D^* 上去的单叶映射.定理得证.

在证明中没有任何地方用到区域 D^* 是有界的这个性质**.但是如果区域 D^* 不是有界的,即,如果在 D^* 的内部***或它的边界上含有无穷远点的话,那么这个原理

---

* 条件(1)也像上一目中的条件(2)一样,含有三个实参变量,因为在区域边界上点的位置是由一个参变量来确定的.

** 如果区域 D 在其内部含有点 $z = \infty$,那么必须定义在这个点处共形映射的概念.只需利用球极平面投影把 z 平面转换到复数球面上去,这样的定义便可得到.也可以参看第 31 目,在那目中将对这个问题作详细的研究.

*** 见上面这个附注.

就需要更精确的规定. 首先,在它的表述中我们必须去掉 $f(z)$在 $\bar{D}$ 上是连续的这个要求,因为 $f(z)$在对应于 $w=\infty$的那个点处就不是连续的. 但在这时若不加上补充的限制,这原理便不再是正确的了. 例如. 函数 $w=z^3$作出一个在 x 轴的点与 u 轴的点之间的连续(除了在点 $z=\infty$处之外)而且双向单值的对应关系,并且保存了在通过它们时的方向,但是,这函数在上半平面内却不是单叶的. 事实上,这时这个映射把上半平面——即角度为 π 的一个角,变换成角度为 3π 的一个角,而这个角要覆盖上半平面两次(并且还覆盖下半平面一次).

当 D^* 是一个无界区域时的情形,在实用上是很重要的,我们现在来详细地讨论它. 在这里有下述两个定理(我们保持了上面所用的记号以及加在函数 $f(z)$上的条件 2)).

定理 3 设区域 D^* 在其内部包含无穷远点,这时如果用条件 1′)函数 $f(z)$在 $\bar{D}$ 上是连续的,在 D 内,除在某一个内点 z_0 处外都是解析的,在这个点处函数用一阶极点来代替定理 2 的条件 1),那么边界对应原理仍然是成立的.

为了证明这个定理,我们再来利用辐角原理. 根据辐角原理,对于每一个不在 C^* 上的点 w_0来说,函数 $f(z)$的 w_0值点的个数 $N(w_0)$都满足关系式

$$N(w_0)-1=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg\{f(z)-w_0\}=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C^*}\arg(w-w_0)$$

(在周线 C 的内部恰有一个一阶极点).

因为区域 D^* 内含有无穷远点,所以 C^* 是按照顺时针方向来绕行的,这就是说,如果点 w_0在 C^* 的内部,那么 $\Delta_{C^*}\arg(w-w_0)$便等于 -2π;如果点 w_0在 C^* 的外面,那么 $\Delta_{C^*}\arg(w-w_0)$便等于 0. 因此,对于区域 D^* 的所有的内点 w_0来说,都有 $N(w_0)=1$;对于 D^* 的所有的外点 w_0来说,都有 $N(w_0)=0$. 这就是所要证明的.

下述的定理是关于区域在它的边界上含有无穷远点时的情形的. 如前面所举过的函数 $w=z^3$的例子一样,为了在这种情形中保持边界对应原理需要补充限制条件.

在开始时我们姑且假定:区域 D^* 只有一个这样的点,即,$w=\infty$是边界 C^* 的一个单点. 我们还假定,C^* 的那两条伸向无穷远处的分支,都具有渐近线*. 我们用 $\beta\pi$ $(0\leqslant\beta\leqslant2)$来表示在这两条渐近线之间的角度,这角度像在图 40 中所指明的那样来量(在图 40 中分别画出了 $\beta=0$ 与 $\beta=2$ 这两种情形. 同任何时候一样,在区域互补的那集合用加上斜线来说明). 设对应于点 $w=\infty$的是周线 C 上的点 ζ_0,我们用 $\alpha\pi$ $(0<\alpha\leqslant2)$**来表示周线 C 在点 ζ_0处的左切线与右切线之间的角度. 我们还假定,在点 ζ_0的邻域内 $f(z)$是 μ 阶的无限大,这就是说,有一个常数 $A\neq0,\neq\infty$存在,使得当 z 沿着区域D 内的点趋于点 ζ_0时,存在着极限

$$\lim_{z\to\zeta_0}[f(z)(z-\zeta_0)^\mu]=A\quad(\mu>0).\tag{2}$$

* 对于无穷远点来讲,这个条件是与逐段光滑的条件类同的.

** 我们在 z 平面中把角 $\alpha=0$ 除外.

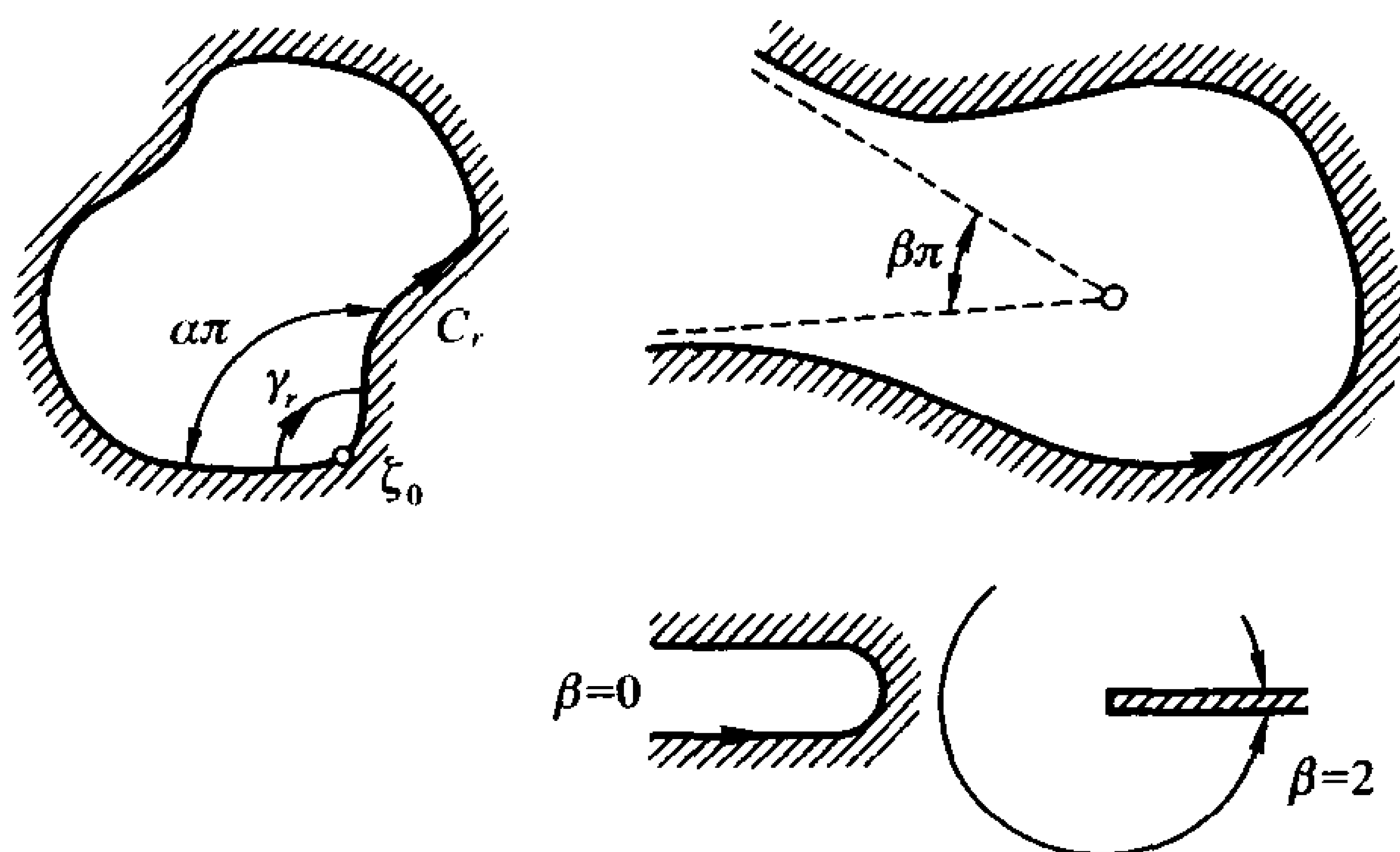


图 40

在所讨论的这个情形中,边界对应原理不能直接应用,因为 $f(z)$在周线 C 上要变成无穷大.发现,为了保留原理的正确,需要对映射函数增长的阶数 μ 引入限制.就是,在上面所采用的条件与表示下以下定理成立.

定理 4 假如用条件

1″) 函数 $f(z)$,除了点 ζ_0外,在 D 中处处解析和在 $\bar{D}$ 中处处连续,而在该点的邻域属于 D 的部分中是 μ 阶无穷大,并且

$$\mu<(\beta+2)/\alpha \tag{3}$$

代替定理 2 的条件 1),那么边界对应原理仍保持有效.

为了证明,我们从区域 D 中割去一个以点 ζ_0为圆心的半径很小的圆 $|z-\zeta_0|<r$.圆周 $|z-\zeta_0|=r$ 的属于 D 内的那一段弧我们记作 γ_r,在割去了这圆后,周线 C 所余留下来的部分记作 C_r;周线 $C_r+\gamma_r$ 记作 $\tilde{C}$.对于曲线 $\tilde{C}$ 所围成的那个区域 $\tilde{D}$,边界对应原理便可以应用了.

设 w_0是区域 D^* 中的任意一个点.因为 w_0是有限的,而当 $z\to\zeta_0$时 $f(z)\to\infty$,所以总可以把圆的半径 r 选得如此小,使得函数 $f(z)$的那些 w_0 值点中,没有任何一个是在区域 D 的被割去的那个部分内的.这时 $N(w_0)$——在区域 D 内函数 $f(z)$ 的 w_0值点的个数——就将等于在区域 $\tilde{D}$ 内 $f(z)$的 w_0 值点的个数,于是根据辐角原理我们有:

$$N(w_0)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\tilde{C}}\arg[f(z)-w_0]=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_r}+\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_r}. \tag{4}$$

为了要计算第一项的值,我们注意,当点 z 沿着 C_r 行经一次时,它的对应点 w 也按正方向沿着整条曲线 C^* 行经一次,不过 C^* 的位于点 $w=\infty$的小邻域内的某一段弧要除外.所以

$$\Delta_{C_r}=\Delta_{C_r^*}\arg(w-w_0)=(2-\beta)\pi+O(r), \tag{5}$$

其中 C_r^* 是弧 C_r 的像,$O(r)$表示与 r 一同趋于零的一个量(以后在需要的时候,我们

就将使用这个记号,并且它可以用来表示实数的量,也可以用来表示复数的量).

要计算(4)式中的第二项,我们利用条件(2),并把 $f(z)$ 在点 ζ_0 的邻域内表示成

$$f(z)=\frac{1}{(z-\zeta_0)^\mu}[A+O(r)]$$

的形状.于是便可以得到:

$$\Delta_{\gamma_r}=\Delta_{\gamma_r}\arg\frac{A+O(r)-w_0(z-\zeta_0)^\mu}{(z-\zeta_0)^\mu}=\Delta_{\gamma_r}\arg[A+O(r)]-\mu\Delta_{\gamma_r}\arg(z-\zeta_0),$$

因为,当 $r\to 0$ 时,$w_0(z-\zeta_0)^\mu\to 0$,所以无穷小 $w_0(z-\zeta_0)^\mu$ 可以包括在记号 $O(r)$ 的里面.由于 $A\neq 0$ 而且是一个常数,所以式中的第一项当 $r\to 0$ 时趋于零,并且,从图 40 中可以看出

$$\Delta_{\gamma_r}\arg(z-\zeta_0)=-\alpha\pi+O(r),$$

所以

$$\Delta_{\gamma_r}=\alpha\mu\pi+O(r). \tag{6}$$

把表达式(5)与(6)代入式(4)中,我们求得:

$$N(w_0)=1+\frac{\alpha\mu-\beta}{2}+O(r),$$

当 $r\to 0$ 时,从这里便得出

$$N(w_0)=1+\frac{\alpha\mu-\beta}{2}. \tag{7}$$

根据我们采用的对 $f(z)$ 的增长的限制(3),在点 ζ_0 的邻域内我们有 $\alpha\mu-\beta<2$,所以由公式(7)我们得出 $N(w_0)<2$.另一方面,

$$N(w_0)=\frac{1}{2}(2-\beta+\alpha\mu)>0,$$

因为我们有 $\alpha\mu>0$ 并且 $\beta\leqslant 2$.可是在开区间(0,2)内只有唯一的一个整数 1,所以,$N(w_0)=1$.

我们已经证明了:区域 D^* 中的每一个值 w_0,函数 $f(z)$ 在 D 内都必取到一次而且也只取到一次.如果点 w_0 位于区域 D^* 的外面,那么我们上面所作的推理也可以完全保存,不过要在(5)式中用 $-\beta\pi$ 来取代 $(2-\beta)\pi$,那时我们便不是得到公式(7),而是得到

$$N(w_0)=\frac{\alpha\mu-\beta}{2}. \tag{8}$$

所以在这情形中 $-1<N(w_0)<1$,而因此,$N(w_0)=0$,这就是说,函数 $f(z)$ 在区域 D 内不取任何一个不属于 D^* 的值.由此可见,函数 $w=f(z)$ 实施一个把 D 映到 D^* 上的单叶映射.定理于是得证.

注意:在所设的那些条件之下,我们有

$$\mu=\frac{\beta}{\alpha}$$

(这可以从上面的公式(7)或公式(8)看出),这就是说,在点 ζ_0 的邻域内有

$$f(z)=\frac{A}{(z-\zeta_0)^{\frac{\beta}{\alpha}}}[1+O(r)]. \tag{9}$$

特别,设 $\alpha=\beta=1$,这就是说,ζ_0 与 $w=\infty$ 都不是角点.那时不等式(3)就具有 $\mu<3$ 的形状.因此,函数 $f(z)$ 在点 ζ_0 的邻域内必须是低于三阶的无穷大.我们在前面所举过的函数 $w=z^3$ 的例子便说明了,只有在这所说的情形下定理才是正确的,即,在三阶无穷大时,已经不能再确保映射是单叶的了.

最后,我们来指出这样的一个事实:

如果 $w=\infty$ 是周线 C^* 的多重点,那么为了要边界对应原理仍然成立,只需要条件(3)至少被周线 C 上对应于点 $w=\infty$ 的一个点 ζ_0 所满足便够了.*

实际上,我们把所有对应于点 $w=\infty$ 的那 n 个点 ζ_k 的邻域都用小圆 $|z-\zeta_k|<r_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 来去掉(n 是点 $w=\infty$ 的重数),而把余留下来的区域记作 $\tilde{D}$.对于任何一个不在 C^* 上的(因之,是有限的)值 w_0 来说,我们总可以把 r_k 选得如此小,使得在区域 D 与 $\tilde{D}$ 中,函数 $f(z)$ 的 w_0 值点的个数是一样的.现在我们使 r_0 趋于零,其余的 $r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}$ 都固定不动.上述定理的证明在这里完全可用,所以,对于 D^* 内所有的点 w_0 来说,都有 $N(w_0)=1$,而对于不属于 D^* 的 w_0 来说,都有 $N(w_0)=0$.这便是所要证明的.

在下一节中,我们将举一些应用边界对应原理的例子.

30. 例题

(1) 函数

$$w=\frac{4z}{(1+z)^2} \tag{1}$$

在单位圆的边界上取值

$$w=\frac{4e^{i\varphi}}{(1+e^{i\varphi})^2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

所以,它在单位圆周与射线 $u\geqslant1,v=0$ 的点之间,建立起一种双向单值的对应关系.这个对应关系除了在点 $\zeta_0=-1$ 处外是处处连续的,在点 ζ_0 的邻域内

$$w\approx\frac{-4}{(1+z)^2}.$$

在这里可以应用上一目中的定理 4,因为 $\alpha=1,\beta=2$,并且条件(3)是满足的.所以,函数(1)实施一个单叶共形映射,把圆 $|z|<1$ 映到从 w 平面中去掉射线 $u\geqslant1,v=0$ 所得到的那个区域上.在图 41 中画出了在所说的这个映射下互相对应的曲线族.在 w 平面中的曲线族是正交的,因为它是 z 平面中的正交曲线族(由圆周 $|z|=\text{const}$ 与它们的半径所形成的)经过共形映射所成的像.

(2) 讨论更一般的情形,函数

---

* 这样的点的个数,等于对区域 D^* 来说的边界点 $w=\infty$ 的重数.

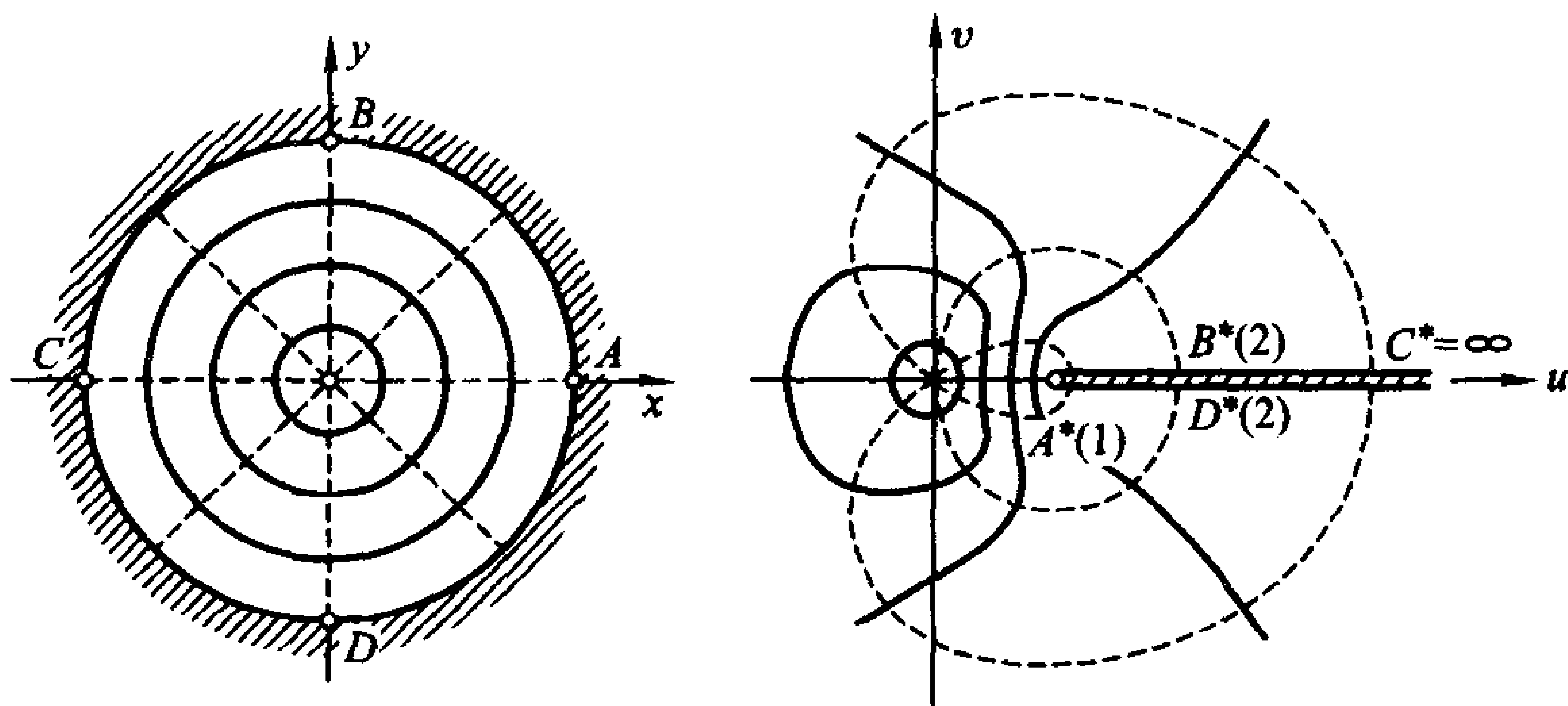


图 41

$$w=\sqrt[n]{4}\frac{z}{(z^n+1)^{\frac{2}{n}}} \tag{2}$$

在 $n=1$ 时与前面例子完全一样.在单位圆周上取值

$$w=\sqrt[n]{4}\cdot\frac{e^{i\varphi}}{(e^{in\varphi}+1)^{\frac{2}{n}}}=\frac{1}{\left(\cos\frac{n\varphi}{2}\right)^{\frac{2}{n}}}.$$

我们在单位圆周上标出正 n 边形的顶点:

$$A_k=e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

以及由它们所形成的那些弧的中点:

$$B_k=e^{i(2k-1)\frac{\pi}{n}}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

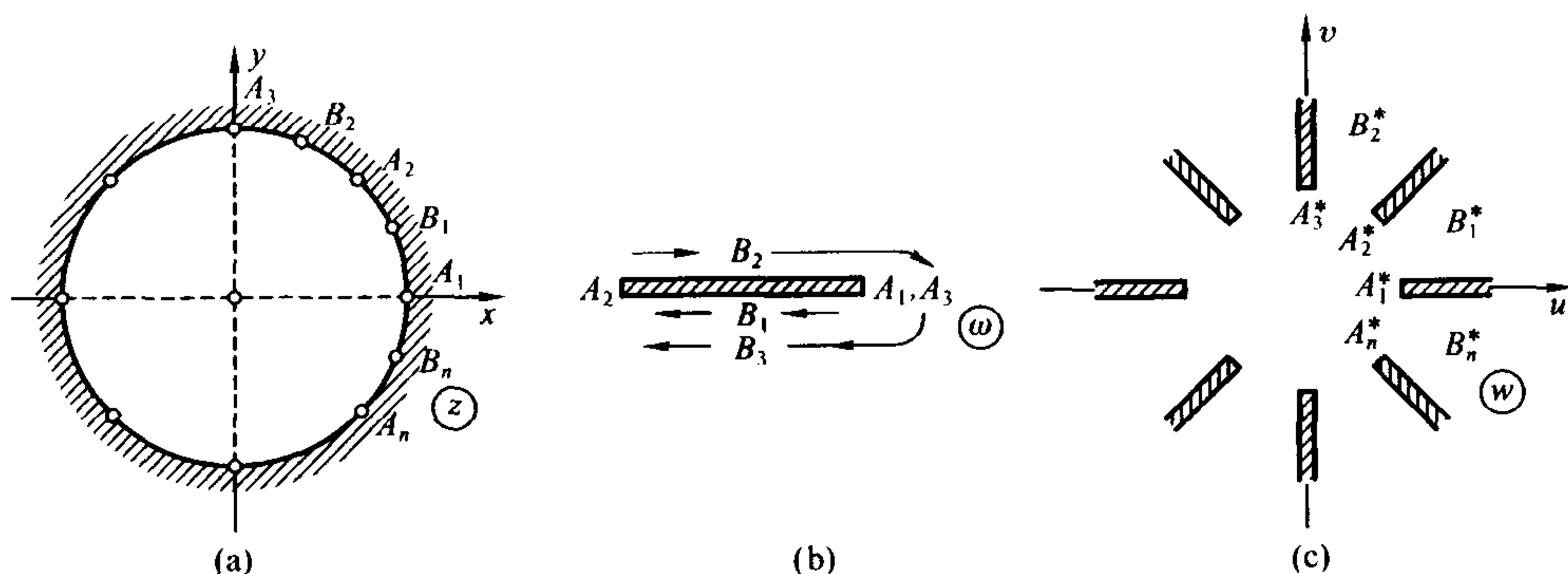
(图 42).量 $\omega=\cos\frac{n\varphi}{2}$在弧 A_1B_1上从 1 减小至 0(我们约定认为在这弧上 $\arg\omega=0$),在弧 B_1A_2上它从 0 变到 -1 (我们约定认为在这弧上 $\arg\omega=-\pi$);在弧 A_2B_2上它从 -1 变到 0 (认为 $\arg\omega=-\pi$);在弧 B_2A_3上它从 0 变到 1 (认为 $\arg\omega=-2\pi$),如此类推(图 42(b)).与此相应,在 A_1B_1段上,对应点 w 的模从 1 增大到∞,而其辐角等于 0;在 B_1A_2段上,$|w|$从∞减小到 1,$\arg\omega=\frac{2\pi}{n}$;在 A_2B_2段上,$|w|$从 1 增大到∞ $\left(仍旧 \arg\omega=\frac{2\pi}{n}\right)$;在 B_2A_3段上,$|w|$从∞减小到 1,$\arg\omega=2\cdot\frac{2\pi}{n}$;如此类推.因此,点 w 依次遍历 n 条射线:

$$\arg\omega=(k-1)\frac{2\pi}{n},|w|\geqslant 1\quad(k=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

并且每一条射线都按照彼此相反的方向被通过两次(参看图 42(c)).圆周$|z|=1$ 在我们这个映射下的像,以点 $w=\infty$为它的 n 重点,这个 n 重点对应着圆周上的 n 个点 B_k $(k=1,2,\cdots,n)$.因为每一个点 B_k都是 z^n+1 的零点,并且都是单点,所以在点 B_k的邻域内

$$w\approx\frac{C_k}{(z-B_k)^{\frac{2}{n}}},$$

其中 C_k是一个常量.根据边界对应原理(定理 4,现在在定理中有 $\alpha_k=1,\beta_k=\frac{2}{n}$),函数(2)实施一



(a) (b) (c)

图 42

个把圆$|z|<1$映到去掉了 n 条射线(3)的 w 平面上去的单叶共形映射.

(3) 对 w 平面再作添加的变换 $w=\frac{1}{w_1}$,我们便得到一个映射

$$w=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\cdot\frac{(z^n+1)^{\frac{2}{n}}}{z} \tag{4}$$

这映射把单位圆映到由 n 条射线

$$|w|\leqslant 1,\quad \arg\omega=(k-1)\frac{2\pi}{n},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

所构成的一个"星形"的外部上(图 43,我们仍然用 w 来代替 w_1).当 $n=2$ 时,我们得到

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

这便是茹科夫斯基映射(见第 7 目).

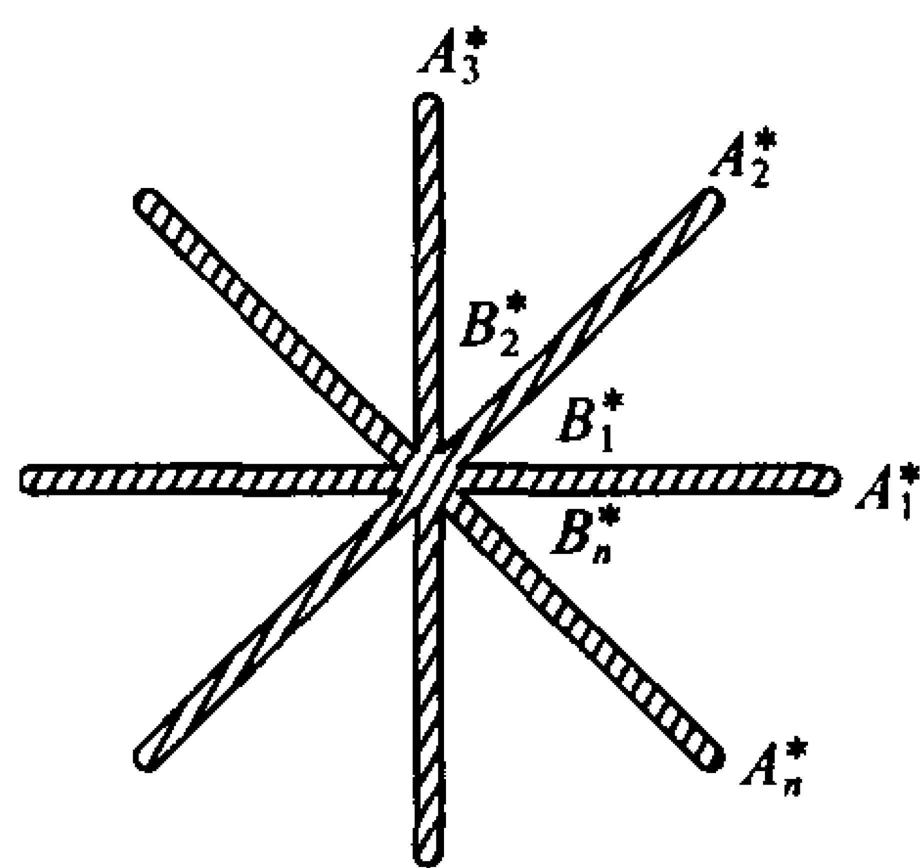


图 43

(4) 现在我们来考虑去掉了 n 条长度等于a 的线段

$$1-a\leqslant|z|\leqslant 1,\quad \arg z=(k-1)\frac{2\pi}{n},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

的单位圆$|z|<1$ (图 44(a)). 用上面同样的方法容易验证上一例中的函数.

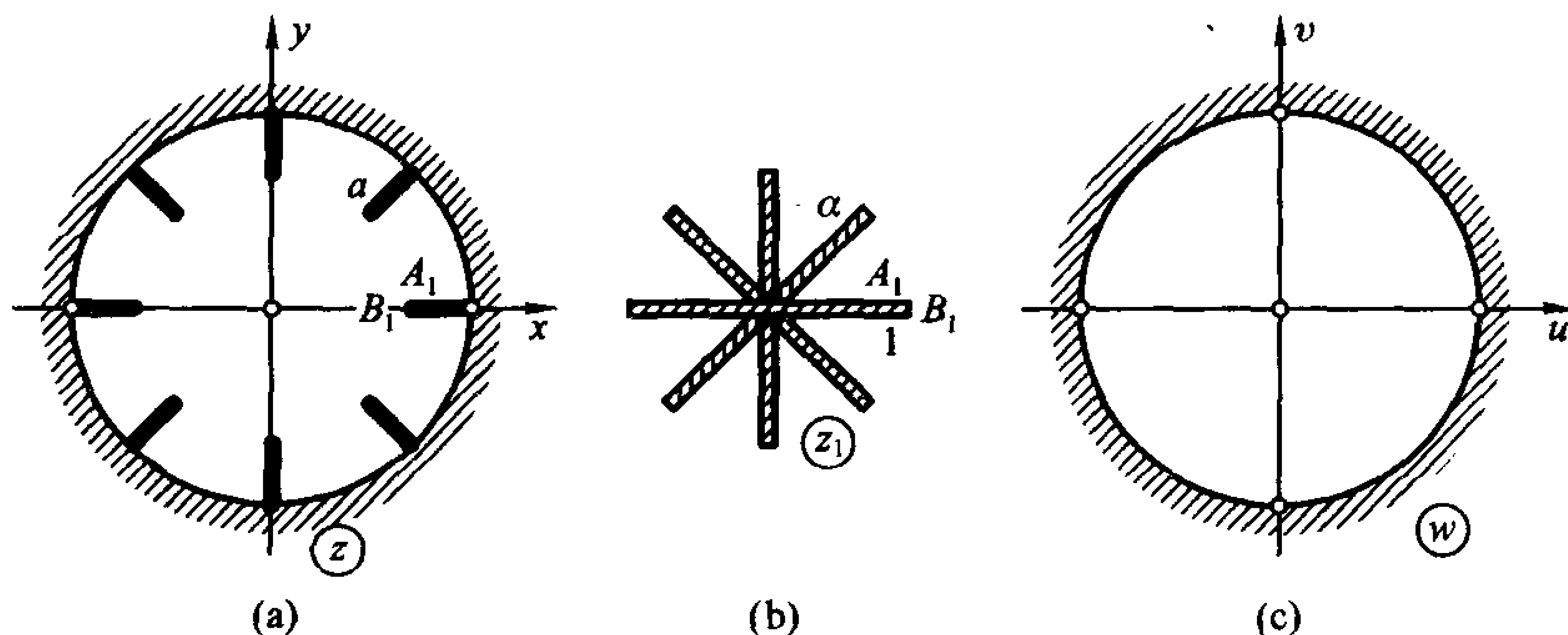
$$z_1=f(z)=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\frac{(z^n+1)^{\frac{2}{n}}}{z}$$

把这区域映到一个由 n 条长度为

$$1+\alpha=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\frac{[(1-a)^n+1]^{\frac{2}{n}}}{1-a} \tag{7}$$

的射线所构成的"星形"的外部上,这个星形是与星形(6)相似的(图 44(b)). 我们可以用相似变换 $z_2=\frac{z_1}{1+\alpha}$把这星形中的射线都变换成长度等于 1 的线段,于是函数(4)的反函数

$$w=g(z_2)=[z_2^{n/2}+(z_2^n-1)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{2}{n}}, \tag{8}$$



(a) (b) (c)

图 44

把这个星形的外部变换到单位圆的内部上. 因此, 函数

$$w=g\left[\frac{1}{1+\alpha}f(z)\right] \tag{9}$$

实施一个把去掉了 n 条线段(6)的单位圆映到单位圆的内部上去的共形映射.

公式(9)在展开形式中是十分累赘的,因此为了方便计算,对获得近似公式表现出极大兴趣. 设想量 a 很小,并且从(7)中把比 a^2 更高阶的无穷小量略去,根据泰勒公式

$$\alpha\approx\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\left[2-na+\frac{n(n-1)}{2}a^2\right]^{\frac{2}{n}}\cdot(1+a+a^2)-1\approx\frac{na^2}{4},$$

类似地,再略去比 α 高阶的无穷小量,

$$z_2=\frac{1}{1+\alpha}f(z)\approx(1-\alpha)\left(\frac{z^n+1}{2z^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{2}{n}}$$

并且根据公式(8)

$$w\approx\left[\left(1-\frac{n\alpha}{2}\right)\frac{z^n+1}{2z^{\frac{n}{2}}}+\sqrt{(1-n\alpha)\frac{(z^n+1)^2}{4z^n}-1}\right]^{\frac{2}{n}}$$
$$\approx z\left(1+\alpha\,\frac{1+z^n}{1-z^n}\right).$$

把上面求出的 α 值代入此式,最终我们得到

$$w=z\left(1+\frac{na^2}{4}\cdot\frac{1+z^n}{1-z^n}\right). \tag{10}$$

这公式对于不太邻近于点 $A_k=e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}$ 的那些点都适用. 当 $a=0$ 时,我们得出 $w\equiv z$,这是十分自然的.

(5) 我们来考虑函数

$$w=z+e^z. \tag{11}$$

令 $z=x+iy, w=u+iv$,便有

$$\left.\begin{aligned}u&=x+e^x\cos y,\\v&=y+e^x\sin y,\end{aligned}\right\}$$

从这里可以得出:在作为带形 $-\pi<y<\pi$ 的边界的那两条直线 $y=\pm\pi$ 上,关系式 $u=x-e^x, v=\pm\pi$ 成立. 这便是说,这两条直线在映射下变换成各被通过两次的两条射线 $-\infty<u<-1, v=\pm\pi$

(函数 $u=x-e^x$ 在 $x=0$ 时达到其最大值 $u=-1$). 我们不能对它应用边界对应原理,但是对这函数的直接研究指明了:实施一个共形映射,把带形 $-\pi<y<\pi$ 映到由 w 平面中去掉两条射线 $-\infty<u<-1, v=\pm\pi$ 而得到的那个区域上. 图 45 上画出在这映射下线的对应关系(引入了区域的上半部分,而下半部分的映射是对称的.)

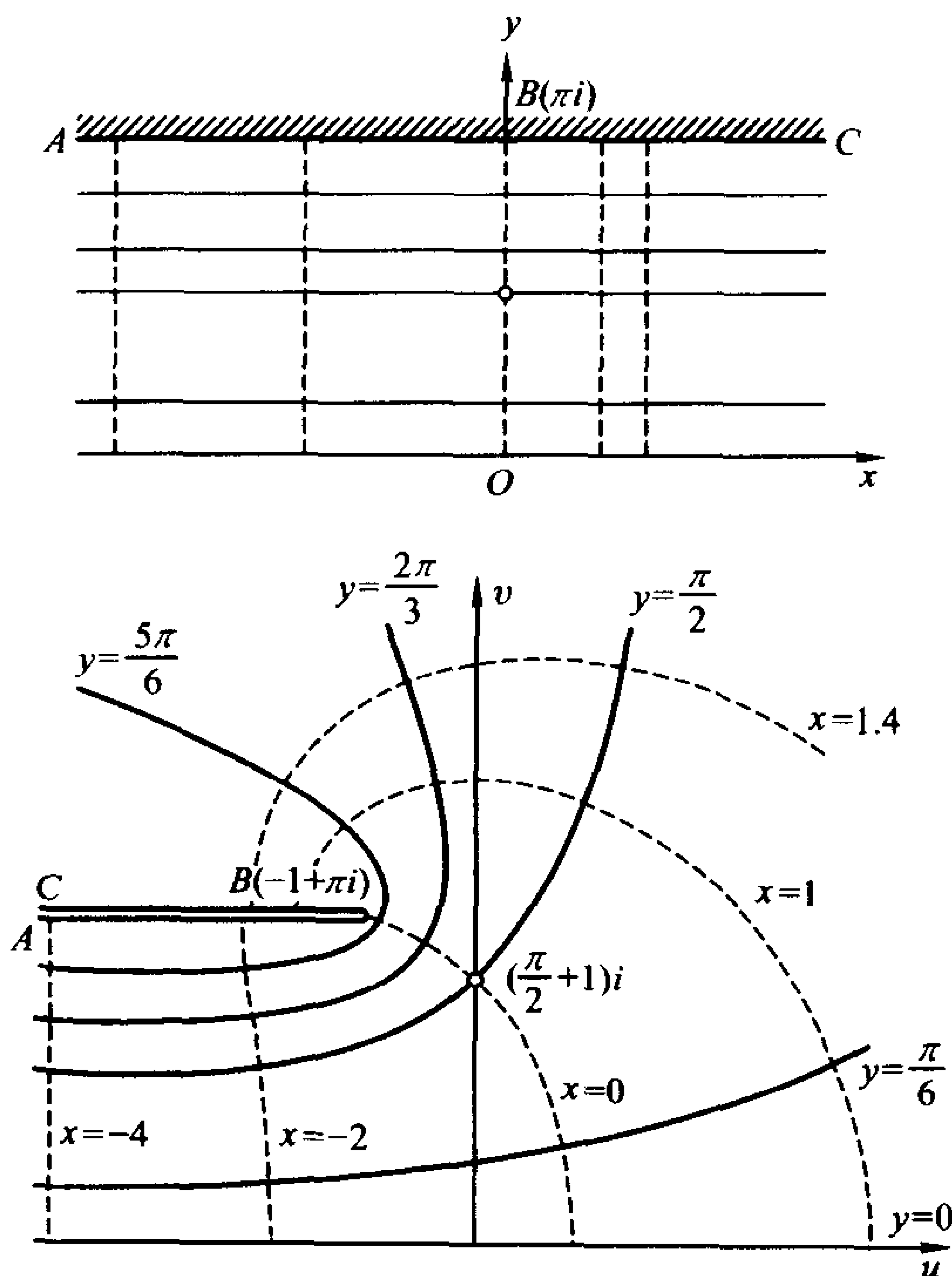


图 45

(6) 指数函数

$$w=e^z \tag{12}$$

把两条平行的倾斜直线

$$y=k(x-a_1),\quad y=k(x-a_2)\quad (k\neq 0,\neq\infty)$$

映射到两条曲线

$$w=e^x\cdot e^{ik(x-a_v)}\quad (v=1,2).$$

在 w 平面内引进极坐标 $w=\rho e^{i\theta}$,我们得到 $\rho=e^x,\theta=k(x-a_v)$,或

$$\rho=\rho_v e^{\frac{\theta}{k}}, \tag{13}$$

其中 $\rho_v=e^{a_v}(v=1,2)$. 这是两条相似的对数螺线. 假如 $k=a_2-a_1<2\pi$,那么在平面 z 中直线之间的垂直线段的长小于 2π,并且在它们之间的带中映射是单叶的(见第 8 目). 使 a 从 a_1 变到 a_2,我们确信,指数函数(12)实施把一个以直线为边的带形映到一个包含在两条对数螺线之间的带形上去的一个映射(图 46). 如果 $k(a_2-a_1)=2\pi$,那么两条螺线重合,并且我们得到映到去掉螺线的平面的映射. 在 $k(a_2-a_1)>2\pi$ 时映射不是单叶的.

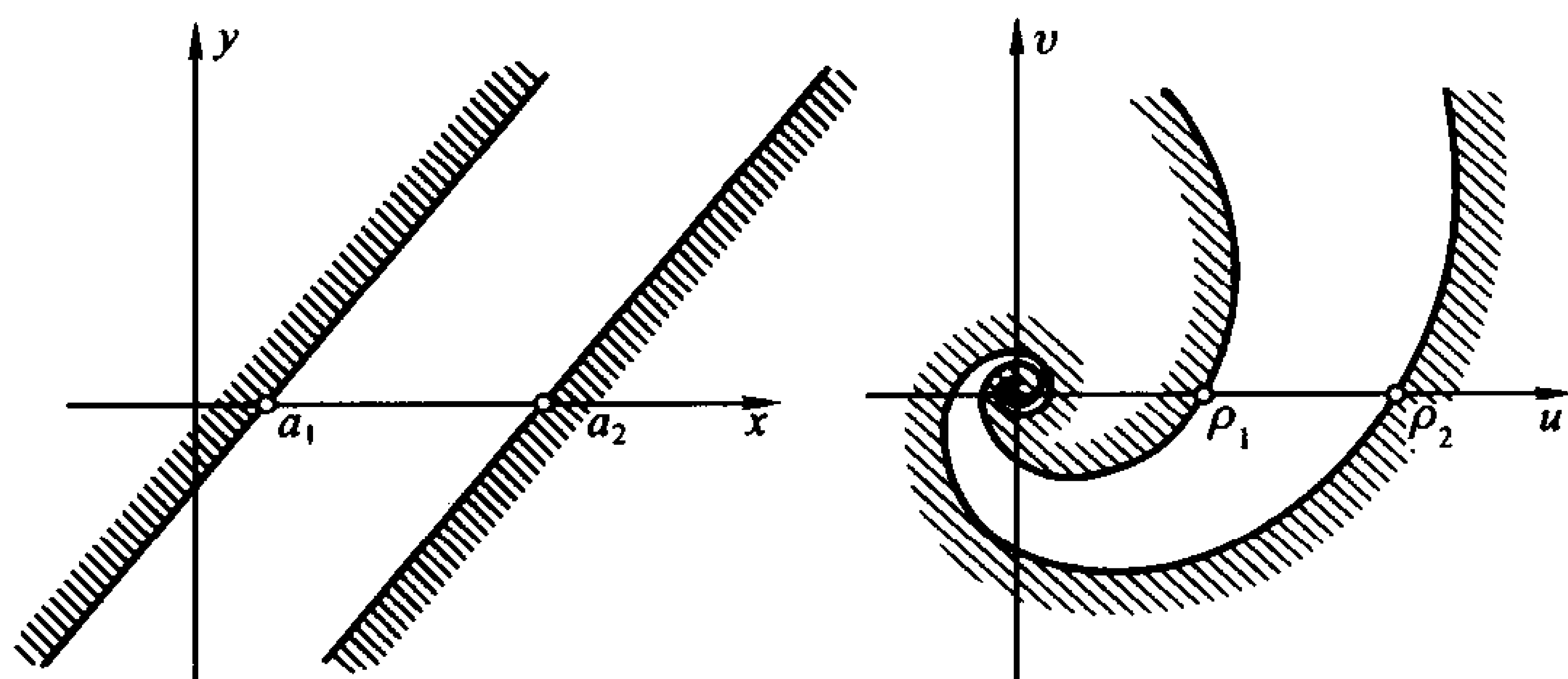


图 46

(7)　函数

$$w = \ln \frac{1}{1-z} \tag{14}$$

在单位圆的边界上取值

$$w = \ln \frac{1}{1-e^{i\varphi}} = \ln \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}} + i\,\frac{\pi-\varphi}{2}.$$

我们令 $w = u + iv$,并消去参数 φ,便得出单位圆周 $|z| = 1$ 在这映射下的像的方程:

$$u = \ln \frac{1}{2\cos v}. \tag{15}$$

这是等阻力的悬链线(图 47).根据边界对应原理,我们有:函数(14)实施一个把单位圆映到曲线(15)的内部上去的共形映射.

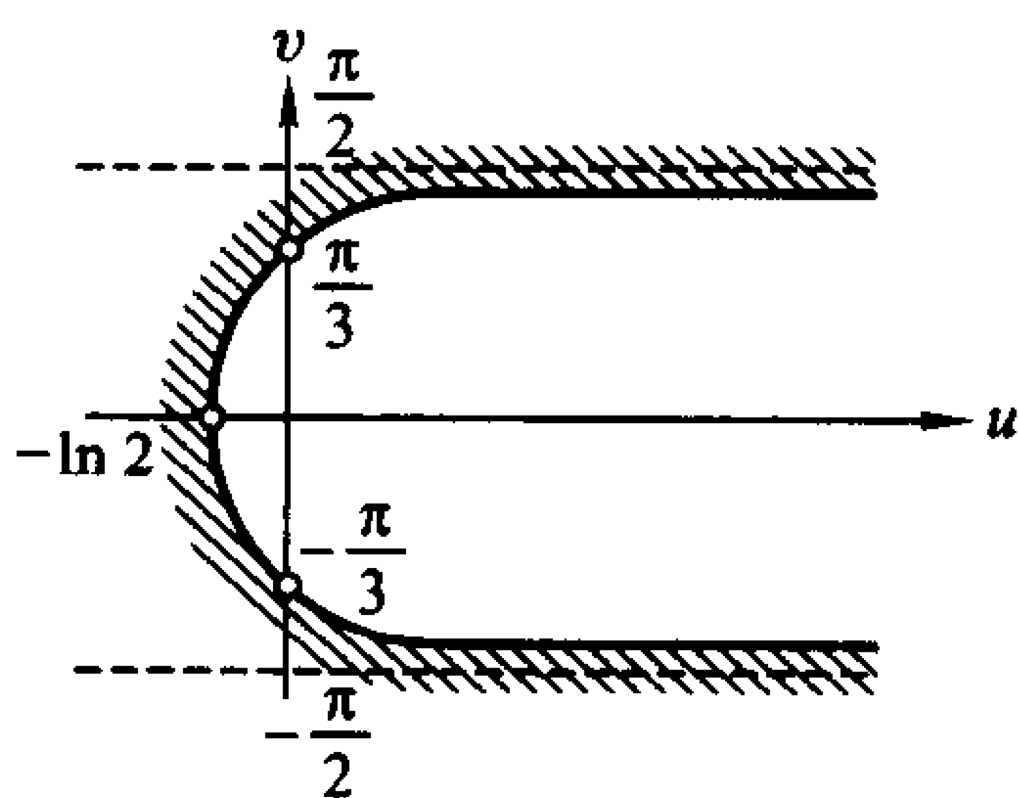


图 47

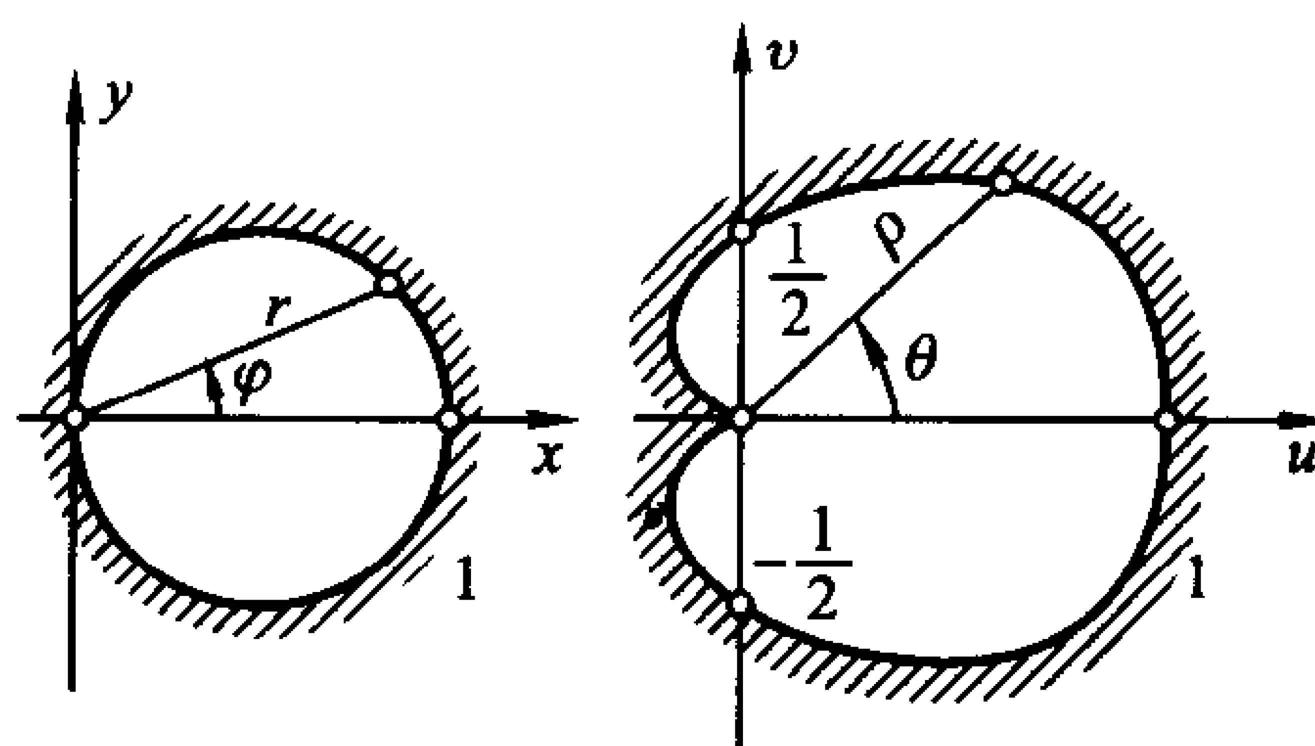


图 48

(8)　函数

$$w = z^2, \tag{16}$$

或,在极坐标内

$$\rho = r^2, \theta = 2\varphi,$$

把圆周 $r = \cos\varphi$ 变换成心脏线

$$\rho = \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \tag{17}$$

(图 48).根据边界对应原理,函数(16)实施一个把这圆周的内部映到心脏线的内部上去的共形映射.

(9) 函数

$$w=\sqrt{z} \tag{18}$$

或
$$\rho=\sqrt{r}, \theta=\frac{\varphi}{2},$$

其中 $\varphi=\arg z$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$，把上一例题中的那个圆周 $r=\cos\varphi$ 变换成双曲线的一个分支

$$\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$$

(图 49). 根据边界对应原理，函数(18)实施一个把这圆周的内部映到双曲线右面那一个分支的内部上去的共形映射.

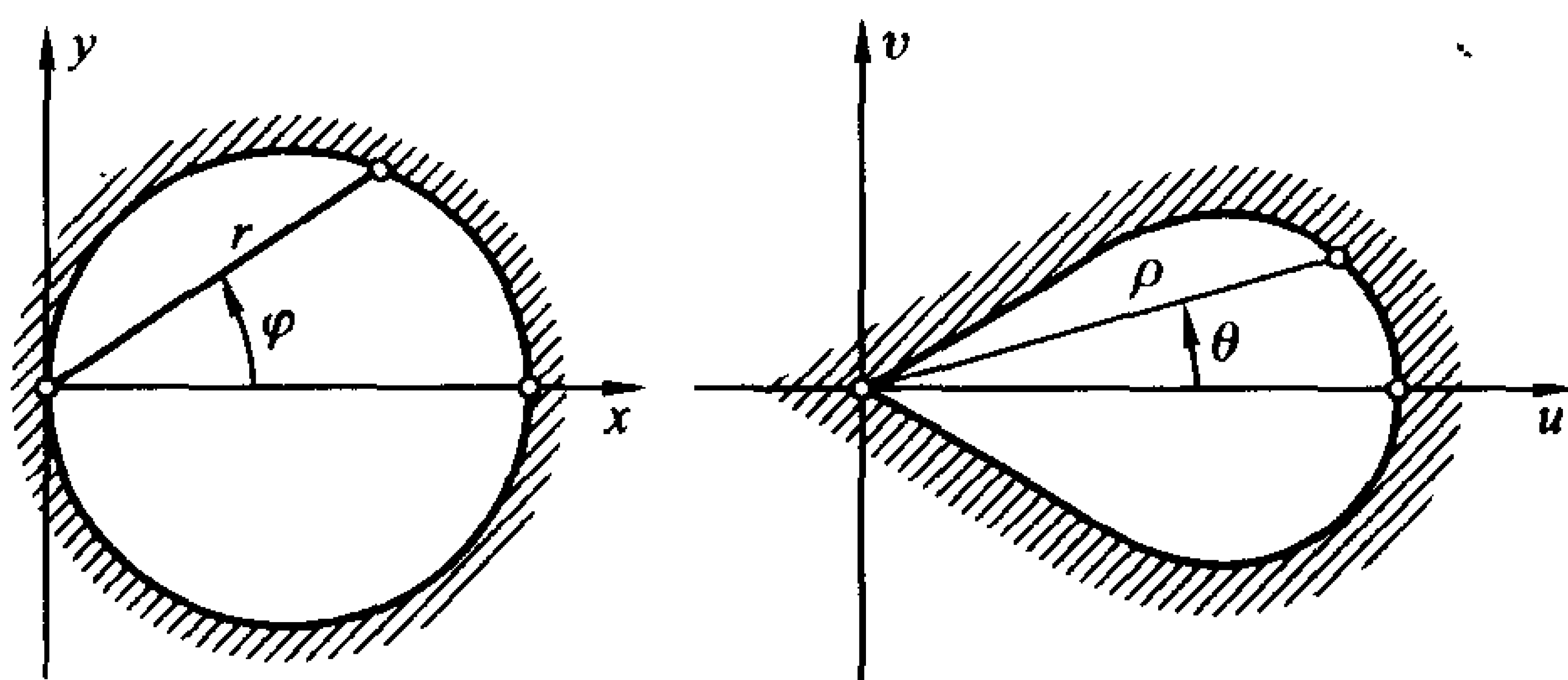


图 49

§2 一些最简单的共形映射

这一节是用来讲解共形映射理论的基本问题的一些最简单的方法的. 这就是寻找一个函数，由它来实施把一给定的区域共形映射到另一个区域的问题. 在这里我们将举出充分多的例题，使读者可以借此认识到，怎样选择适当的初等函数的组合(如果这是可以做得到的话)，来解决共形映射理论的这一问题. 这样的选择首先要求能自由地掌握初等函数的几何学，所以，我们建议读者在读第 33 目与第 34 目之前，去把第一章中的 §3 重看一遍，在那里曾引述了一些可以由初等函数实施的映射. 在这里，我们也给予求共形映射的近似公式方法以很大篇幅. 这类方法对于实用来说特别重要.

在从事最简单的共形映射时，往往需要用到分式线性函数——我们现在就开始来研究它们的几何性质. 我们要指出，由分式线性函数所实施的那些映射，是与罗巴切夫斯基几何学十分密切地联系着的，但是我们不可能在这里来说明这种联系. *

31. 分式线性映射 由分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

所实施的那种映射，我们称做**分式线性映射**，其中 a,b,c 与 d 都是复数常数，并且

---

* 见 б. В. шабат[3]

$ad-bc\neq 0$*. 函数(1)是定义在整个 z 平面上的(我们认为它在点 $z=-\frac{d}{c}$ 处的值等于∞,在点 $z=\infty$ 处的值等于 $\lim_{z\to\infty} w=\frac{a}{c}$).

由于它的导数

$$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \tag{2}$$

当 $z\neq -\frac{d}{c}$ 时是处处存在的,所以函数(1)在整个 z 平面上除了一个点 $z=-\frac{d}{c}$ 处外是处处解析的,而在这个点 $z=-\frac{d}{c}$ 处它有一个一阶极点. 方程(1)可以就 z 单值地解出:

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a}, \tag{3}$$

并且函数(3)也是定义在整个 w 平面上的(它在点 $w=\frac{a}{c}$ 处的值认为等于∞,在点 $w=\infty$ 处的值等于 $-\frac{d}{c}$). 所以分式线性函数实施一个把整个 z 平面映到整个 w 平面上去的单叶映射.

容易看出,线性分式函数是唯一一个具有这种性质的函数. 即下述定理成立:

定理 1 如果一个函数 $f(z)$ 在整个 z 平面上除了点 C 处以外处处都是解析和单叶的,那么它必定是一个分式线性函数.

事实上,点 C 不可能是函数 $f(z)$ 的一个本性奇点,因为如果 C 是一个本性奇点的话,那么根据索霍茨基定理(第 22 目),$f(z)$ 就明显不是单叶的了. 根据刘维尔定理(用第 24 目中的形式),C 也不可能是一个可去奇点. 所以,点 C 是一个极点,而且是一阶的,因为在高阶极点的邻域内,函数仍旧不是单叶的. 如果 $C\neq\infty$,那么函数 $f(z)$ 在点 C 的邻域内的主要部分有 $\frac{B}{z-C}$ 的形状,从 $f(z)$ 中减去它,我们得到一个在整个平面内没有奇点的函数 $\varphi(z)=f(z)-\frac{B}{z-C}$ (点 C 可以是函数 $\varphi(z)$ 唯一的奇点,但它是一个可去奇点,因为我们已经从 $f(z)$ 中把主要部分减去了). 因此,$\varphi(z)\equiv A$ 是一个常数,所以函数

$$f(z)=A+\frac{B}{z-C}$$

是一个分式线性函数. 如果 $C=\infty$,那么函数 $f(z)$ 的主要部分呈 Az 的形状,所以用完全同样的方法可以证明: $f(z)=Az+B$,即,$f(z)$ 是一个线性整函数. 定理于是便

---

* 当 $ad-bc=0$ 时,我们有 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,于是函数(1)就成为一个常数.

已证明.

式(3)表明,分式线性函数的反函数仍旧是一个分式线性函数. 容易证实,由分式线性函数所构成的复合函数,也还是分式线性函数.

我们来说明分式线性函数的几何性质.

如果 $c=0$,那么函数(1)便成为一个线性整函数,它的几何性质我们已经在第4目中讨论过了. 要研究当 $c\neq 0$ 时函数(1)的几何性质,我们把它表示成

$$w=A+\frac{B}{z-C} \tag{4}$$

的形状,其中 A,B 与 C 是三个常数*,然后再把这映射看作是由

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{a})\quad z_1=z-C;\\ &(\mathrm{b})\quad z_2=\frac{1}{z_1};\\ &(\mathrm{c})\quad w=A+Bz_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

这三个映射所组成的一个复合映射. 映射(a)是一个平移,(c)是一个平移同一个伴随着延伸变换的旋转. 余下还要研究映射(b),改变记号,我们可以把它改写成

$$w=\frac{1}{z} \tag{6}$$

的形式. 使用极坐标 $z=re^{i\varphi}, w=\rho e^{i\theta}$,可以把映射(6)改写成

$$\rho=\frac{1}{r}, \theta=-\varphi \tag{7}$$

的形状. 把映射(7)看作是由下面两个在几何意义上更直观的映射所构成的:

$$(\alpha)\ \rho_1=\frac{1}{r}, \theta_1=\varphi; \qquad (\beta)\rho=\rho_1, \theta=-\theta_1,$$

利用它们来讨论,比较方便.

映射(β)是一个关于实轴的对称变换. 映射(α)是一个反演——一个关于单位圆周的对称变换(参看第2目).

一般地讲,如果

1) 两个点 z 与 z^* 都位于同一条通过点 z_0 的射线上;

2) $|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=R_0^2$.

我们就把这两个点 z 与 z^* 称做是**关于圆周** $C_0:|z-z_0|=R_0$**对称的**(在第2目中所说的对称点的构成方式,在一般的情况下仍是正确的).

把平面中的每一个点 z 都转换成它的关于圆周 C_0 对称的点 z^* 的那种变换,叫做关于这个圆周 C_0 的**对称**,或者叫做**反演**.

我们来证明关于对称点的一个基本性质:当且仅当点 z 与 z^* 是一束同圆周 C_0

* 要把函数(1)表示成(4)的形状,只需在表达式(1)中,按照多项式除法的规则,用分母来除分子就行了.

正交的圆周的顶点时,这两个点是关于圆周 C_0 对称的.

事实上,设点 z 与 z^* 是关于圆周 C_0 对称的,Γ 是经过 z 与 z^* 的任意一个圆周(图 50).经过点 z_0 作圆周 Γ 的切线.根据已知的几何定理,这切线长度的平方 $|z'-z_0|^2$ 等于割线 $|z^*-z_0|$ 与它在圆外的部分 $|z-z_0|$ 的乘积,即,

$$|z'-z_0|^2=|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|.$$

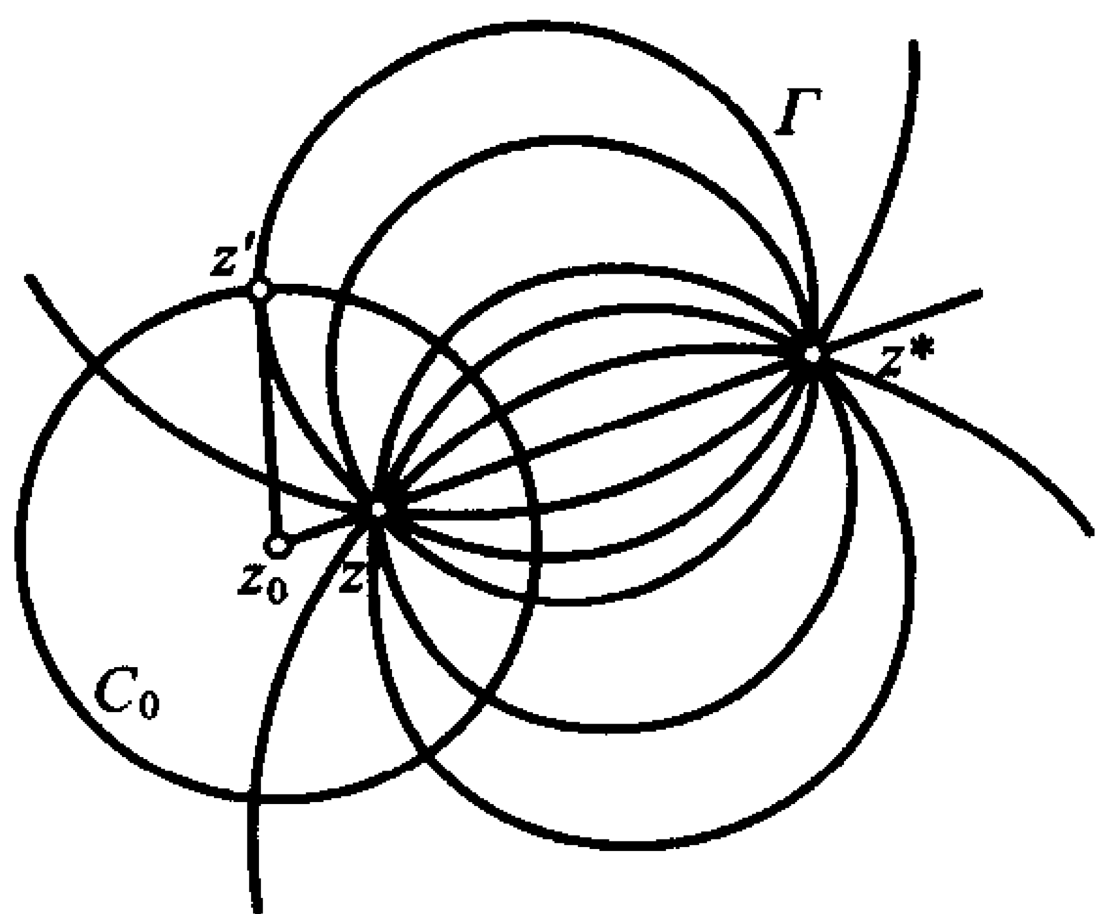


图 50

因为 z 与 z^* 是关于 C_0 对称的,所以这个乘积等于 R_0^2,于是便有 $|z'-z_0|=R_0$.因此,Γ 的这条切线是圆周 C_0 的半径,而这也就是说,Γ 同 C_0 正交.

反过来说,如果点 z 与 z^* 是一束同圆周 C_0 正交的圆周 $\{\Gamma\}$ 的顶点,那么这两个点必定都位于一条通过 z_0 的射线上,因为这射线也是属于所说的圆周束的*.又,任何一个圆周 Γ 的经过 z_0 的切线 z_0z',都是圆周 C_0 的半径,并且根据同一定理有

$$|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=R_0^2,$$

这就是说,z 与 z^* 是关于 C_0 对称的点.定理完全证毕.

顺便提一下,由这个性质就可以导出:当圆周 C_0 退化成一条直线时,关于圆周的对称就化为通常的对称.

关于任意一个圆周 C_0 的反演,是一种第二类的共形映射(变更序向的).事实上,设 z_0 与 R_0 是圆周 C_0 的圆心与半径,那么点 z 的关于 C_0 的对称点 z^*,可以用公式

$$z^*=z_0+\frac{R_0^2}{\bar{z}-\bar{z}_0} \tag{8}$$

写出,因为,由这个公式推得:

$$|z^*-z_0|\cdot|z-z_0|=R_0^2,\arg(z^*-z_0)=\arg(z-z_0).$$

所以,反演与共形映射

$$w=\bar{z}_0+\frac{R_0^2}{z-z_0}$$

只相差一个添加的关于 w 平面中实轴的对称变换,这便是说,它是一个第二类共形映射.随后我们要证明:*反演把完全平面上的任何一个圆周 C 仍旧变换成一个圆周*(圆性质).

事实上,我们先设圆周 C 通过圆周 C_0 的圆心 z_0 (图 51),我们就是关于这圆周 C_0 实施反演的.作与圆周 C_0 及 C 的圆心连线相垂直的一条直线 C^*,使它与点 z_0 的

* 在全平面内我们把直线看作圆的特殊情况,这是经过无穷远点的圆.

距离等于$\frac{R_0^2}{2R}$（R_0与R分别是C_0与C的半径）.由三角形$z_0\zeta^*z^*$与三角形$z_0z\zeta$的相似关系(图51)，我们有

$$\frac{|z-z_0|}{|\zeta^*-z_0|}=\frac{|\zeta-z_0|}{|z^*-z_0|},$$

或者

$$|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=|\zeta-z_0|\cdot|\zeta^*-z_0|=2R\cdot\frac{R_0^2}{2R}=R_0^2.$$

所以，点z与z^*是关于C_0对称的.因此我们已经证明了：圆周C上任意一个点z的对称点，都位于直线C^*上，这就是说，C^*是圆周C的反演.就特例说，如果C是经过点z_0的一条直线，那么，这直线的反演显然就是它自己.

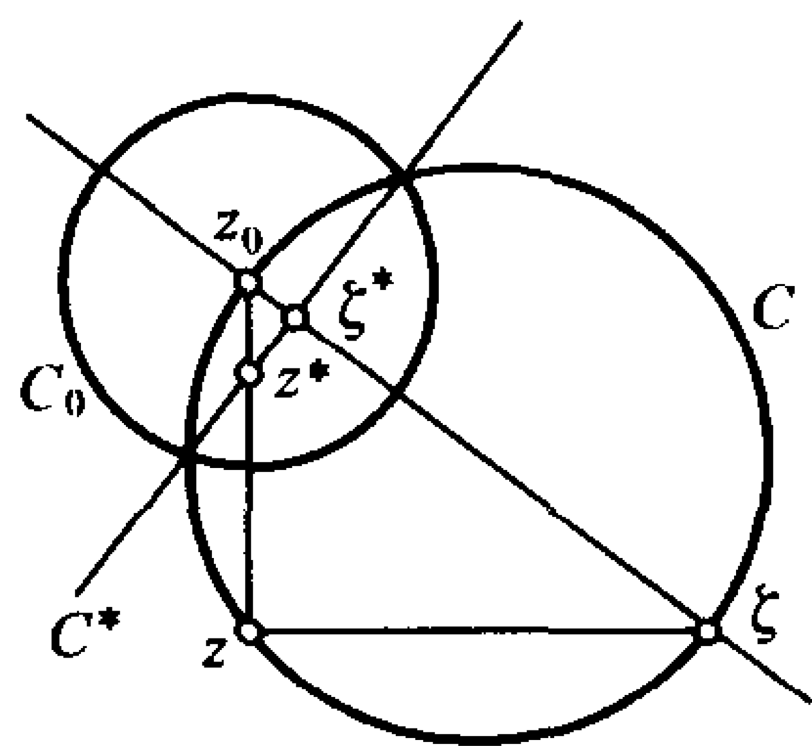


图 51

现在设圆周(或直线)C不通过z_0.作出点z_0的关于圆周C的对称点z_1，并考虑以z_0与z_1为顶点的圆周束$\{\Gamma\}$.因为所有的圆周Γ都通过z_0，所以，根据上面的证明，在关于C_0的反演下圆周束$\{\Gamma\}$便变换成直线束$\{\Gamma^*\}$.这直线束的顶点，显然是在点z_1的关于C_0的对称点z_1^*处.根据对称点的性质，$\{\Gamma\}$中所有的圆周都同C正交，又因为在反演下角度保持不变(我们已经证明过，它是第二类的共形映射)，所以圆周C的像C^*是同直线束$\{\Gamma^*\}$正交的.由此便知，C^*是一个圆周.所说的性质于是便已证明.

还可以完全同样地来证明反演的另一个重要性质：**反演把关于任意一个圆周C对称的任何一对点z_1与z_2，都变换成关于圆周C^*——圆周C在反演下的像——对称的一对点z_1^*与z_2^***（对称点保存性质）.

事实上，我们可以作一个以z_1与z_2为顶点的圆周束$\{\Gamma\}$.在反演下这圆周束变换成以点z_1^*与z_2^*为顶点的圆周束$\{\Gamma^*\}$.因为圆周Γ与C正交，所以圆周Γ^*也与C^*正交.由此便得出，点z_1^*与z_2^*是关于C^*对称的.所说的性质已经证明.

因为映射$w=\frac{1}{z}$是由两个对称变换构成的(关于单位圆周的对称变换(α)与关于一条直线的对称变换(β))，所以它也具有圆性质与对称点保存性质.由于构成任意一个分式线性映射的其余那些变换(公式(5)中的变换(a)与(c)，即，平移与伴随着延伸变换的旋转)，显然也都具有这两个性质，所以对于任意一个分式线性映射来说，这两个性质也仍旧成立.

我们将证明：任意一个分式线性映射(1)在完全z平面内都保持角度不变.

对于除了$z=-\frac{d}{c}$与$z=\infty$以外的所有的点z来说，这是很容易看出的，因为在

这样的点处总存在着$\frac{dw}{dz}\neq 0$ (见(2)式). 要想说在点 $z=-\frac{d}{c}$与$z=\infty$处保持角度不变,就必须先引进在无穷远点处的角度的概念. 这时可以把定义限制于两直线之间的角度上. 所谓在无穷远点处两直线之间的角度,我们理解为是这两条直线在第二个交点(有限点)处的交角而取相反的符号(在图 52(a)中,在无穷远处直线 I 与 II 之间的角度 α 是负的). 显然,变换(a)与(c)都处处保持角度不变.

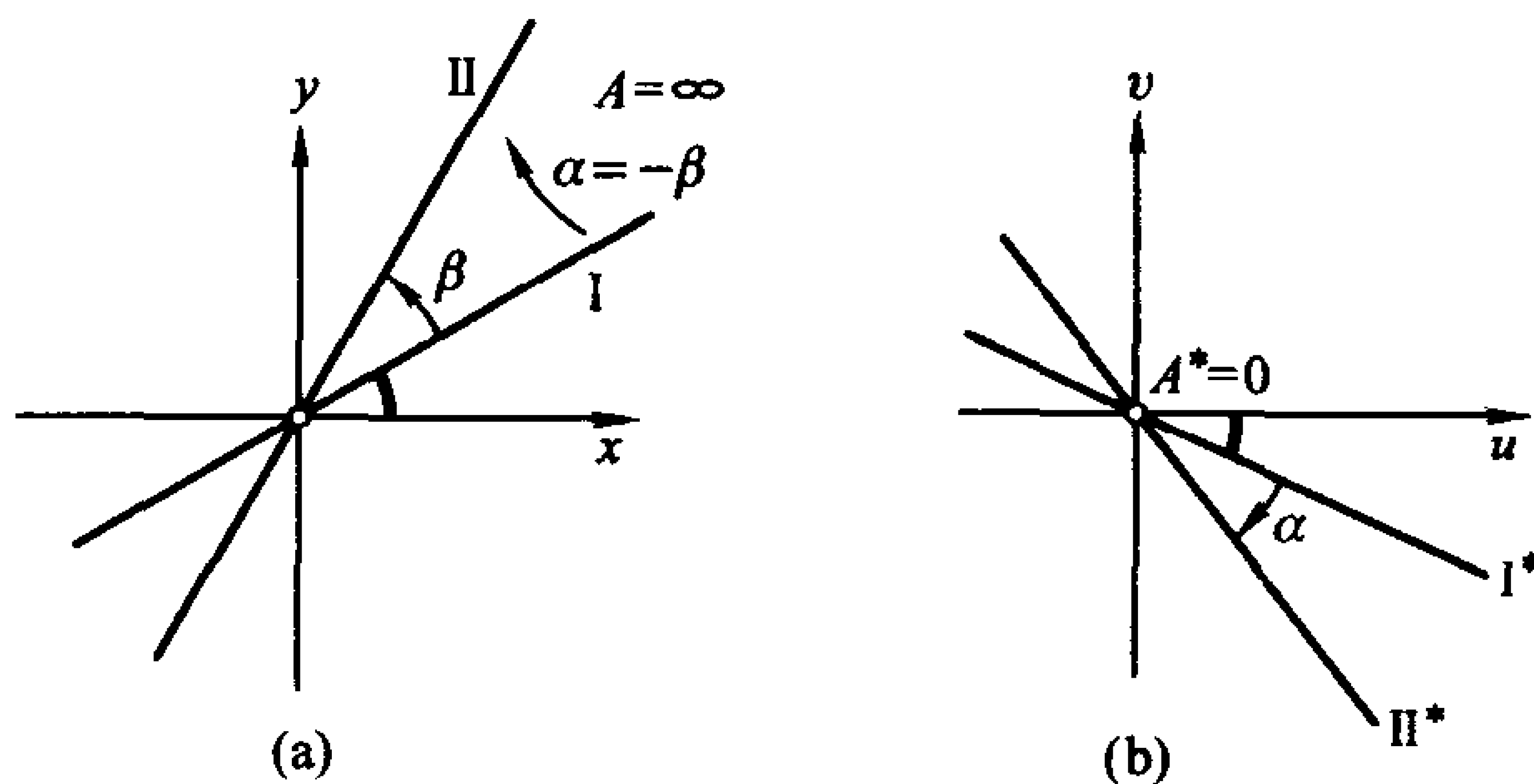


图 52

余下还要证明:映射(b),或者完全同样,映射 $w=\frac{1}{z}$在点 $z=0$ 与 $z=\infty$处也保持角度不变. 而这从图 52 与我们所采用的定义中便可以直接看出(在映射 $w=\frac{1}{z}$下,直线 $\arg z=\varphi$ 变换成直线 $\arg w=-\varphi$).

在本目中所证明的分式线性映射的那些基本性质,可以把它们叙述成下述定理:

定理 2 任意一个分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, ad-bc\neq 0$$

实施一个把完全 z 平面映到完全 w 平面上的单叶共形映射. 这映射

1) 把完全 z 平面上的任何一个圆周,都变换成完全 w 平面上的一个圆周(圆性质);

2) 把关于圆周 C 对称的任何一对点,都变换成关于圆周 C 的像对称的一对点(对称点保存性质).

在结束时,我们引入不加以推导的公式,按照这些公式可以计算在任意分式线性映射(1)下直线与圆的像:

(1) 对应不经过点 $z=-\frac{d}{c}$的直线 $\mathrm{Re}(\lambda z)=\alpha$ $\left(\alpha\neq-\mathrm{Re}\left(\lambda\frac{d}{c}\right)\right)$的是圆 $|w-w_0|=\rho$,其中

$$w_0=\frac{2a\alpha\bar{c}+a\bar{d}\bar{\lambda}+b\bar{c}\lambda}{2\alpha|c|^2+2\mathrm{Re}(c\bar{d}\bar{\lambda})}, \rho=\left|\frac{a}{c}-w_0\right|=\left|\frac{(ad-bc)\lambda}{2\alpha|c|^2+2\mathrm{Re}(c\bar{d}\bar{\lambda})}\right|. \qquad (9)$$

(2) 对应经过点 $z=-\frac{d}{c}$ 的直线 $\operatorname{Re}(\lambda z)=-\operatorname{Re}\left(\lambda\frac{d}{c}\right)$ 的是直线

$$\operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c^2}\lambda w\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c^2}\frac{\lambda a}{c}\right). \tag{10}$$

(3) 对应不经过点 $z=-\frac{d}{c}$ 的圆周 $|z-z_0|=r\left(r\neq\left|z_0+\frac{d}{c}\right|\right)$ 的是圆周 $|w-w_0|=\rho$，其中

$$w_0=\frac{(az_0+b)(\overline{c}\,\overline{z}_0+\overline{d})-a\overline{c}r^2}{|cz_0+d|^2-|c|^2r^2},\rho=\frac{r|ad-bc|}{||cz_0+d|^2-|c|^2r^2|}. \tag{11}$$

(4) 对应圆周 $|z-z_0|=\left|z_0+\frac{d}{c}\right|$ 的是直线

$$\operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c(cz_0+d)}w\right)=\frac{|ad-bc|^2+2\operatorname{Re}\{c(az_0+b)(\overline{ad}-\overline{bc})\}}{2|c(cz_0+d)|^2}. \tag{12}$$

这些公式都可以通过直接计算得到.

例 求直线 $y=x+2$ 在映射 $w=\frac{z+1}{z-1}$ 下的像；因为直线不通过点 $z=1$，所以这条直线变换成一个圆，该圆的圆心和半径按公式(9)分别求出为

$$w_0=\frac{(2-i)}{3},\rho=\frac{|i+1|}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

(这里 $a=b=c=1,d=-1$，并由于直线的方程可写成形状 $\operatorname{Re}\{(-i-1)(x+iy)\}=2$，所以 $\lambda=-i-1$ 和 $\alpha=2$).

32. 特殊情形 首先我们来说明关于确定一个分式线性映射的条件的问题，第31目中的定义(1)表明，这样的映射是由四个系数 a,b,c 与 d 来给定的. 因为在这四个系数中有一个不等于0，并且只要用这个系数来遍除分式的分子与分母，便可以把它看作1，所以，实际上分式线性变换是依赖于三个复数参变量，或六个实参变量的.

由此显然可以看到，确定一个分式线性映射的条件，可以化为在那些系数的实数部分与虚数部分之间的六个独立关系式. 这种条件的最简单的形式就是：在 z 平面内与 w 平面内各给定任意三个点 z_1,z_2,z_3 与 w_1,w_2,w_3，它们在所考虑的那个映射下是互相对应的.

为了要建立一个满足这条件的映射，我们考虑一个辅助的 ζ 平面，而建立两个分别把 z 平面与 w 平面映到 ζ 平面上、把给定的那三个点变换成 0,1 与 ∞ 的分式线性映射. 这两个映射很容易写出：

$$\zeta=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1},\quad \zeta=\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}. \tag{1}$$

从这两个方程中消去 ζ，我们便得到一个把 z 平面映到 w 平面上、把点 z_1,z_2 与 z_3 分别变换成 w_1,w_2 与 w_3 的分式线性映射. 这个映射可以写成如下的形状：

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}. \tag{2}$$

我们来证明:由公式(2)所确定的这个映射,是满足我们设置条件的唯一的分式线性映射.事实上,如果存在着两个不同的这种映射 $w=l_1(z)$ 与 $w=l_2(z)$ 的话,那么,再应用映射(1)中的那第二个映射——我们把它记作 $\zeta=l(w)$——就得到两个不同的分式线性映射

$$\zeta'=l[l_1(z)]=L_1(z),\quad \zeta''=l[l_2(z)]=L_2(z),$$

它们都是把给定的那三个点 z_k 映到点 0,1 与∞上去的.现在我们来考虑映射

$$\zeta''=L_2[L_1^{-1}(\zeta')],$$

其中 L_1^{-1} 表示映射 L_1 的逆映射.这映射是一个分式线性映射,所以,可以把它表示成

$$\zeta''=\frac{a\zeta'+b}{c\zeta'+d} \tag{3}$$

的形状.

显然映射(3)保留了点 0,1 与∞的位置不变.由于无穷远点互相对应,我们得出 $c=0$,因此,$\zeta''=\frac{a}{d}\zeta'+\frac{b}{d}$.

点 0 与 1 的对应关系给出 $\frac{b}{d}=0,\frac{a}{d}=1$.因此 $\zeta''=L_2[L_1^{-1}(\zeta')]\equiv\zeta'$,即,$L_1^{-1}$ 是 L_2 的逆变换,所以 $L_1\equiv L_2$.但这时就也有 $l_1\equiv l_2$,这便证明了映射(2)是唯一的.

不难证明:当点 z_k 或 w_k 中有一个点是无穷远点时,公式(2)在那情况下也仍保持其意义,不过,要用 1 来代替比例式中这个点所在的那个分子与分母(在公式(2)中,这六个点中的每一个点,都参与分子一次,参与分母一次).事实上,例如,设 $w_3=\infty,z_2=\infty$,那时公式(2)就呈

$$\frac{w-w_1}{1}\cdot\frac{1}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{1}{1}$$

的形状,或

$$w=w_1+(w_2-w_1)\cdot\frac{z-z_1}{z-z_3},$$

并且可以直接看出,由这函数所得到的映射解决了所给的问题.这样便证明了

定理 1　*存在着一个把完全 z 平面映到完全 w 平面上,并且把任意三个不同的点 z_k 变换成任意三个不同的点 w_k 的分式线性映射,而且这样的分式线性映射只有一个.*

从这个定理可以导出

定理 2　*完全 z 平面上的任何一个圆,都可以借助一个分式线性映射而变换到完全 w 平面上的任何一个圆.*

事实上,我们只要在 z 平面中那个圆的边界 C 上取三个点 z_k,把它们按照沿正

向绕行这个圆的顺序来编号. 如果在 w 平面中的圆的边界 C^* 上取三个任意的点 w_k，并且照公式(2)来建立一个分式线性映射，那么，根据分式线性映射的圆性质，这映射把圆周 C 转变为圆周 C^*. 于是根据边界对应原理，它便把由圆周 C 所围成的圆 K，变换成由圆周 C^* 所围成的那两个圆中的一个.

事实上，设 K 和 K^* 是分别在平面 z 和 w 内给出的圆，而 C 和 C^* 分别是它们的边界. 在 C 上选取三个点 z_k，它们以正向绕行 K 的次序编号，并且在 C^* 上同样选取三个点 w_k. 如果现在按照公式(2)构造分式线性映射，那么这个映射根据圆性质将把圆周 C 转换到 C^*，并且根据边界对应原理圆 K 将转变到由 C^* 所围出的两个圆中的一个. 但是由于共形映射保持方向(见第 27 目)，并且点 w_k 相对于 K^* 的位置与点 z_k 相对于 K 的位置相同，所以 K 的确是变换到 K^*. 定理得证.

我们来指出公式(2)的一个极限情形. 设我们的问题是要依据两对对应点 z_1, z_2 与 w_1, w_2，并依据在点 z_2 处的给定的导数 $a=\left[\dfrac{dw}{dz}\right]_{z_2}$ 来建立一个分式线性映射. 为了要解决这个问题，我们把最后那个条件，用点 $z_3=z_2+h$ 与点 $w_3=w_2+ah$ 成对应这条件来代替，于是可以根据公式(2)来求得映射

$$\frac{w-w_1}{w-w_2-ah}\cdot\frac{-ah}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2-h}\cdot\frac{-h}{z_2-z_1}.$$

在两端中约去 $-h$，并取当 $h\to 0$ 时的极限，我们便得到所求的映射

$$a\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{w_2-w_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}. \tag{4}$$

现在我们来研究分式线性映射的几个重要例子：

(1) **把上半平面映到单位圆上去的映射** 设已经给定上半平面内的一个点 a，是变换成圆心 $w=0$ 的(图 53). 根据分式线性映射的对称点保存性质，共轭点 $\bar{a}$ 是点 a 的关于实轴的对称点，应当变换成关于单位圆周与点 $w=0$ 相对称的那个点 $w=\infty$. 因此，所求的映射应当呈

$$w=k\frac{z-a}{z-\bar{a}} \tag{5}$$

的形状，其中 k 是一个常数因子. 对于任何一个 k，这函数都把上半平面映到某一个以点 $w=0$ 为圆心的圆上，因为点 $w=\infty$ 必须是点 $w=0$ 的关于这个圆的圆周的对称点. 我们需要选择 k 以使得这个圆是单位圆. 为此，只要使点 $z=0$ 变换成单位圆周上的一个点：$|k|\cdot\left|\dfrac{a}{\bar{a}}\right|=|k|=1$ 便够了. 因此，可以令 $k=e^{i\alpha}$，于是函数

$$w=e^{i\alpha}\cdot\frac{z-a}{z-\bar{a}} \tag{6}$$

便是我们问题的解答，其中 α 是任何一个实数(α 的改变，意味着这个圆的关于圆心的旋转).

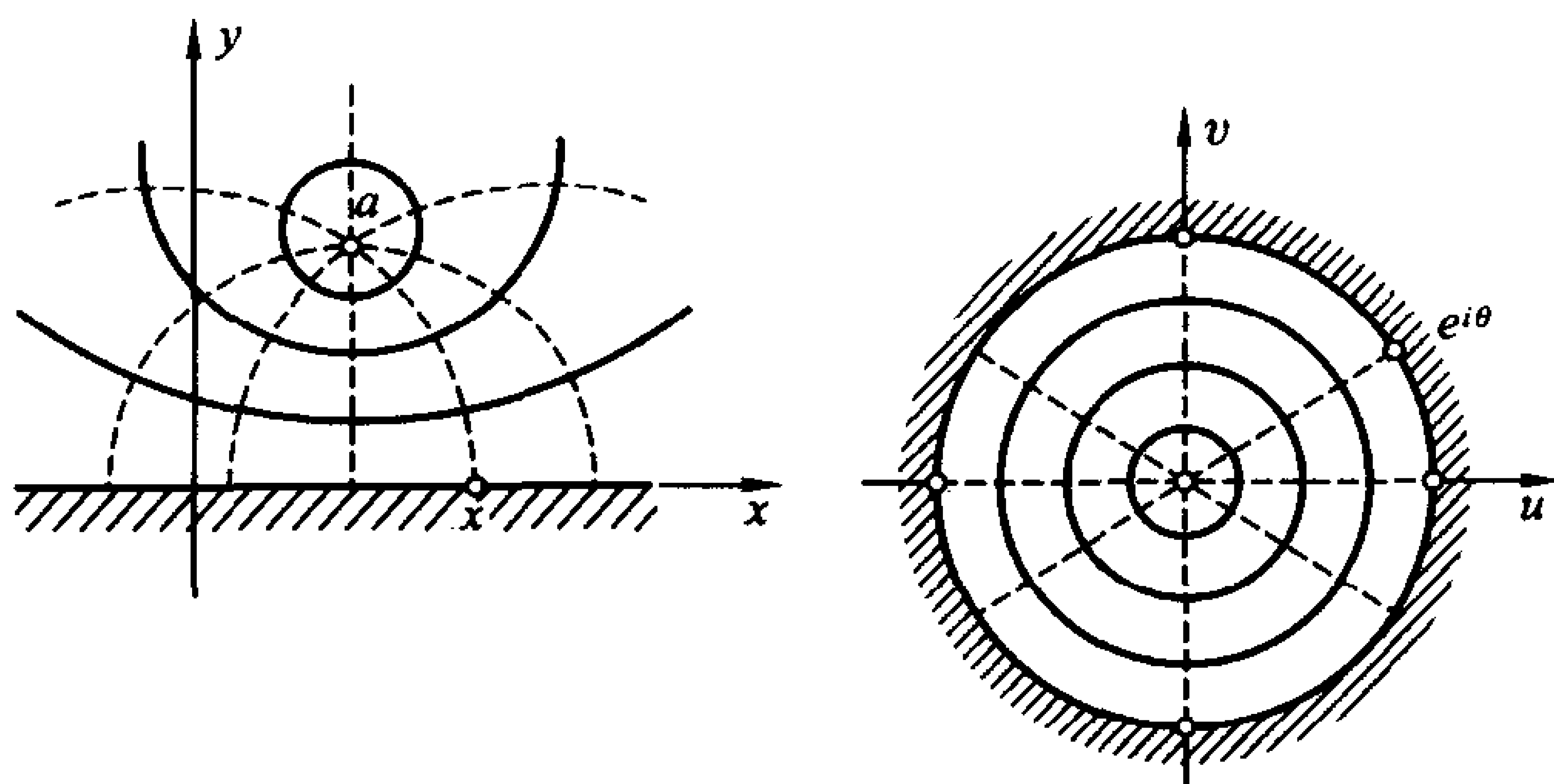


图 53

根据分式线性映射的性质,同圆 $|w|<1$ 的半径束(也就是,通过点 $w=0$ 与 $w=\infty$ 的那些圆周的弧)成对应的,是通过点 a 与 $\bar{a}$ 的那些圆周的弧(在上半平面内的部分).同以点 $w=0$ 为圆心的那族圆周成对应的,是那些以点 a 与 $\bar{a}$ 为关于它们的对称点的圆周(参看图 53).

我们再来指出映射(6)的逆映射,那是一个把单位圆映到上半平面上去的映射.为简化起见,设 $a=ih$ 是一个纯虚数,我们得到:

$$z=ih\frac{e^{i\alpha}+w}{e^{i\alpha}-w}. \tag{7}$$

这里设 $w=e^{i\theta}$,并给分子和分母乘以 $e^{-i(\alpha+\theta)/2}$,求映射(7)所建立的在单位圆周上的点 $w=e^{i\theta}$ 与实轴上的点 $z=x$ 之间的对应关系

$$x=h\cot\frac{\alpha-\theta}{2}. \tag{8}$$

边界导数

$$\left[\frac{dz}{dw}\right]_{w=e^{i\theta}}=\frac{dx}{d\theta}=\frac{h}{2\sin^2\frac{\alpha-\theta}{2}}=\frac{h}{1-\cos(\theta-\alpha)} \tag{9}$$

在圆周上除了点 $w=e^{i\alpha}$ 处以外是处处连续的,点 $w=e^{i\alpha}$ 对应于点 $z=\infty$ (参看第 29 目中的定理 1).

(2) **把单位圆映到单位圆上去的映射** 设我们已经知道了圆 $|z|<1$ 的一个点 a 转变为圆 $|w|<1$ 的圆心.于是点 a 的关于单位圆周的对称点 $a^*=\frac{1}{\bar{a}}$,就应当被映到点 $w=\infty$.因此,所求的映射应当具有形状

$$w=k\frac{z-a}{z-a^*}=k_1\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

其中 k 和 k_1 是某一个常数.我们要选择 k_1,使得在 w 平面中的那个圆是单位圆.为此,只需要使点 $z=1$ 变换成单位圆周上的点

$$\left| k_1 \frac{1-a}{1-\bar{a}} \right| = |k_1| = 1.$$

因此,可以取 $k_1 = e^{i\alpha}$,于是函数

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \tag{10}$$

便解决了我们的问题,这里的 α 是任何一个实数.由于

$$\left[\frac{dw}{dz}\right]_{z=a} = e^{i\alpha}\frac{1}{1-|a|^2}$$

和$|a|<1$,所以在几何上 α 表示在点a 处映射(10)的旋转角度

$$\alpha = \left[\arg\frac{dw}{dz}\right]_{z=a}. \tag{11}$$

我们注意,如果点 a 趋近于单位圆的边界,那么在点 a 处映射(10)的延伸系数

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=a} = \frac{1}{1-|a|^2} \tag{12}$$

就趋于无限大.

在图 54 中画出了一些在这映射下互相对应的曲线.在 z 平面中的曲线网是图 53 中的曲线网的一个部分.

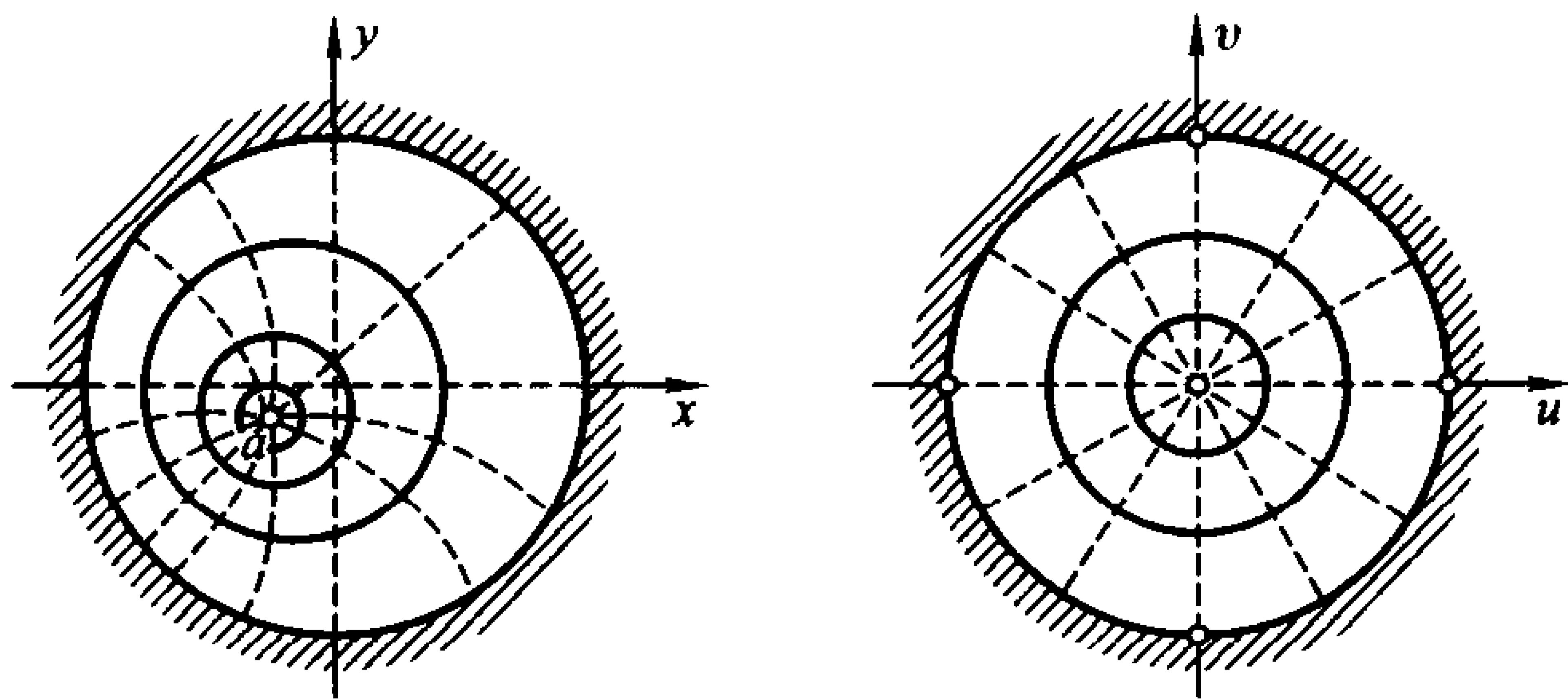


图 54

我们还指出联系着单位圆周 $z=e^{i\varphi}$ 与 $w=e^{i\theta}$ 上那些对应点的辐角的一个关系式(我们令 $\alpha=0, a=re^{i\varphi_0}$):

$$\cos(\theta-\varphi_0) = \frac{(1+r^2)\cos(\varphi-\varphi_0)-2r}{1-2r\cos(\varphi-\varphi_0)+r^2}\,{}^{*}. \tag{13}$$

转到更一般情形,我们注意到,如果 z 平面中那个圆的半径等于R,那么把这个圆映到圆$|w|<1$ 上去的函数 $w=f(z)$,在条件

$$f(a)=0, \arg f'(a)=\alpha$$

* 要得到关系式(13),只需把 z,w 与a 的表达式代入公式(10),给两部分都乘上 $e^{-i\varphi_0}$,再分出实数部分来便够了.

下具有形状

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{R(z-a)}{R^2 - \bar{a}z}. \tag{14}$$

这公式可以由公式(10)中把 z 换成$\frac{z}{R}$,同时相应地把 a 换成$\frac{a}{R}$而得到.

(3) **把上半平面映到上半平面上去的映射** 我们来求出这种映射的一个普遍形式.每一个作出把上半 z 平面映到上半 w 平面上去的映射的分式线性函数 $w = f(z)$,只要给定了互相对应的在实轴 x 上的三个点 $z_k = x_k$ 与在实轴 u 上的三个点 $w_k = u_k$,就都可以由公式(2)得出.因为数 z_k 与 w_k 都是实数,所以在改变形状之后公式(2)便呈

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{15}$$

的形式,其中 a, b, c, d 都是实数.反过来说,任何一个具有实系数的函数(15),都把 x 轴变换成 u 轴,因而,便把上半 z 平面映成 w 平面的一个半平面,上半或者下半.为了要使它映成上半 w 平面,导数$\frac{dw}{dz}$在实轴上就必须是正的,即

$$\left[\frac{dw}{dz}\right]_{z=x} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0,$$

由此便有 $ad - bc > 0$.因此,在系数是实数并且满足条件 $ad - bc > 0$ 时,公式(15)便给出了把上半平面映到上半平面上去的分式线性映射的一般形式.

33. 例题 我们在本目中将讨论共形映射的一些例题,它们都是由初等函数的组合所作出的.

(1) **把带形映到单位圆上去的映射** 设在 z 平面内给出一个带形 $D: -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$,要求把它共形映射到圆 $|w| < 1$ 上,并且使得有三对边界点成对应: $f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$, $f(i\infty) = i$ ($i\infty$ 表示在带形上方的无穷远点).首先我们把这个带形旋转一个直角,并把它拓宽到二倍:

$$z_1 = 2iz, \tag{1}$$

然后再用指数函数

$$z_2 = e^{z_1} \tag{2}$$

把由 D 通过函数(1)所映成的那个带形 $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z_1 < \frac{\pi}{2}$,变换成右半个平面 $\operatorname{Re} z_2 > 0$ (实际上, $z_2 = e^{x_1} \cdot e^{iy_1}$,所以 $|z_2| = e^{x_1}$ 是从 0 变到 ∞,而 $\arg z_2 = y_1$ 则是从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$).余下就只要把这半平面映到单位圆上去,使对应于点 $z = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, i\infty$ 的那三个点 $z_2 = i, -i, 0$ 变换成点 $w = 1, -1, i$ 就是了.这问题可以借上一目中的公式(2)来解决(我们改变了在那公式中所采用的记号):

$$\frac{w-1}{w-i}(1+i) = \frac{z_2 - i}{z_2},$$

或者

$$w=\frac{1}{i}\frac{z_2-1}{z_2+1}. \tag{3}$$

把表达式(2)与(1)代入(3),我们便得出这问题的最后解

$$w=\frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=\tan z \tag{4}$$

(参看第9目).我们还要来说明在这映射下曲线的对应关系,垂直于 x 轴的直线族 $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{const}$.在映射(1)下变换成水平直线族,映射(2)又把它们变换成射线族 $\arg z_2=\mathrm{const}$,这也就是说,把它们变换成通过两个点 $z_2=0$.与 $z_2=\infty$的"圆周"族.分式线性映射(3)把这两个点分别变换成点 $w=i$ 与 $w=-i$,所以,它把我们所谈到的这射线族,变换成通过 $w=\pm i$ 这两个点的圆周族.在 z 平面中与上面所说的那族直线 $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{const}$ 相垂直的直线段族 $\mathrm{Im}\,z=\mathrm{const}$,则被变换成以这两个点 $w=\pm i$ 作为它们自己的对称点的一族圆周(图 55).

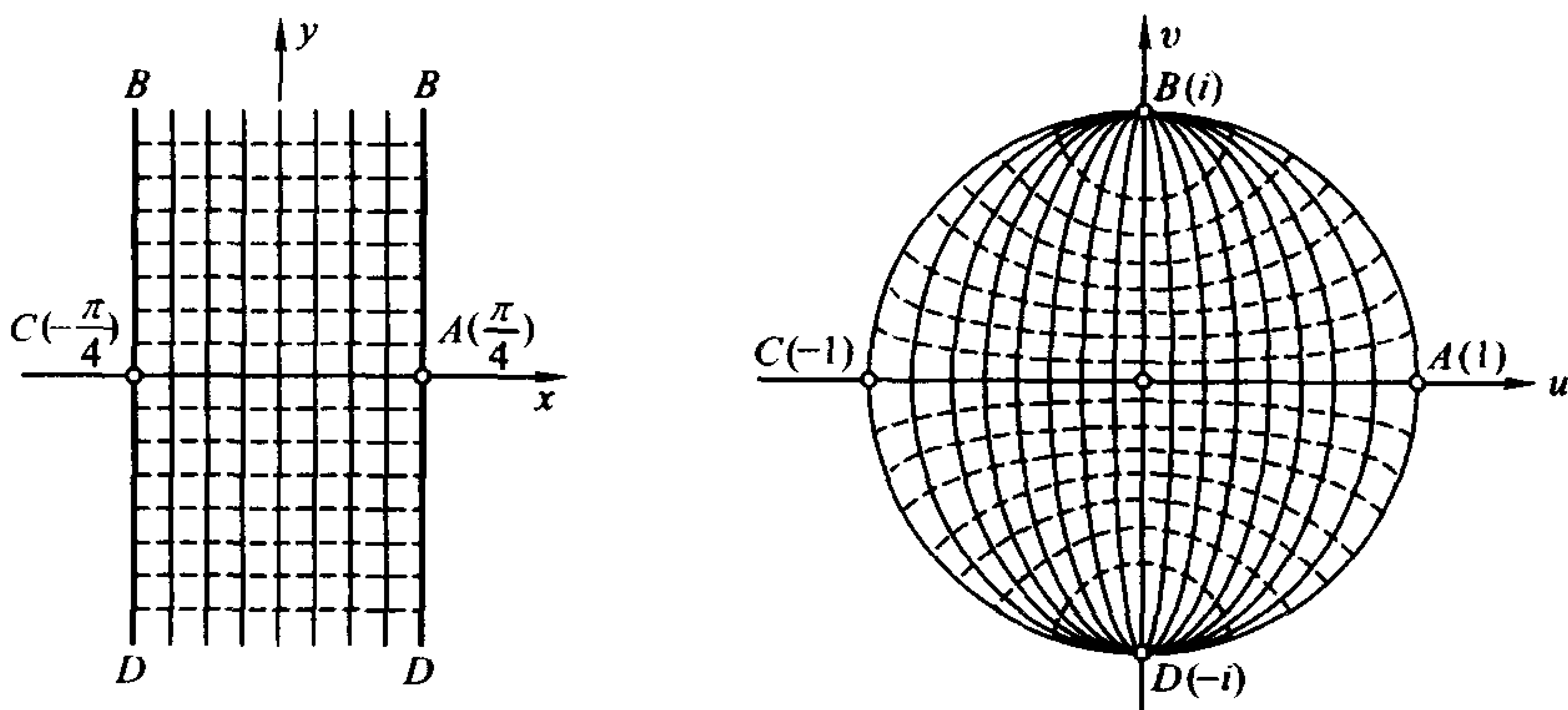


图 55

这函数的反函数 $w=\arctan z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$作出一个把单位圆映到带形上去的逆映射.我们在这式子中把 iz 换成z_1,把 iw 换成$\frac{\pi}{2H}w_1$,便得出一个把单位圆$|z|<1$映到一个宽度为 H 的带形 $-\frac{H}{2}<\mathrm{Im}\,w<\frac{H}{2}$上去的映射,这个映射的形状是

$$w=\frac{H}{\pi}\ln\frac{1+z}{1-z}=\frac{2H}{\pi}\mathrm{arth}\,z \tag{5}$$

(我们已经把 z 与 w 的下标去掉了).映射(5)把点 $z=\pm1$ 映成点$w=\pm\infty$,把点 $z=i$映成点 $w=i\frac{H}{2}$.它的导数

$$\frac{dw}{dz}=\frac{H}{\pi}\cdot\frac{2}{1-z^2}$$

在 $z=\pm1$ 这两个点处变成无限大.

(2) 把去掉了一段线段的半平面映到半平面上的映射　设从半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 中去掉了一段线段$(a,a+ih)$.为了要得出所求的映射,我们利用下述这个事实:映射 $w=z^2$是把在坐标原点处的角度增大成二倍的,因此,可以把所去掉的这条线段与 x 轴之间的角度"展平".

与此相应，我们把上半 z 平面向左作一个距离为 a 的平移 $z_1 = z - a$，于是，再应用映射 $z_2 = z_1^2$，我们便得到一个去掉了一条射线

$$-h^2 < \mathrm{Re}\, z_2^* < \infty, \quad \mathrm{Im}\, z_2 = 0$$

的平面．然后，我们再把 z_2 平面向右作一距离为 h^2 的平移 $z_3 = z_2 + h^2$．最后，施以映射 $z_4 = \sqrt{z_3}$，便得到了上半平面．因此，所求的映射的形状是

$$z_4 = \sqrt{(z-a)^2 + h^2}. \tag{6}$$

再把 z_4 平面向右平移一段距离 a，使点 $z = a + ih$ 被映成点 a，结果我们得出

$$w = \sqrt{(z-a)^2 + h^2} + a. \tag{7}$$

映射(7)的导数

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2 + h^2}} \tag{8}$$

在点 B 与 D 处(在那里 $z = a$)变成 0，在点 C 处(在那里 $z = a + ih$)变成无穷大．对应于直线 $v = v_0 = \mathrm{const}$ 的是那些四次曲线

$$y = v_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{(x-a)^2 + v_0^2}}, \tag{9}$$

它们都是关于直线 $x = a$ 的对称曲线，在直线 $x = a$ 上它们的纵坐标达到了其最大值．当 v_0 愈大曲线(9)同直线相差愈微(图 56)．

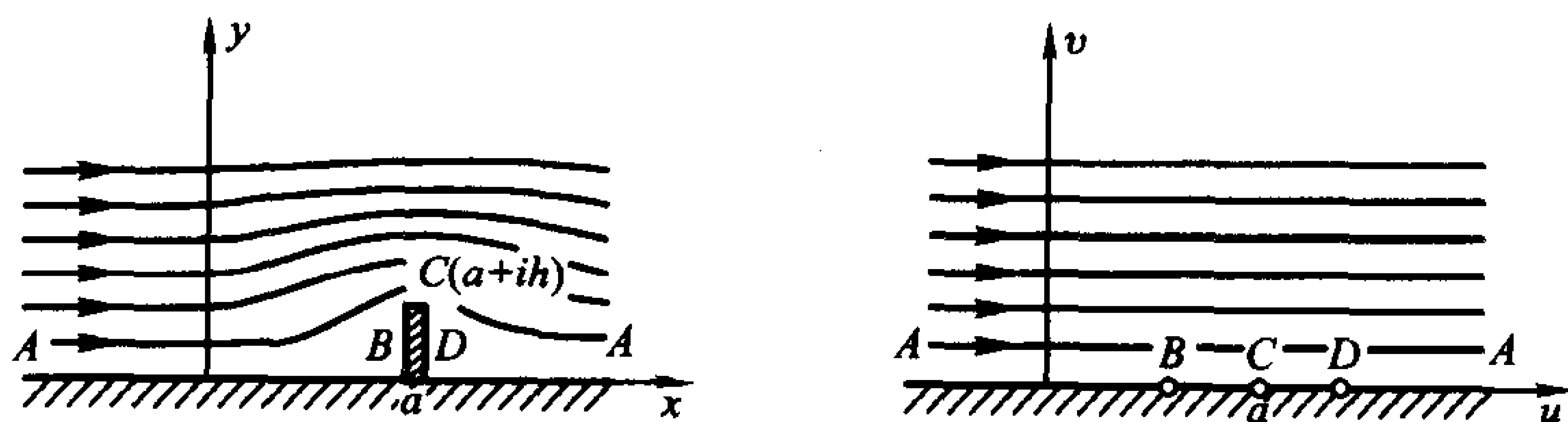


图 56

当 $h = 0$ 时，映射(7)就变成恒等变换 $w = z$．我们来求当 h 很小时映射(7)的主要部分．为此，我们把公式(7)的形状稍加改变，略去 h 的二次以上的乘幂．应用熟知的关于方根的近似公式，我们得到

$$w = (z-a)\sqrt{1 + \frac{h^2}{(z-a)^2}} + a \approx z + \frac{h^2}{2(z-a)}. \tag{10}$$

对于邻近于点 a 的那些点 z 来说，近似公式(10)是不正确的，因为对于这样的点，量 $\frac{h^2}{z-a}$ 就不再是微小的了．

(3) 把去掉了一段半径的圆映到单位圆上去的映射(图 57)　设从圆 $|z| < 1$ 中去掉了一段直线段 $[(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}]$．把这样所得出的区域映到单位圆上去的那个映射，可以借助几个附加的分式线性映射，而化成前面所述的映射(7)．但若利用茹科夫斯基函数(第 7 目)的性质，便可以更简单些．我们先把 z 平面中的区域作一个角度为 $-\alpha$ 的旋转，再应用茹科夫斯基函数

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z}\right),$$

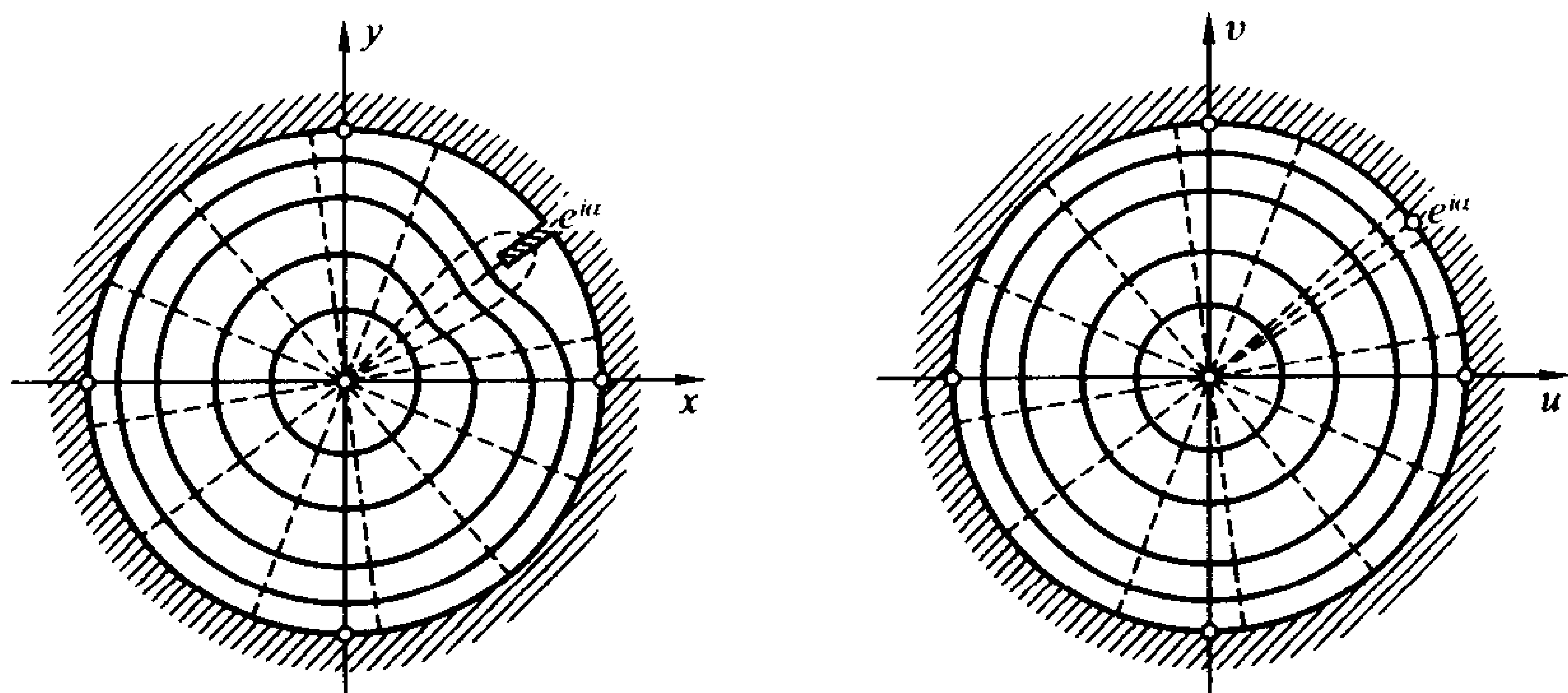


图 57

把这区域变换为线段$[-1,1+2h_1]$的外部,其中 $h_1=\dfrac{h^2}{4(1-h)}$ *.类似地,变换 $\omega=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{w}{e^{i\alpha}}+\dfrac{e^{i\alpha}}{w}\right)$ 把平面ω上的圆变为线段$[-1,1]$的外部.容易看出,线性映射 $\omega=\dfrac{\zeta}{1+h_1}+\dfrac{h_1}{1+h_1}$把平面$\zeta$和$\omega$中所得的区域相互转换,在$\omega$和$\zeta$的地方代入它们的表达式,我们便得出了所求的映射

$$(1+h_1)\left(e^{-i\alpha}w+\frac{e^{i\alpha}}{w}\right)=\left(e^{-i\alpha}z+\frac{e^{i\alpha}}{z}\right)-2h_1. \tag{11}$$

当 $h=0$ 时,有 $h_1=0$,于是 $w\equiv z$.我们来求映射(11)当h很小时的主要部分.为此,我们把 $w=z+\omega$代入公式(11),并略去关于h_1的二阶无穷小,同时要注意,ω与h_1是同阶的无穷小(所以,ω^2阶的量就可以略去).我们得到:

$$(1+h_1)\left[e^{-i\alpha}z+\omega\cdot e^{-i\alpha}+\frac{e^{i\alpha}}{z}\left(1-\frac{\omega}{z}\right)\right]\approx e^{-i\alpha}z+\frac{e^{i\alpha}}{z}-2h_1,$$

或

$$\left(\frac{\omega}{e^{i\alpha}}-\frac{e^{i\alpha}\omega}{z^2}+h_1\left(\frac{z}{e^{i\alpha}}+\frac{e^{i\alpha}}{z}+2\right)\approx 0,$$

由此

$$\omega\approx h_1 z\frac{e^{i\alpha}+z}{e^{i\alpha}-z}.$$

因此,对于很小的h_1与不太邻近于点$e^{i\alpha}$的那些点z来说,我们的共形映射可以用下述近似公式来表示

$$w\approx z+h_1 z\frac{e^{i\alpha}+z}{e^{i\alpha}-z}. \tag{12}$$

对关系式(12)求导数,我们得出导数的主要部分

$$\frac{dw}{dz}\approx 1+h_1\frac{e^{i\alpha}+z}{e^{i\alpha}-z}+\frac{2h_1 ze^{i\alpha}}{(e^{i\alpha}-z)^2}. \tag{13}$$

我们还要指出在那两个圆周上、在映射(11)下互相对应的那些点 $z=e^{i\varphi}$与$w=e^{i\theta}$的辐角之间的关

---

* 事实上,点 $z=(1-h)e^{i\alpha}$在这个映射下的像是点

$$\zeta_0=\frac{1}{2}\left(1-h+\frac{1}{1-h}\right)=1+\frac{h^2}{2(1-h)}.$$

系. 在置换 $z=e^{i\varphi}$ 和 $w=e^{i\theta}$ 以后,从(12)中区分出实数部分,并令

$$\theta=\varphi+\Delta\varphi,\quad \cos\theta\approx\cos\varphi-\Delta\varphi\cdot\sin\varphi^{*},$$

我们便得到

$$-\sin\varphi\cdot\Delta\varphi\approx h_1\cdot\mathrm{Re}\left\{e^{i\varphi}\frac{e^{i\alpha}+e^{i\varphi}}{e^{i\alpha}-e^{i\varphi}}\right\}=-h_1\sin\varphi\cot\frac{\varphi-\alpha}{2},$$

从这式中就得出

$$\theta=\varphi+\Delta\varphi\approx\varphi+h_1\cot\frac{\varphi-\alpha}{2}. \tag{14}$$

(4) 把去掉了两条射线的平面映到带形 $0<v<H$ 上去的映射(图 58) 为了确定起见,我们要求:这映射把左面那条射线变换成带形的下面那条岸沿,把右面那条射线变换成它的上面那条岸沿**. 先用分式线性变换

$$z_1=\frac{z+a}{z-a}$$

把我们的这两条射线变换成一条射线$(0,\infty)$,然后,再利用映射

$$z_2=\sqrt{z_1}=\sqrt{\frac{z+a}{z-a}},$$

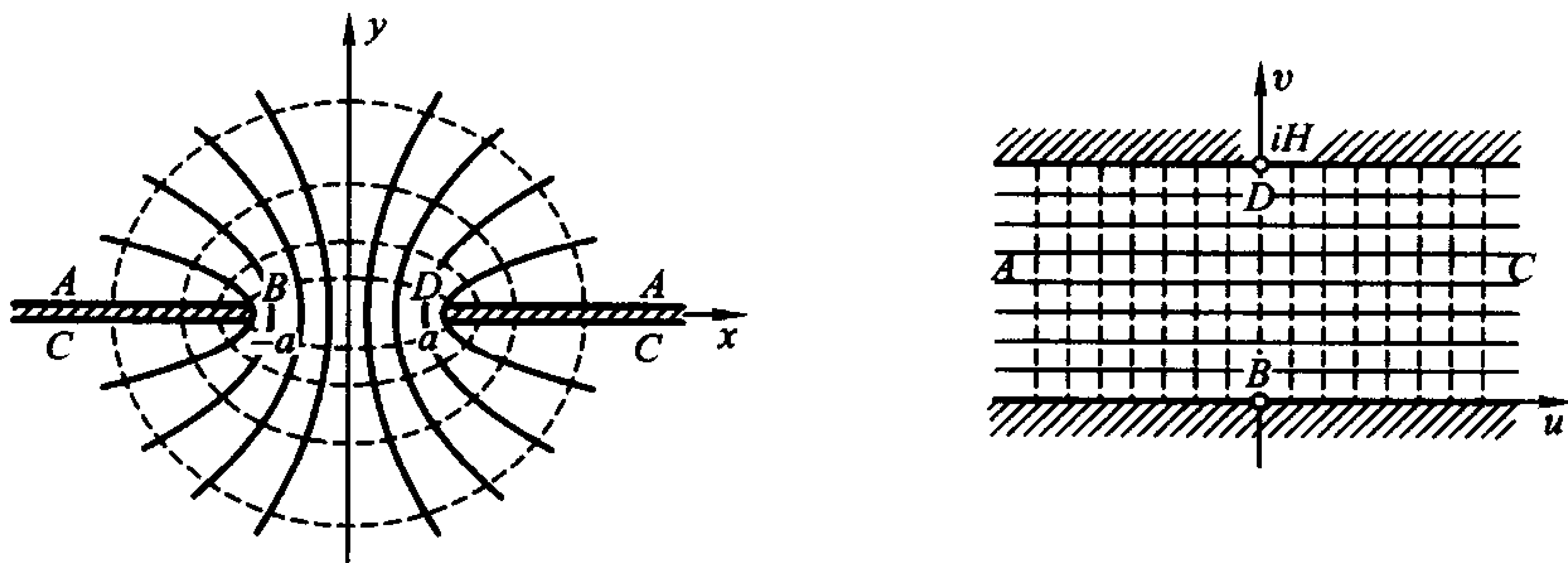


图 58

把这条射线映成实轴. 这时我们所考虑的那个区域便变换成上半平面. 为了要得出所需要的点的对应关系,我们用下述分式线性变换把这个半平面映到它本身上,使得 z 平面内原来的那个区域中的无穷远点 A 与 C 的像(即,点 $z_2=\mp1$)落入点 0 与∞处:

$$z_3=k\cdot\frac{1+z_2}{1-z_2}=-\frac{k}{a}\left(z+\sqrt{z^2-a^2}\right)$$

(k 是一个任意的正常数). 余下就只需利用对数函数 $w=\dfrac{H}{\pi}\ln z_3$,以求出一个映射,使它把这半平面映到带形上去,并且这带形具有所需要的边界的对应关系

$$w=\frac{H}{\pi}\ln\left(z+\sqrt{z^2-a^2}\right)+Hi+C=\frac{H}{\pi}\operatorname{arch}\frac{z}{a}+\frac{H}{\pi}\ln a+Hi+C, \tag{15}$$

其中 $C=\dfrac{H}{\pi}\ln\dfrac{k}{a}$ 是一个任意的实数常数. 在 z 平面内,在映射(15)下对应于两族直线 $u=\mathrm{const}$ 与

---

* 我们取 $\cos\theta$ 在点 $\theta=\varphi$ 处的泰勒公式的前两项.

** 这两个条件只确定了映射的两个实参变量(它们转化为,给出了两对边界点的对应关系),第三个参变量仍旧是可以任意的(参看公式(15)).

$v=\text{const}$ 的是以点 $\pm a$ 为焦点的椭圆族与双曲线族.

(5) 把具有割痕 $-\infty < x \leqslant a, y=H$ 的带形 $0<y<2H$ 映到带形 $0<v<2H$ 上去的映射(图 59) 函数

$$z_1 = e^{\frac{\pi z}{2H}}$$

把这个具有割痕的带形映到去掉了虚轴上一段线段$(0, bi)$的上半平面上,其中 $b = e^{\frac{a\pi}{2H}}$. 例 2 中的函数(7)

$$z_2 = \sqrt{z_1^2 + b^2} = \sqrt{e^{\frac{\pi z}{H}} + e^{\frac{\pi a}{H}}}$$

(在公式(7)中应当令 $a=0, h=b$)把上面所说的后面那个区域映到半平面上. 再利用对数函数,我们便得出了所求的映射

$$w = \frac{2H}{\pi}\ln z_2 = \frac{H}{\pi}\ln\left(e^{\frac{\pi z}{H}} + e^{\frac{\pi a}{H}}\right). \tag{16}$$

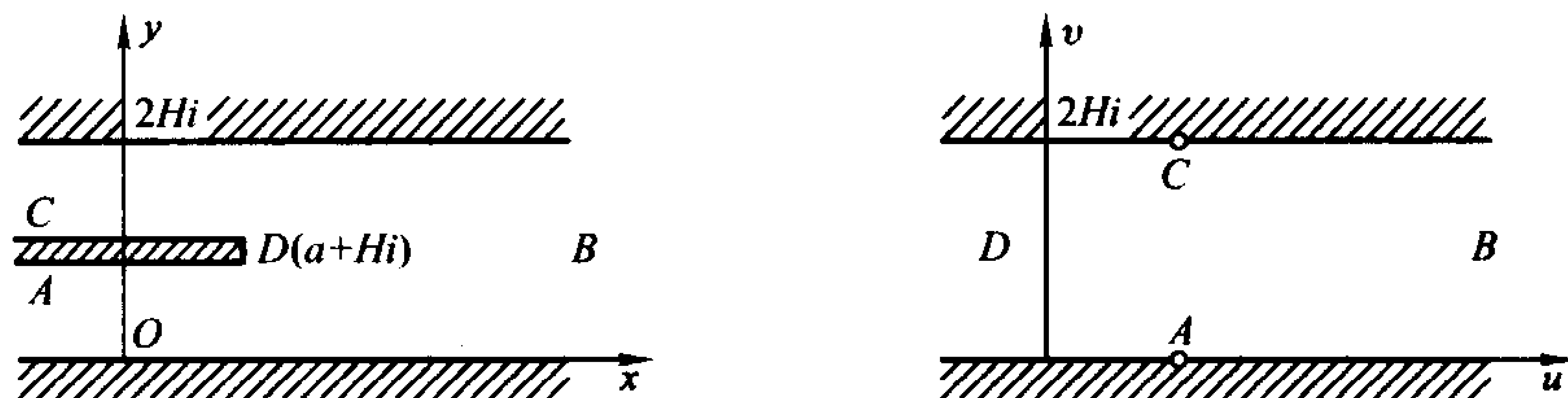


图 59

(6) 把具有割痕 $0 \leqslant y \leqslant h, x=a$ 的带形 $0<y<1$ 映到带形 $0<v<1$ 上去的映射(图 60) 函数 $z_1 = e^{\pi(z-a)}$ 把这个具有割痕的带形映到去掉了单位圆周上一段弧的上半平面上. 映射

$$z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} = \operatorname{th}\frac{\pi(z-a)}{2}$$

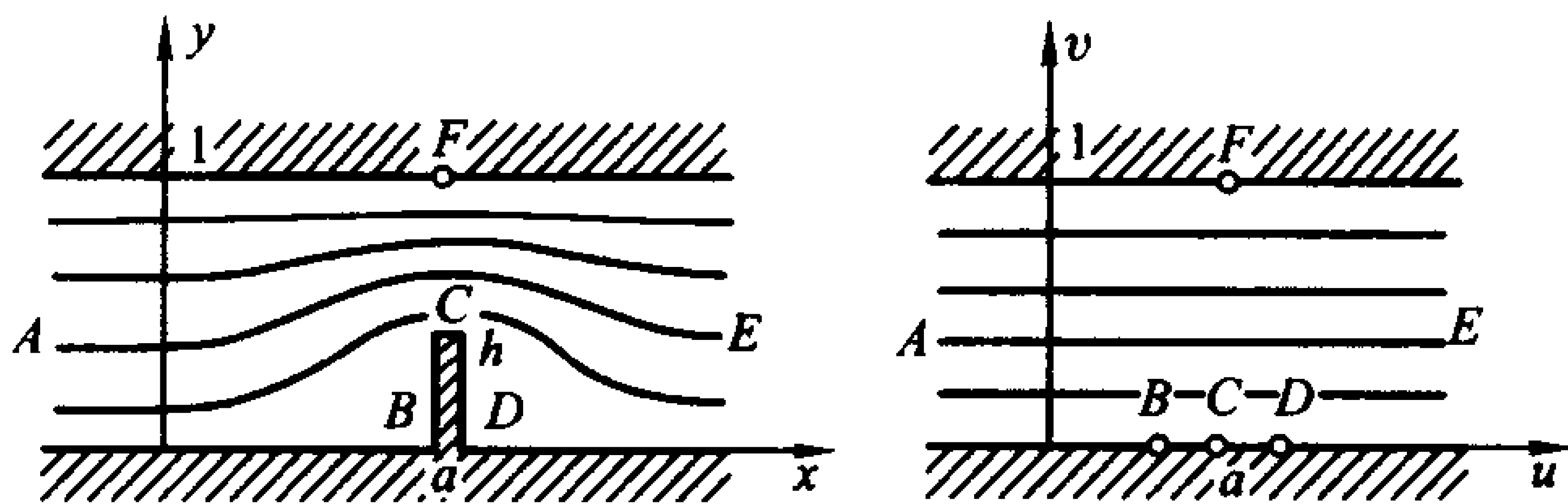


图 60

把这段圆弧变换成虚轴上的一段线段$(0, bi)$,其中

$$b = \frac{1}{i}\operatorname{th}\frac{\pi h i}{2} = \tan\frac{\pi h}{2}.$$

再利用例 2 中的函数(7),我们便得出一个把所给区域映到上半平面上去的映射:

$$z_3 = \sqrt{z_2^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi(z-a)}{2} + \tan^2\frac{\pi h}{2}}.$$

点 A 与 E 在这个映射下变换成点 $\mp\sqrt{1+\tan^2\frac{\pi h}{2}} = \mp\dfrac{1}{\cos\frac{\pi h}{2}}$. 我们先用分式线性映射

$$z_4=\frac{1+z_3\cos\frac{\pi h}{2}}{1-z_3\cos\frac{\pi h}{2}},$$

把这两个点分别变换成点 0 与∞,然后再利用对数函数

$$z_5=\frac{1}{\pi}\ln z_4.$$

结果我们便得出了一个把原来那区域映到所需要的带形上去的映射.但是,显然,点 $z_5=0$ 对应点 C;为了要把点 C 变换成在实轴上的点 a,还需要把这带形平移 a.因此所求的映射的形状是

$$w=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1+z_3\cos\frac{\pi h}{2}}{1-z_3\cos\frac{\pi h}{2}}+a=\frac{2}{\pi}\operatorname{arth}\left(\cos\frac{\pi h}{2}\cdot z_3\right)+a,$$

或者最后

$$w=\frac{2}{\pi}\operatorname{arth}\left\{\cos\frac{\pi h}{2}\sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi(z-a)}{2}+\tan^2\frac{\pi h}{2}}\right\}+a. \tag{17}$$

当 h 很小时,在记号 arth 后面的那个表达式——我们用 ζ 来表示它——可以用下述方式来加以改变:

$$\begin{aligned}\zeta&\approx\left(1-\frac{\pi^2h^2}{8}\right)\operatorname{th}\frac{\pi(z-a)}{2}\left\{1+\frac{\pi^2h^2}{8}\operatorname{cth}^2\frac{\pi(z-a)}{2}\right\}\\&\approx\operatorname{th}\frac{\pi(z-a)}{2}\left\{1+\frac{\pi^2h^2}{8}\left(\operatorname{cth}^2\frac{\pi(z-a)}{2}-1\right)\right\}\end{aligned}$$

(我们把 cos, tan 与 $\sqrt{\ }$ 都用它们的近似表达式来替代,并且在相乘时略去了阶数较 h^2 更高的无穷小).利用双曲函数的基本公式,我们得到

$$\zeta\approx\operatorname{th}\frac{\pi(z-a)}{2}+\frac{\pi^2h^2}{4}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\pi(z-a)}.$$

现在我们将要得出共形映射(17)的一个近似公式.为此,我们在公式(17)的右端中,把 arth ζ 用它的以点 $\zeta_0=\operatorname{th}\frac{\pi(z-a)}{2}$ 为中心的泰勒展开式中前两项来代替:

$$\operatorname{arth}\zeta\approx\operatorname{arth}\zeta_0+\frac{1}{1-\zeta_0^2}(\zeta-\zeta_0).$$

把 ζ 与 ζ_0 的值代入右端中,结果我们便求得

$$w\approx z+\frac{2}{\pi}\frac{1}{1-\operatorname{th}^2\frac{\pi(z-a)}{2}}\cdot\frac{\pi^2h^2}{4\operatorname{sh}\pi(z-a)}=z+\frac{\pi h^2}{4}\operatorname{cth}\frac{\pi(z-a)}{2}. \tag{18}$$

(7) 把偏心圆环形映到同心圆环形上去的映射 首先我们来讨论当环形的每一个圆周都在另一个圆周的外部时的情形(图 61).取这两个圆周的一条公共切线作为直径,在其上作半圆周 Γ.这半圆周与环形的那两个圆周 C_1 和 C_2 的中心连线相交于两个点 a 与 b.点 a 与 b 同时是关于圆周 C_1 与关于圆周 C_2 的对称点,因为通过 a 与 b 这两个点的那条中心连线与那条曲线 Γ,都是同这两个圆周正交的.根据分式线性映射的那些性质,函数

$$w=\frac{z-a}{z-b} \tag{19}$$

把圆周 C_1 与 C_2 变换成两个圆周 C_1^* 与 C_2^*,并且对应于点 $z=a$ 与 $z=b$ 的那两个点 $w=0$ 与 $w=$

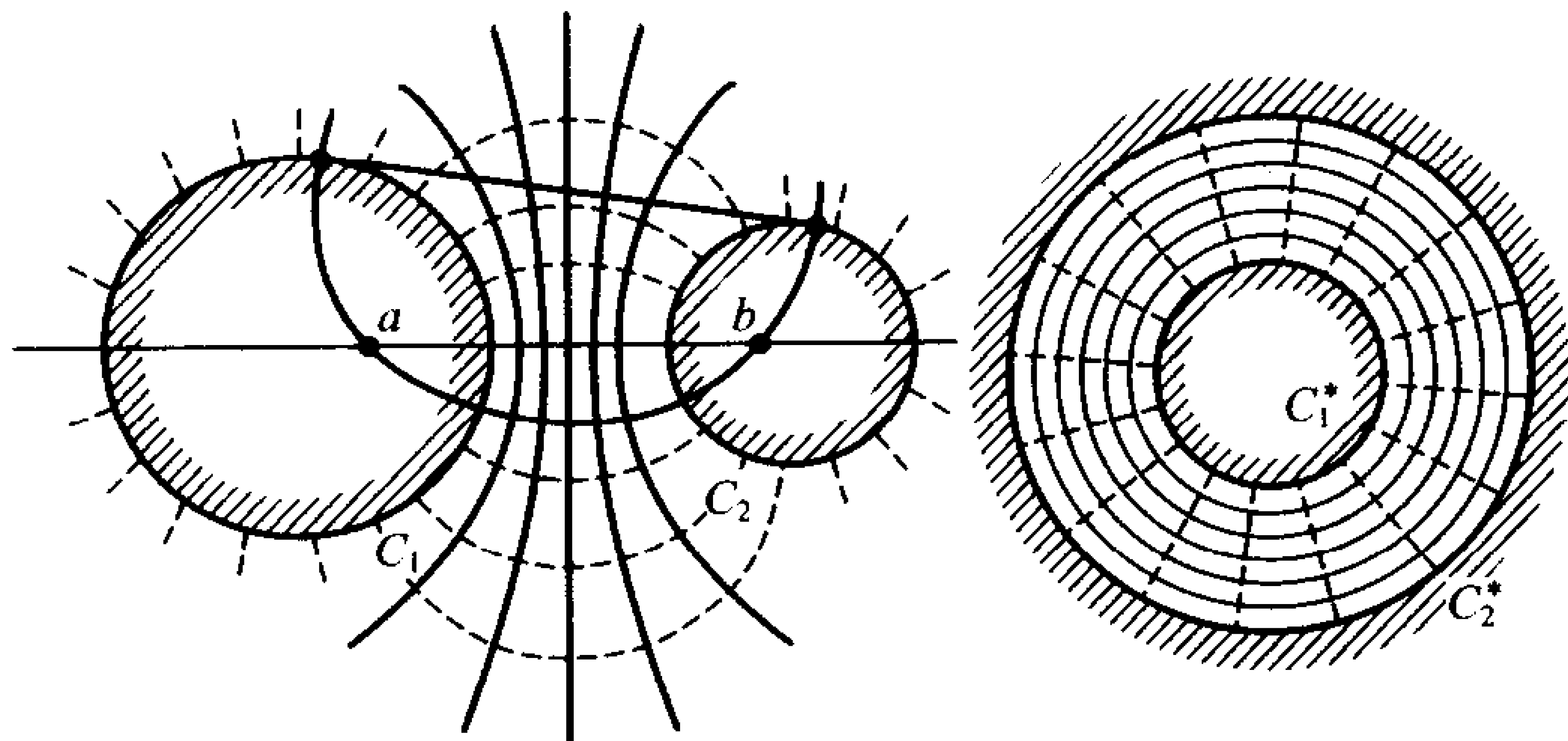


图 61

∞,同时是关于圆周 C_1^* 与关于圆周 C_2^* 的对称点.因此,点 $w=0$ 是圆周 C_1^* 与 C_2^* 的公共中心.在 C_1 与 C_2 之间的那个偏心圆环形,这时就被变换成在 C_1^* 与 C_2^* 之间的一个同心圆环形了.在图 61 中还指出了在这个映射下曲线的对应情况:在 z 平面中的那曲线网,是图 53 中的曲线网的一部分.

用一个补充的映射

$$w_1 = \ln w = \ln \rho + i\theta \tag{20}$$

可把所得到的环形映到带形上,在此式中 θ 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$.这个事实,并不与第 28 目中关于不可能把一个二阶连通区域映到一个单连通区域上去的说法相矛盾,因为用来映射的那个函数(20)是多值的.除此以外,函数(20)还作出一个单叶映射,把它的黎曼曲面中位于这环形上面的那个区域映到带形上,而这个在黎曼曲面中的区域显然是个单连通区域.

当环形的一个圆周位于另一个圆周的内部时的情形,可以借助一个补充的分式线性变换 $z_1 = \frac{1}{z-c}$,而化成刚才所讨论的情形,其中的 c 是在这两个圆周之间的任意一个点.

34. 圆月牙形的映射 我们把由完全平面中的两段圆弧(这就是说,在特例时,也可以是直线段)所围成的区域,叫做*圆月牙形*.我们在这里所讨论的那些例题,不论是在进一步的理论发展过程中,还是在应用中,都起着重要的作用.

(1) 把一段弧的外部映到一个圆的外部上去的映射 这是当围成月牙形的那两段弧相重合时的退化情形.我们假定:在 z 平面中的那段弧 AB 的两个端点,是在点 $\pm a$ 处,并且 w 平面中的那个圆也通过这两个点.此外,我们假设弧的中心在点 $z=hi$ 上,而圆的中心在点 $w=hi$ 上,所以弧在点 $z=a$ 处的切线与负 x 轴组成一个角 $\alpha = 2\arctan\frac{h}{a}$,而圆在点 $w=a$ 处的切线与正 u 轴组成一个角 $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ (图 62).我们借助分式线性函数

$$z_1 = \frac{z-a}{z+a}, \tag{1}$$

把弧 AB 的外部映到某一条射线的外部上.因为 $\left[\frac{dz_1}{dz}\right]_{z=a} > 0$,所以这条射线对于负轴所成的倾斜角也等于 α.然后我们再来求一个把 w 平面中那个已给圆的外部映到

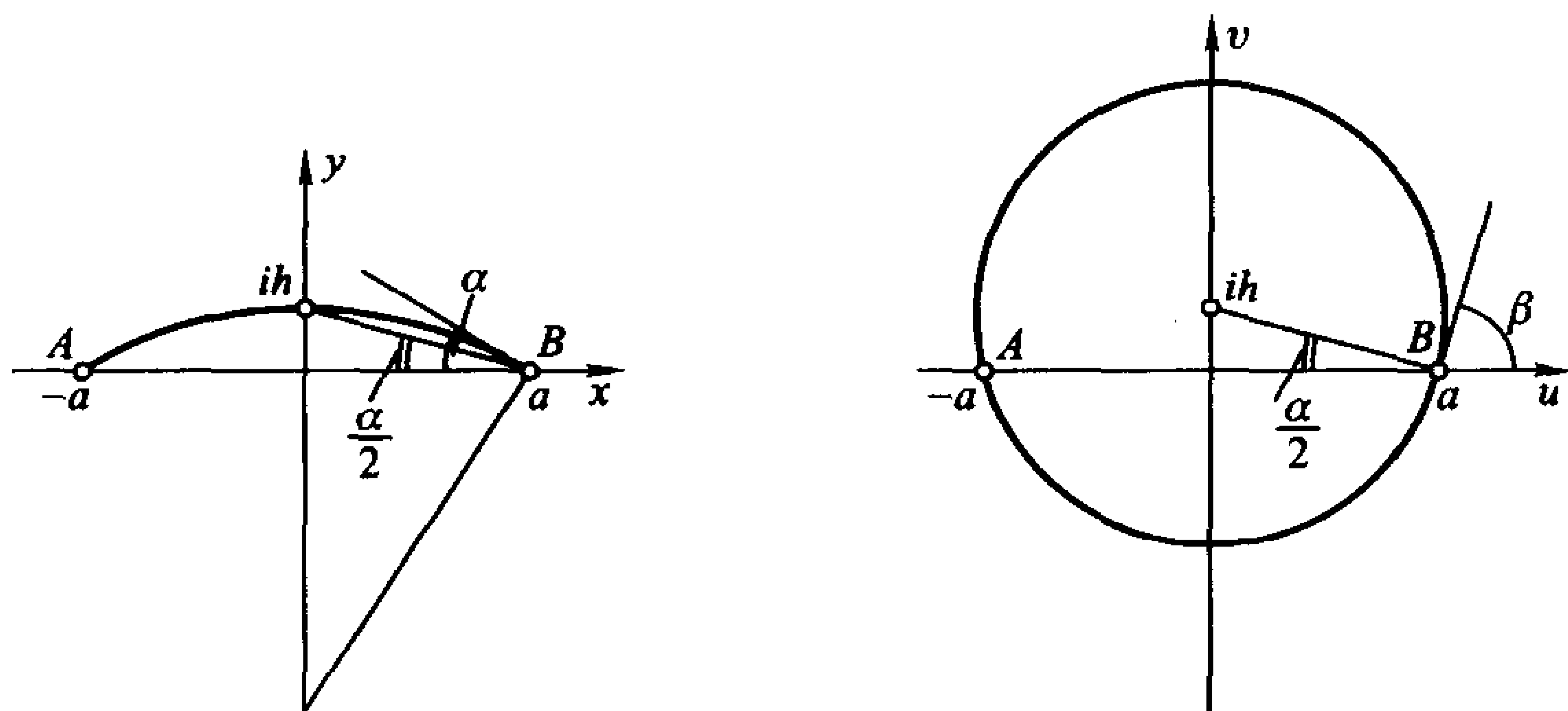


图 62

所得到的这条射线的外部上去的映射. 为此,我们再利用分式线性函数 $w_1=\frac{w-a}{w+a}$,这函数把圆变换成半平面,而把它的圆周变换成某一条直线. 因为 $\left[\frac{dw_1}{dw}\right]_{w=a}>0$,所以这条直线对于正轴所成的倾斜角等于 β. 所以,映射

$$z_1=w_1^2=\left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2 \tag{2}$$

把我们的这个圆,变换成一条射线的外部,这条射线是与正轴相交成角

$$2\beta=\pi-\alpha.$$

因此,这条射线与前面在映射(1)下所得到的那条射线重合. 从关系式(1)与(2)中消去 z_1,我们便得出所求的映射

$$\left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2=\frac{z-a}{z+a}.$$

由这个方程式中,我们得到

$$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{a^2}{w}\right),\quad w=z+\sqrt{z^2-a^2}. \tag{3}$$

在所讨论的这个映射下,任何一个在点 $w=a$ 处与圆周 C 相切的圆周 C',都被变换成一条包围着弧 AB 而且在点 B(即 $z=a$)处有一个返回点的闭曲线,这曲线很像飞机机翼的断面图(图 63). 函数(3)把这曲线的外部共形映射到由圆周 C' 所围成的那个圆的外部上去. 茹科夫斯基所提出的求各类机翼断面(茹科夫斯基断面)的方法,就是以这个结果为基础的.

茹科夫斯基断面的形状依赖于三个参变量:a 表示机翼的宽度,h 表示它的弯曲程度以及 d 表示两个圆周 C 与 C' 的圆心之间的距离,是表示机翼的厚度的(图 63).

(2) 把去掉了一个弓形的半平面映到半平面上去的映射　函数 $z_1=\frac{z}{a-z}$ 把所给的区域(图 64)映到一个扇形 $\alpha<\arg z_1<\pi$ 上. 所以,函数

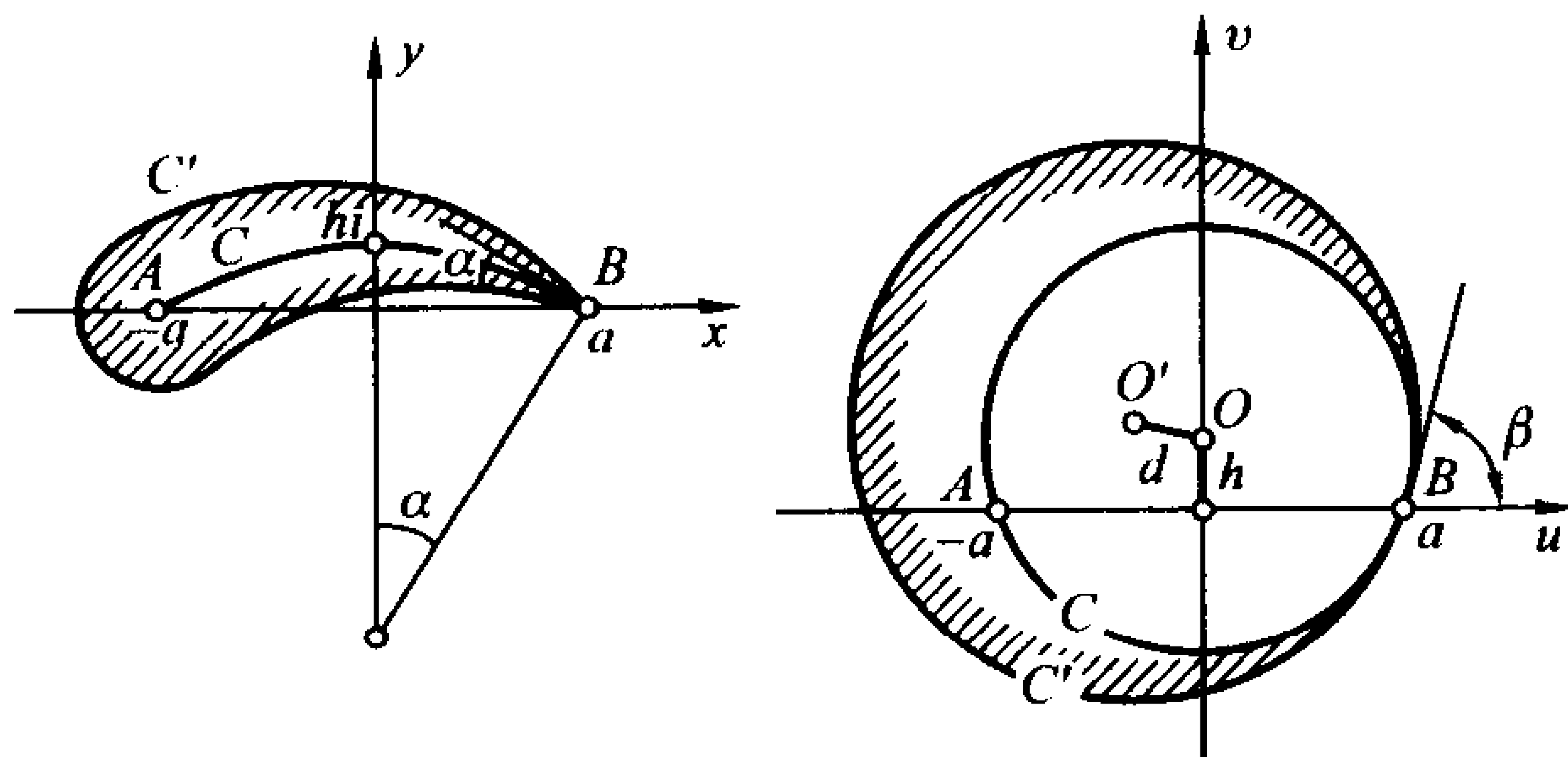


图 63

$$z_2=(e^{-i\alpha}z_1)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}=-\left(\frac{z}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}$$

便把这个区域映到上半个平面上. 我们还规定能满足 $w(\infty)=\infty, w'(\infty)=1$. 因为在前一映射下点 $z=\infty$转变到点 $z_2=-1$,于是就必须再作一个补充的分式线性变换

$$w=\frac{kz_2}{1+z_2}=\frac{k}{1-\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}},$$

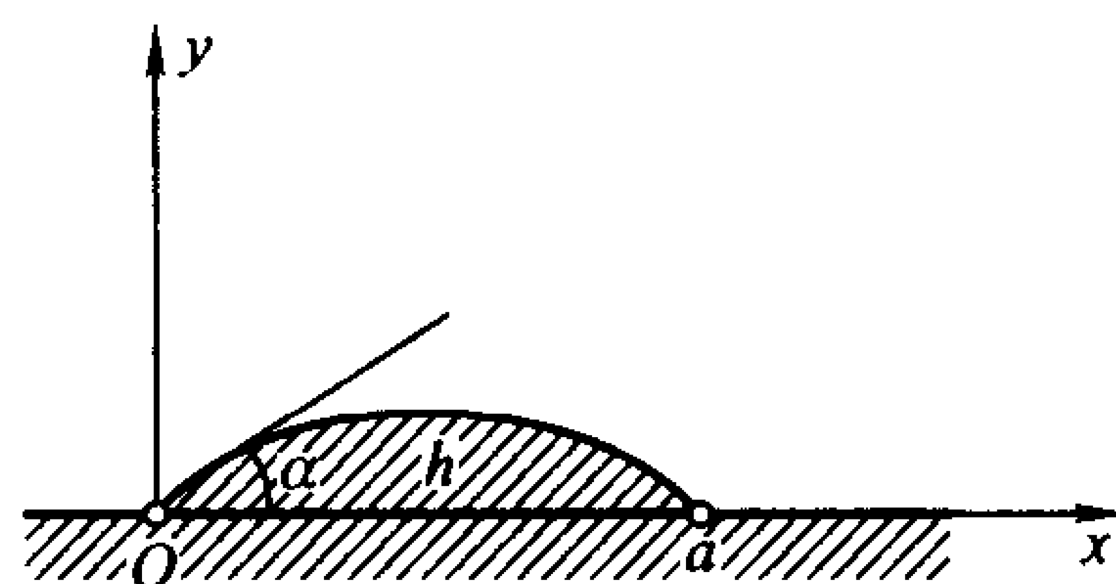


图 64

其中的常数 k 须从所要求的第二个规定条件中求出. 实际上,

$$\frac{dw}{dz}=\frac{k\pi}{\pi-\alpha}\left\{1-\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}\right\}^{-2}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\pi-\alpha}}\frac{a}{z^2}.$$

要求出$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{dw}{dz}$,我们把大括弧中的那两个乘幂按二项式公式展开,每一个乘幂中保留两项. 对于大的$|z|$我们得出:

$$\frac{dw}{dz}\approx\frac{k\pi}{\pi-\alpha}\left(\frac{\pi}{\pi-\alpha}\frac{a}{z}\right)^{-2}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\pi-\alpha}}\frac{a}{z^2}.$$

因此,
$$w'(\infty)=k\left(\frac{a\pi}{\pi-\alpha}\right)^{-1},$$

和
$$k=\frac{a\pi}{\pi-\alpha}.$$

最终我们有

$$w=\frac{a\pi}{\pi-\alpha}\left\{1-\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}\right\}^{-1}+C, \tag{4}$$

其中 C 是任意一个实数常数. 为了要得到映射(4)在 a 与 α 很小时的主要部分,我们使用泰勒展开式中开头的几项. 于是便有

$$\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}=1-\frac{a}{z}\left(1+\frac{\alpha}{\pi}-\frac{a\alpha}{2\pi z}+\frac{\alpha^2}{\pi^2}-\frac{a^2\alpha}{6\pi z^2}-\frac{a\alpha^2}{\pi^2 z}+\frac{\alpha^3}{\pi^3}+\cdots\right)^{*},$$

由此便得出

$$\left\{1-\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}\right\}^{-1}=\frac{z}{a}\left(1-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{a\alpha}{2\pi z}+\frac{a^2\alpha}{6\pi z^2}+\cdots\right),$$

再把它乘以

$$\frac{a\pi}{\pi-\alpha}=a\left(1+\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha^2}{\pi^2}+\frac{\alpha^3}{\pi^3}+\cdots\right),$$

就得到

$$w=z\left(1+\frac{a\alpha}{2\pi z}+\frac{a\alpha^2}{2\pi^2 z}+\frac{a^2\alpha}{6\pi z^2}+\cdots\right)+C\approx z+\frac{a^2\alpha}{6\pi z}+\text{const}. \tag{5}$$

现在来计算所去掉的那个弓形的面积 σ,我们有 $\sigma=\alpha r^2-\frac{a}{2}r\cos\alpha$,其中 $r=\frac{a}{2\sin\alpha}$ 是圆的半径.略去了高阶的无穷小,我们便得到:

$$\sigma=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}-\cot\alpha\right)\approx\frac{a^2\alpha}{6}.$$

因此,公式(5)最后可以写成

$$w\approx z+\frac{\sigma}{\pi z}+\text{const} \tag{6}$$

的形状.

作一个平行的平移,就可以得出一个更一般的结果:

$$w\approx z+\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{z-b}+\text{const}\ (w(\infty)=\infty,w'(\infty)=1) \tag{7}$$

这函数实施一个共形映射,它把去掉了由线段$(b,b+a)$与一段曲率很小的圆弧所围成的一块面积 σ 后的半平面$y>0$,映到半平面 $v>0$ 上.

(3) 把去掉了一个月牙形的圆映到一个圆上去的映射

设月牙形的那两个角点是邻近于点 $e^{i\alpha}$ 的,并且所去掉的那个月牙形的面积 σ 很小(图 65).作两个补充的分式线性映射

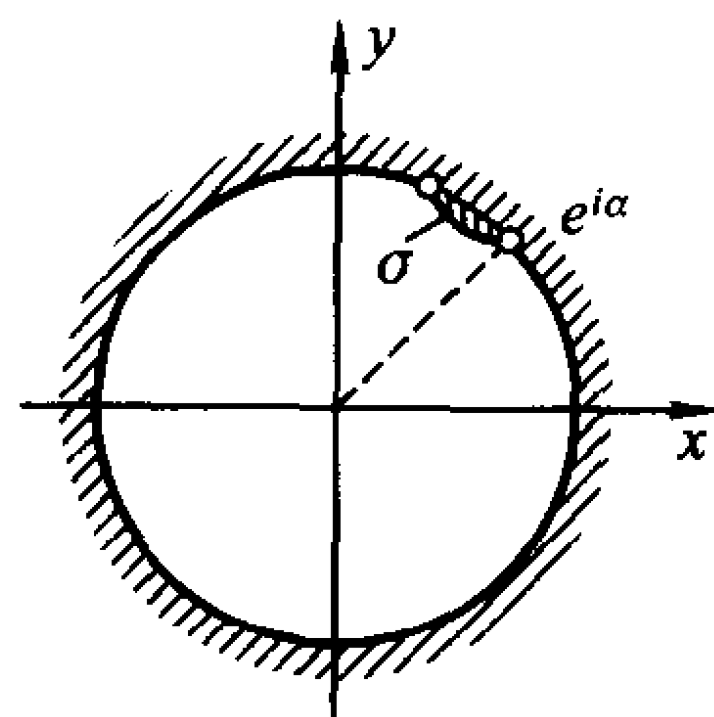


图 65

$$\zeta=i\frac{1-ze^{-i\alpha}}{1+ze^{-i\alpha}},\quad \omega=i\frac{1-we^{-i\alpha}}{1+we^{-i\alpha}},$$

分别把 z 平面内与 w 平面内的单位圆,映到上半 ζ 平面与上半 ω 平面上.

这时月牙形 σ 被变换成与点 $\zeta=0$ 相连接的一个月牙形

$$\sigma^*=\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2_{z=e^{i\alpha}}\cdot\sigma=\frac{\sigma}{4}.$$

---

* 在这里与在下面,省略号"…"都表示 4 阶的无穷小.

根据上一个例题中的公式(6),这时我们得到

$$\omega\approx\zeta+\frac{\sigma^{x}}{\pi\zeta}=\zeta+\frac{\sigma}{4\pi\zeta},$$

或者,回到变量 z 与 w 上来,

$$w=e^{i\alpha}\frac{i-\omega}{i+\omega}\approx e^{i\alpha}\frac{i-\zeta-\dfrac{\sigma}{4\pi\zeta}}{i+\zeta+\dfrac{\sigma}{4\pi\zeta}}\approx z+\frac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi}\frac{(1+ze^{-i\alpha})^{3}}{1-ze^{-i\alpha}} \tag{8}$$

(我们各处都略去了阶数较 σ 更高的无穷小). 在这个映射下,点 $z=0$ 被变换成点 $w_0=\frac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi}$. 再作一个补充的分式线性变换 $w_1=\frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w}$,它把 w 平面中的那个圆映到它自己上,而使点 w_0 被变换成 0,我们便得出:

$$w_1=\frac{w-\dfrac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi}}{1-\dfrac{\sigma e^{-i\alpha}}{8\pi}w}\approx w+\frac{\sigma}{8\pi}(w^2e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}),$$

在用 w 的近似值(8)取代 w,并进行简单变换(在变换中我们再次略去,高于 σ 的阶的无穷小)最后得出,

$$w=f(z)\approx z\left\{1+\frac{\sigma}{2\pi}\frac{1+ze^{-i\alpha}}{1-ze^{-i\alpha}}\right\},f(0)=0 \tag{9}$$

(我们再写 w 来代替 w_1). 映射(9)建立了在圆周 $z=e^{i\varphi}$ 上的点与圆周 $w=e^{i\theta}$ 上的点之间的下述对应关系:

$$e^{i(\theta-\varphi)}=1+\frac{\sigma i}{2\pi}\cot\frac{\varphi-\alpha}{2},$$

或者(如果取它的虚数部分,并且略去高阶无穷小的话),便有

$$\theta\approx\varphi+\frac{\sigma}{2\pi}\cot\frac{\varphi-\alpha}{2}. \tag{10}$$

对于映射在边界上的导数的模,有:

$$|f'(e^{i\theta})|=\left|\frac{d\theta}{d\varphi}\right|\approx1-\frac{\sigma}{4\pi}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\varphi-\alpha}{2}}, \tag{11}$$

对于在坐标原点处的导数

$$f'(0)\approx1+\frac{\sigma}{2\pi}. \tag{12}$$

(4) 把去掉了一个月牙形的带形映到带形上去的映射　设从带形 $0<y<1$ 中,去掉了一个由实轴上的线段 $(0,a)$ 与一段曲率很小的圆弧所围成的弓形 σ (图 66). 我们先作两个补充映射 $\zeta=e^{\pi z},\omega=e^{\pi w}$,分别把这两个带形映到上半平面上,然后再使用公式

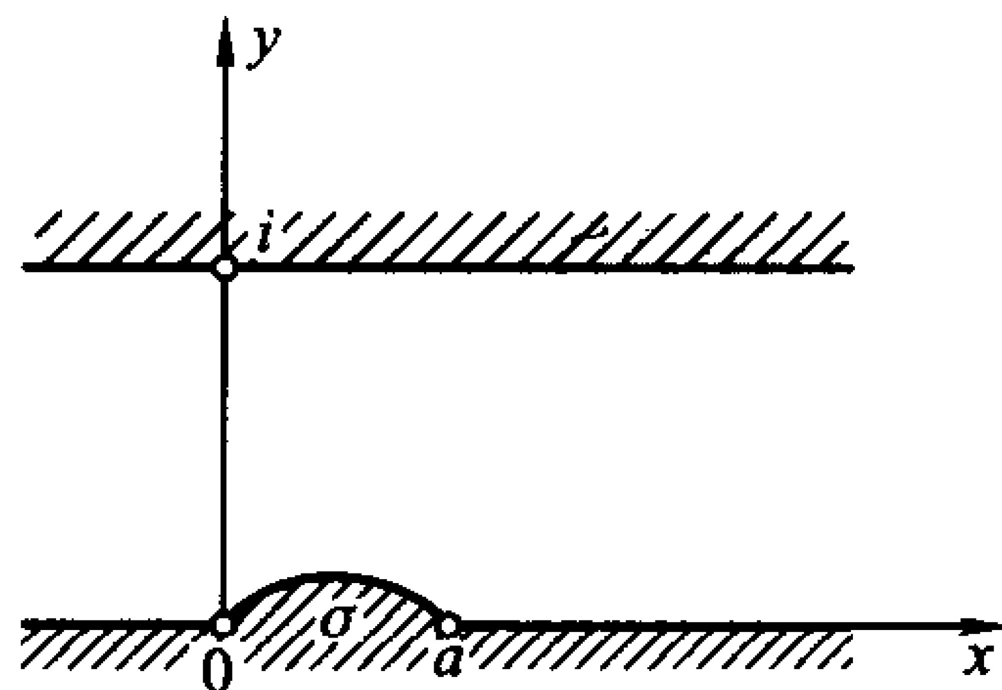


图 66

(7),

$$\omega \approx \zeta + \frac{\sigma^*}{\pi}\frac{1}{\zeta - 1} + \frac{\sigma^*}{\pi},$$

其中 $\sigma^* = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2_{z=0} \cdot \sigma = \pi^2 \sigma$ 是那个弓形的像的面积*，于是就得出了所求的映射

$$w = \frac{1}{\pi}\ln \omega \approx z + \frac{\sigma}{e^{\pi z} - 1}$$

(我们在各处都略去了阶数较 σ 更高的无穷小). 再把 w 平面作一段 $\frac{\sigma}{2}$ 的平移，结果我们便有

$$w \approx z + \frac{\sigma}{2}\frac{e^{\pi z} + 1}{e^{\pi z} - 1} = z + \frac{\sigma}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi z}{2}. \tag{13}$$

如果再对 z 平面作一个补充的平移变换，我们便可以得到一个更一般的结果：函数

$$w \approx z + \frac{\sigma}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi(z - b)}{2} + \text{const} \tag{14}$$

实施一个共形映射，这映射把去掉了一个立在线段 $(b, b + a)$ 上的圆弓形 σ 的带形 $0 < y < 1$，映到带形 $0 < v < 1$ 上. 这个函数，在 $y = 0, y = 1$ 这两条直线上的点与 $v = 0, v = 1$ 那两条直线上的点之间，建立了如下的对应

$$\left.\begin{aligned} u &= x + \frac{\sigma}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi(x - b)}{2} + \text{const}, \\ u &= x + \frac{\sigma}{2}\operatorname{th}\frac{\pi(x - b)}{2} + \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(5) 在把圆月牙形映到带形上去的映射中延伸系数的公式　设月牙形 D 是由两个圆弧 C_1 与 C_2 所围成的，C_1 与 C_2 相交于点 $\pm a$. 并设点 $-ih_1$ 与 $-ih_2$ 分别是圆弧 C_1 与 C_2 同虚轴的交点(图 67). 利用上一目例 1 中的公式(5)，容易建立起一个把月牙形 D 映到带形 $0 < v < h$ 上去的共形映射

$$w = f(z) = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2}\left\{\ln\frac{a + z}{a - z} + i\lambda_1\right\}, \tag{16}$$

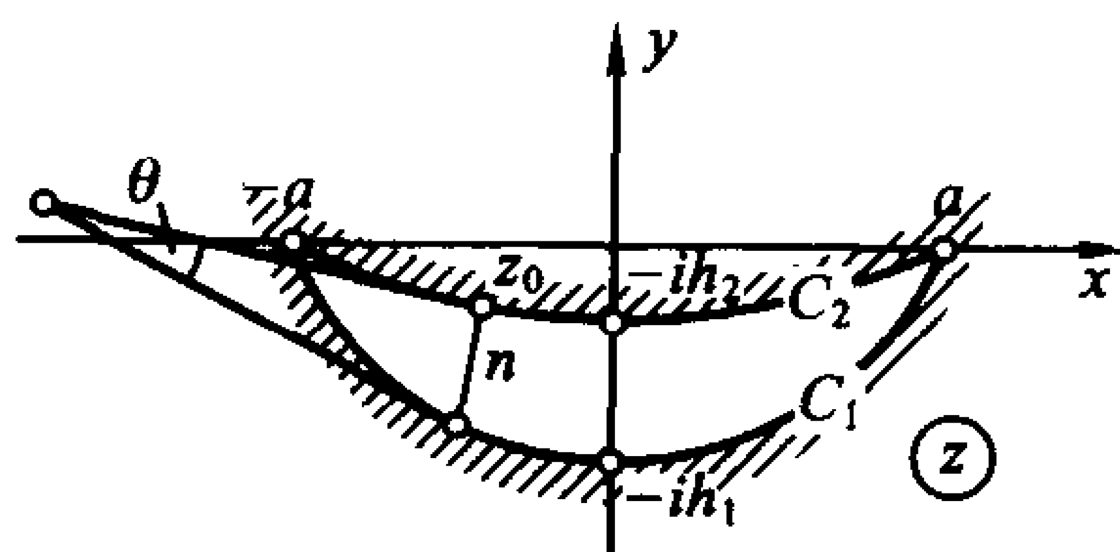


图 67

---

* 在公式(7)中，我们令 $b = 1$, $\text{const} = \frac{\sigma^*}{\pi}$.

其中 $\lambda_k = 2\arctan\frac{h_k}{a}, k=1,2$ *. 把表达式(16)微分,我们得出

$$f'(z)=\frac{2ah}{(\lambda_1-\lambda_2)(a^2-z^2)}. \tag{17}$$

由公式(17)可以得出一个在应用上很重要的近似公式. 设 z_0 是 C_2 上的一个点, n 是圆周 C_2 在点 z_0 处的法线被包含在月牙形 D 内的那一段, ϑ 是 C_1 与 C_2 在线段 n 的两个端点处的切线的交角,而 k_1, k_2 则分别是 C_1 与 C_2 的曲率(图 67). 我们假定, h 以及 k_1-k_2 与 n 都是一阶的无穷小,而且曲率 k_1 与 k_2 是有界的. 这时便可以证明:

$$|f'(z_0)|=\frac{h}{n}\left\{1+\frac{k_1 n}{6}+\frac{k_2 n}{3}+\frac{k_2^2 n^2}{12}+\frac{\vartheta^2}{3}\right\}+\eta, \tag{18}$$

其中的 η 可以表示成具有有界系数的一个关于 n, ϑ, k_1-k_2 的三次齐次多项式.

为了要从公式(17)中导出公式(18),应当先在公式(17)中把参变量 $a, \lambda_1, \lambda_2, z_0$ 都用 n, ϑ, k_1-k_2 来表示,然后把 $|f'(z_0)|$ 按 n, ϑ, k_1-k_2 的乘幂展开到包含二次幂的那些项为止. 但是,在实际施行这个方法时,要引起非常繁复的计算. 所以,我们在这里只从圆周 C_2 同轴 Ox 相合时,亦即 $k_2=0$ 时(见图 68)的特殊情况出发,来求得公式(18). 在这样的情形下,公式(17)给出

$$|f'(x)|=\frac{2ah}{\lambda_1}\cdot\frac{1}{a^2-x^2},$$

其中 $\lambda_1 = 2\arctan\frac{h_1}{a}$, 是弧 C_1 所对的圆心角的一半(图 68). 另一方面,我们有

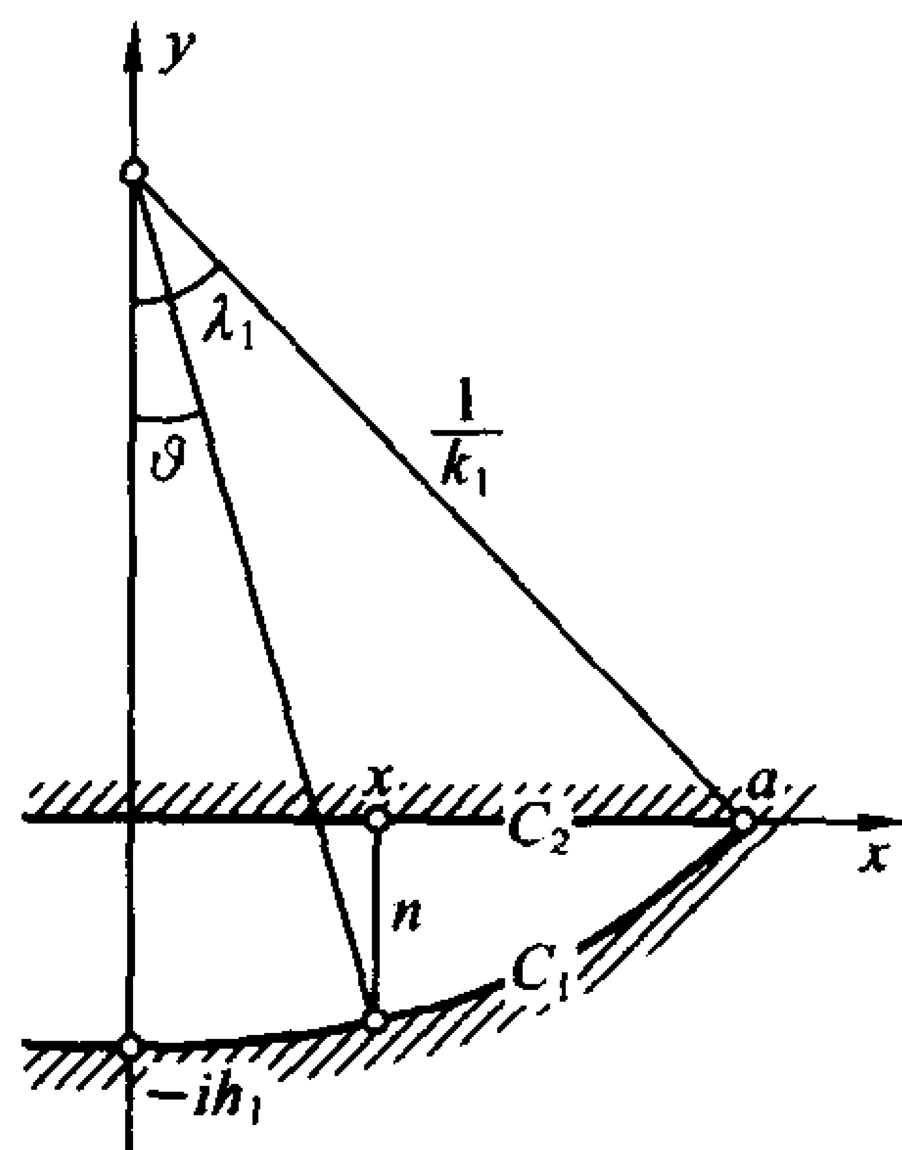


图 68

$$\lambda_1=\arcsin ak_1 = ak_1+\frac{1}{6}a^3k_1^3+\cdots,$$

$$x=\frac{\sin\vartheta}{k_1},\quad n=\frac{\cos\vartheta}{k_1}-\frac{\cos\lambda_1}{k_1},$$

所以

$$|f'(x)|=\frac{2ah}{ak_1+\frac{1}{6}a^3k_1^3}\cdot\frac{1}{a^2-\frac{\sin^2\vartheta}{k_1^2}}+\cdots=\frac{h}{n}\frac{1}{ak_1+\frac{1}{6}a^3k_1^3}\cdot\frac{2(\cos\vartheta-\cos\lambda_1)}{ak_1-\frac{\sin^2\vartheta}{ak_1}}+\cdots.$$

---

* 为了得到公式(16)只要注意到,在第 33 目的函数(5)中用 $\frac{z}{a}$ 代 z,实施一个把所给出的月牙形映到水平的带形上的映射,这水平带的边界经过点

$$\frac{H}{\pi}\ln\frac{a-ih_k}{a+ih_k}=-2i\frac{H}{\pi}\arctan\frac{h_k}{a}=-i\frac{H}{\pi}\lambda_k$$

(与第 9 目的公式(11)比较). 这条带形的宽 $h=\frac{H}{\pi}(\lambda_1-\lambda_2)$,由此可求出 H. 留下的事是,这样平移带形,使得它的下沿岸与实轴重合,我们也就导出公式(16).

随后,在精确到 4 阶无穷小的程度内,我们有

$$2nk_1=2(\cos\vartheta-\cos\lambda_1)\approx\lambda_1^2-\vartheta^2-\frac{1}{12}(\lambda_1^4-\vartheta^4)$$

$$\approx a^2k_1^2-\vartheta^2+\frac{1}{4}a^4k_1^4+\frac{1}{12}\vartheta^4 \tag{19}$$

与

$$\left(ak_1+\frac{1}{6}a^3k_1^3\right)\left(ak_1-\frac{\sin^2\vartheta}{ak_1}\right)\approx\left(1+\frac{1}{6}a^2k_1^2\right)\left(a^2k_1^2-\vartheta^2+\frac{1}{3}\vartheta^4\right)$$

$$\approx a^2k_1^2-\vartheta^2+\frac{1}{3}\vartheta^4+\frac{1}{6}a^4k_1^4-\frac{1}{6}a^2k_1^2\vartheta^2.$$

把这两个展开式中的第一个用第二个来除,我们便在精确到 2 阶无穷小的程度内得到

$$|f'(x)|\approx\frac{h}{n}\left\{1+\left(\frac{a^4k_1^4}{12}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{a^2k_1^2\vartheta^2}{6}\right)\cdot\frac{1}{a^2k_1^2-\vartheta^2}\right\}.$$

再利用在同样的精确程度内成立的那个关系式

$$2nk_1=2(\cos\vartheta-\cos\lambda_1)\approx a^2k_1^2-\vartheta^2,$$

最后我们得出

$$|f'(x)|\approx\frac{h}{n}\left\{1+\left(\frac{n^2k_1^2}{3}+\frac{2nk_1\vartheta^2}{3}\right)\frac{1}{2nk_1}\right\}=\frac{h}{n}\left\{1+\frac{nk_1}{6}+\frac{\vartheta^2}{3}\right\}, \tag{20}$$

这与在 $k_2=0$ 时的公式(18)相符合.

为了要过渡到 $k_2\neq0$ 时的一般情形中去,我们取一个辅助的 ζ 平面,以及这个平面内由实轴上的一段线段 C_2^* 与曲率为 k_1^* 的一段圆弧 C_1^* 所围成的一个月牙形 D^*.把虚轴上包含在月牙形 D^* 内的那一段线段记作 n^*,而把弧 C_1^* 与虚轴的垂直线在它们交点上所形成的那个角记作 ϑ (图 69).作一个把下半 ζ 平面映到那个曲率为 k_2的圆周 C_2的外部上去的共形映射

$$z=\frac{1}{k_2}\frac{i-\zeta}{i+\zeta},\quad\frac{dz}{d\zeta}=-\frac{2i}{k_2}\frac{1}{(i+\zeta)^2}. \tag{21}$$

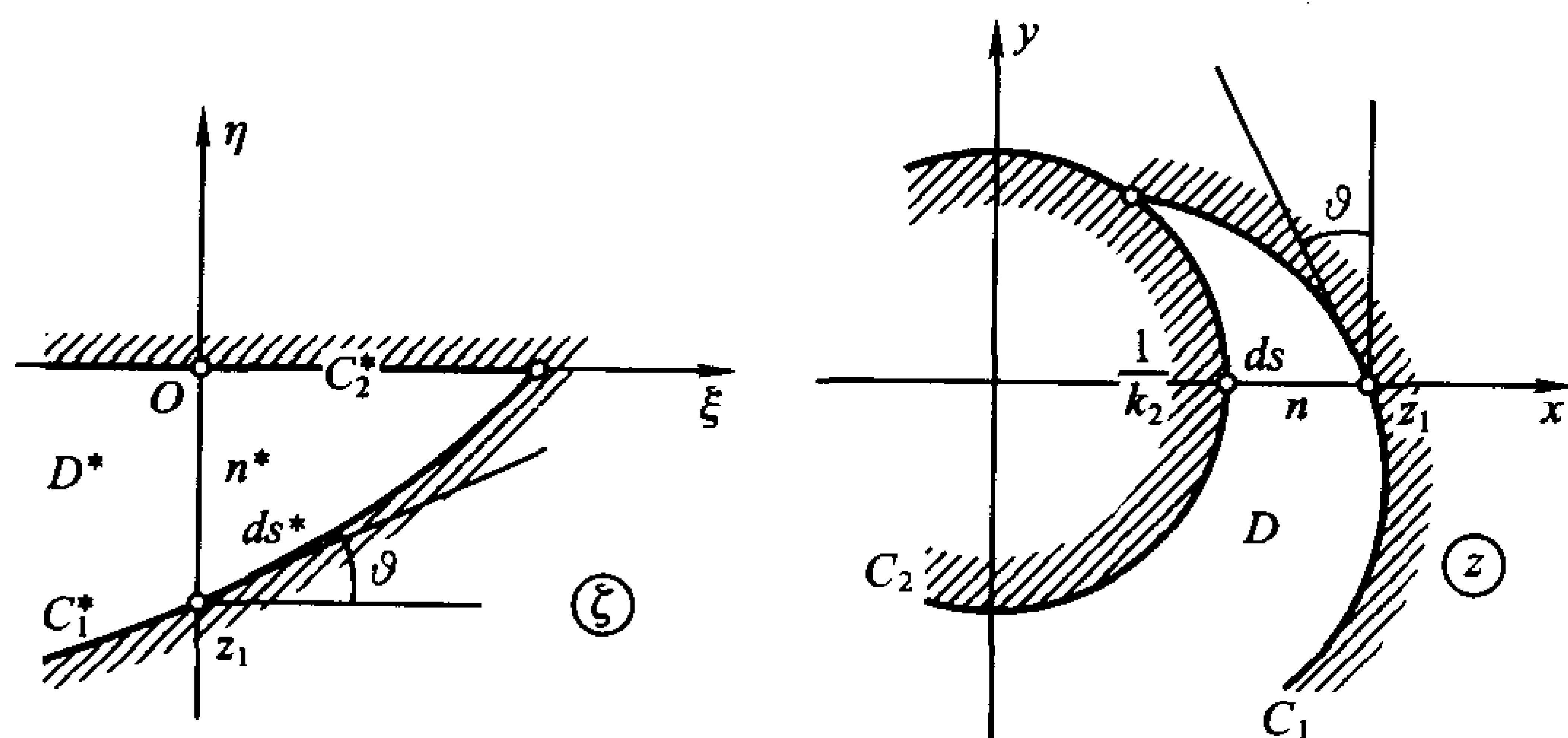


图 69

这时月牙形 D^* 被变换成一个由圆弧 C_2 与具有某一曲率 k_1 的圆弧 C_1 所围成的月牙形 D，虚轴被变换成实轴，而线段 n^* 则被变换成在实轴上的一段线段 n，并且

$$n=\frac{1}{k_2}\frac{1+n^*}{1-n^*}-\frac{1}{k_2}=\frac{2n^*}{k_2(1-n^*)},$$

$$n^*=\frac{k_2n}{2+k_2n}=\frac{k_2n}{2}\frac{1}{1+\frac{k_2n}{2}}, \tag{22}$$

又圆周 C_1 与实轴的垂直线在交点 z_1 上形成角 ϑ(图 69).

现在我们来求 k_1 与其余那些参变量之间的关系. 为此，我们把弧 C_1 的长度单元用 ds 来表示，把 C_1 的切线与 x 轴所形成的角度用 $\alpha(s)$ 来表示(s 从点 z_1 计算起，$\alpha(0)=\vartheta+\frac{\pi}{2}$)，并且把弧 C_1^* 的对应于 ds 的长度单元记作 ds^*. 于是便有 $k_1=\frac{d\alpha}{ds}$. 但是，角 α 的无穷小增量可以表示成

$$d\alpha=k_1^*\,ds^*+d\arg\frac{dz}{d\zeta}$$

的形状，其中那第二项 $d\arg\frac{dz}{d\zeta}=\operatorname{Im}d\ln\frac{dz}{d\zeta}$，表示在毗连点 $\zeta_1=-n^*i$ 的圆周 C_1^* 的弧 $d\zeta=e^{i\vartheta}ds^*$ 上的 $\arg\frac{dz}{d\zeta}$ 的增量. 根据公式(21)，这增量等于

$$-2\operatorname{Im}\frac{e^{i\vartheta}ds^*}{(1-n^*)i}=\frac{2\cos\vartheta}{1-n^*}ds^*,$$

所以对于曲率我们有

$$k_1=\frac{d\alpha}{ds}=\left(k_1^*+\frac{2\cos\vartheta}{1-n^*}\right)\frac{ds^*}{ds}\approx\left(k_1^*+\frac{2\cos\vartheta}{1-n^*}\right)\frac{(1-n^*)^2}{2}k_2,$$

因为，按照同一公式(21)，

$$\frac{ds^*}{ds}=\frac{1}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta_1}}=\frac{k_2}{2}(1-n^*)^2.$$

由此与公式(21)的第二式我们便得出 $\frac{1}{1-n^*}=1+\frac{k_2n}{2}$，我们求得

$$k_1^*\approx\frac{k_1}{k_2}\frac{2}{(1-n^*)^2}-\frac{2\cos\vartheta}{1-n^*}=2\frac{k_1}{k_2}\left(1+\frac{k_2n}{2}\right)^2-2\cos\vartheta\left(1+\frac{k_2n}{2}\right). \tag{23}$$

设函数 $w=f(z)$ 把由弧 C_1 与 C_2 所围成的那月牙形共形映射到宽度为 h 的带形上去. 根据公式(21)，在对应于点 $\zeta=0$ 的那个点 $z_0=\frac{1}{k_2}$ 处，我们有

$$|f'(z_0)|=\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}\cdot\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_0}=\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}\cdot\frac{k_2}{2}.$$

量 $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}$ 可以根据公式(20)来算出，只要在式(20)中把 n 与 k_1 换成 n^* 与 k_1^* 就是

了.利用公式(22)与(23)所求得的 n^* 与 k_1^* 的值,我们在精确到 2 阶无穷小的程度内得出:

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}=\frac{h}{n^*}\left(1+\frac{n^*k_1^*}{6}+\frac{\vartheta^2}{3}\right)$$
$$=\frac{h}{n}\cdot\frac{2}{k_2}\left(1+\frac{k_1n}{2}\right)\left\{1+\frac{k_1n}{6}\left(1+\frac{k_2n}{2}\right)-\frac{k_2n}{6}\cos\vartheta+\frac{\vartheta^2}{3}\right\}$$
$$=\frac{h}{n}\frac{2}{k_2}\left(1+\frac{k_1n}{6}+\frac{k_2n}{3}+\frac{k_1k_2n^2}{6}-\frac{k_2^2n^2}{12}+\frac{\vartheta^2}{3}\right).$$

因为根据所给的条件,差 k_1-k_2 是个无穷小量,所以在与上面相同的精确程度内,$k_1k_2n^2=k_2^2n^2$,于是我们便得出所求的公式

$$|f'(z_0)|\approx\frac{h}{n}\left(1+\frac{k_1n}{6}+\frac{k_2n}{3}+\frac{k_2^2n^2}{12}+\frac{\vartheta^2}{3}\right).$$

§3 对称原理与多角形的映射

在这里我们将要讨论在实际构造共形映射时起着很大作用的两种方法.其中的第一个方法以依靠所谓的对称原理,这原理由 B. 黎曼提出,而由 H. 施瓦茨予以证明.我们在第 36 目中将看到,这个方法使我们能够在某些情况下充分地实质性地简化求共形映射问题的解.

第二个方法在应用上特别重要,因为它使我们能够写出一个函数(固然,一般地讲,只能写成积分的形状),这函数实施把上半平面映到任意一个由多角形所围成的区域上去的映射.

35. 对称原理 在一种特殊的情况下,对称原理给出了关于实施共形映射的那个函数的解析延拓的存在性的一个简单的充分条件.

定理 1(B. 黎曼,H. 施瓦茨) *设区域 D_1 的边界含有一段圆弧 C,并设函数 $w=f_1(z)$ 实施把这区域映到一个区域 D_1^* 上的共形映射,这个共形映射使得弧 C 变换成 D_1^* 的一段边界 C^*,而 C^* 也是一段圆弧.在这些条件之下,函数 $f_1(z)$ 经过圆弧 C 在区域 D_2 内有一个解析延拓 $f_2(z)$,D_2 是关于圆弧 C 与 D_1 成对称的那个区域,这时函数 $w=f_2(z)$ 实施一个把区域 D_2 映到关于 C^* 与 D_1^* 成对称的那个区域 D_2^* 上去的共形映射,而函数*

$$w=f(z)=\begin{cases}f_1(z), & \text{在 } D_1 \text{内},\\ f_1(z)=f_2(z), & \text{在 } C \text{上},\\ f_2(z), & \text{在 } D_2 \text{内},\end{cases}$$

则实施一个把区域 D_1+C+D_2 映到区域 $D_1^*+C^*+D_2^*$ 上去的共形映射*.

为了要证明这个定理,我们作分式线性映射

$$\zeta=\frac{az+b}{cz+d}=l(z),\quad \omega=\frac{a^*w+b^*}{c^*w+d^*}=l_*(w),\tag{1}$$

这两个分式线性映射分别把 C 与 C^* 变换成 ζ 平面与 ω 平面中实轴上的线段 Γ 与 Γ^*. 设这时区域 D_1 与 D_1^* 分别被变换成区域 Δ_1 与 Δ_1^*,而函数 $w=f_1(z)$ 则被变换成一个函数 $\omega=l_*f_1l^{-1}(\zeta)=\varphi_1(\zeta)$,这函数实施一个把区域 Δ_1 映到 Δ_1^* 上去的共形映射(图 70)**. 把相对于直线 Γ 与 Δ_1 成对称的那个区域记作 Δ_2,我们在 Δ_2 内构造一个函数

$$\omega=\varphi_2(\zeta)=\overline{\varphi_1(\bar\zeta)},$$

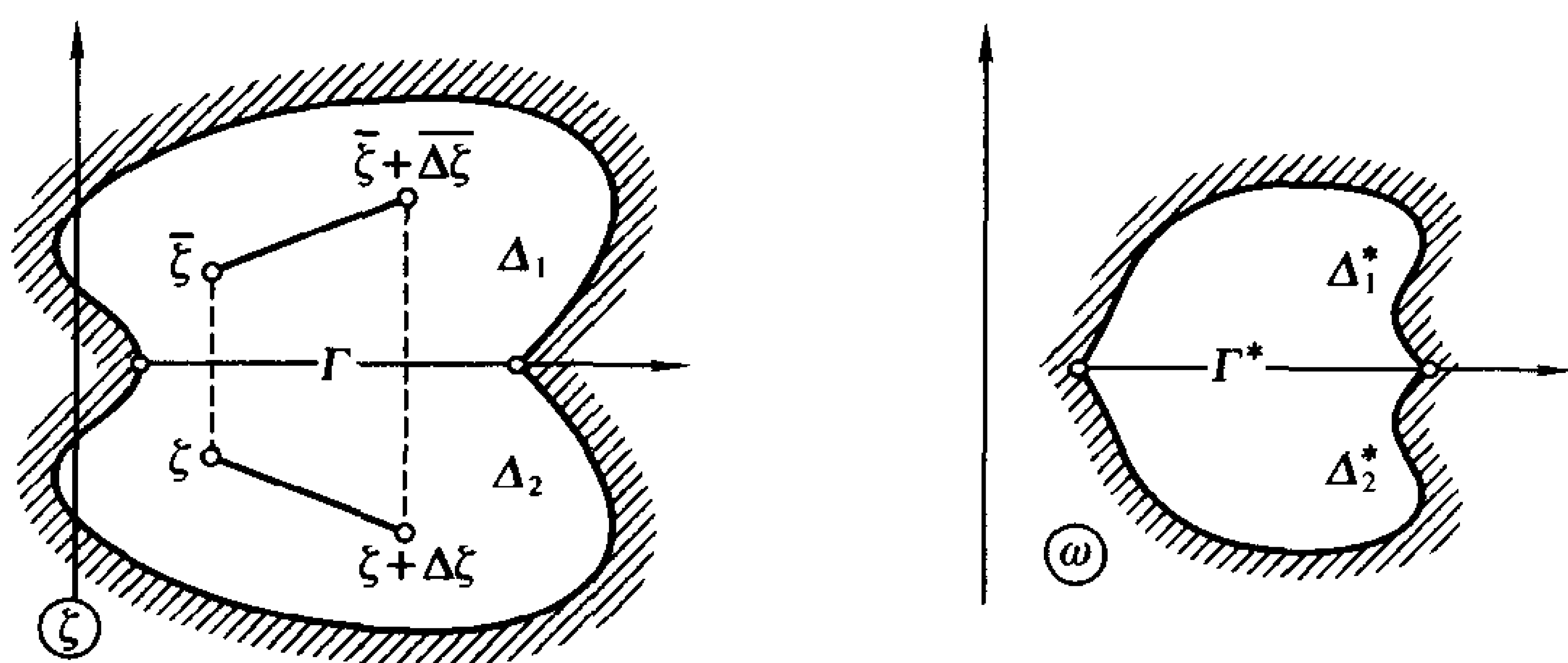


图 70

并且来证明:它是函数 $\varphi_1(\zeta)$ 的解析延拓. 首先,函数 $\varphi_2(\zeta)$ 在区域 Δ_2 内是解析的. 因为对于 Δ_2 中的任何两个点 ζ 与 $\zeta+\Delta\zeta$ 来说,我们都有

$$\frac{\varphi_2(\zeta+\Delta\zeta)-\varphi_2(\zeta)}{\Delta\zeta}=\frac{\overline{\varphi_1(\bar\zeta+\overline{\Delta\zeta})-\varphi_1(\bar\zeta)}}{\Delta\zeta}=\overline{\left(\frac{\varphi_1(\bar\zeta+\overline{\Delta\zeta})-\varphi_1(\bar\zeta)}{\overline{\Delta\zeta}}\right)},$$

其中 $\bar\zeta$ 与 $\bar\zeta+\overline{\Delta\zeta}$ 都是 Δ_1 中的点. 由于 $\varphi_1(\zeta)$ 在 Δ_1 内是解析的,上式的右端当 $\overline{\Delta\zeta}\to0$ 时有极限,所以,在区域 Δ_2 内的任何一个点 ζ 处,导数

$$\varphi_2'(\zeta)=\overline{\varphi_1'(\bar\zeta)}\tag{2}$$

也都存在,这便是说,$\varphi_2(\zeta)$ 在 Δ_2 内是解析的. 根据函数 $\varphi_2(\zeta)$ 的构成方式,它在线段 Γ 上的边界值也都存在

$$\varphi_2(x)=\lim_{\zeta\to x}\varphi_2(\zeta)=\lim_{\zeta\to x}\overline{\varphi_1(\bar\zeta)},\tag{3}$$

因为,根据在共形映射下的边界对应定理(第 29 目),有 $\lim\limits_{\zeta\to x}\varphi_1(\bar\zeta)=\varphi_1(x)$ 存在. 因此关系式(3)便呈 $\varphi_2(x)=\overline{\varphi_1(x)}$ 的形状,但是,因为 $\varphi_1(x)$ 的值都是实数(根据已知条

* 为了要使这个映射是单叶的,必须要求区域 D_1 与 D_2 不相交,于是区域 D_1^* 与 D_2^* 也不相交.

** 这种情形下的对称原理,欧拉还在 1777 年便表述过了.

件，Γ^* 是实数轴上的线段），所以在线段 Γ 上有

$$\varphi_2(x)=\varphi_1(x). \tag{4}$$

因此，根据连续延拓原理（第 25 目），我们便可以作出结论说，$\varphi_2(\zeta)$是 $\varphi_1(\zeta)$经过 Γ 的解析延拓.

从函数 $\varphi_2(\zeta)$的构造上还可以得到：函数 $\varphi_2(\zeta)$把区域 Δ_2共形映射到一个相对于 Γ^* 与 Δ_1^* 成对称的区域 Δ_2^* 上去. 由 $\varphi_1(\zeta)$与它的解析延拓 $\varphi_2(\zeta)$所构成的那个函数 $\varphi(\zeta)$：

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases}\varphi_1(\zeta), & \text{在 } \Delta_1 \text{ 内},\\ \varphi_1(\zeta)=\varphi_2(\zeta), & \text{在 } \Gamma \text{ 上},\\ \varphi_2(\zeta), & \text{在 } \Delta_2 \text{ 内},\end{cases}$$

就实施一个把区域 $\Delta_1+\Gamma+\Delta_2$映到 $\Delta_1^*+\Gamma^*+\Delta_2^*$ 上去的共形映射.

现在我们利用(1)的逆代换，以回到原来的变量 z 与 w 上来. 根据分式线性映射的性质，我们便在关于圆弧 C 与D_1对称的那个区域 D_2内得出一个函数 $f_2(z)$，它是函数 $f_1(z)$经过弧 C 的解析延拓，并且实施一个共形映射，把区域 D_2映到相对于圆弧 C^* 与 D_1^* 对称的那个区域 D_2^* 上. 定理于是得证.

作为应用对称原理的一个例子，我们来证明当已经给定了三对边界点的对应关系时共形映射的唯一性定理，这定理我们在第 29 目中曾经提到过.

定理 2 *把区域 D 映到区域D^* 上，而且把区域 D 的三个边界点 z_k 变换成区域 D^* 的三个边界点 w_k 的共形映射 $w=f(z)$是存在的，并且这样的共形映射只有一个. 这六个点 z_k 与 w_k 都是任意给定的，不过需要保持在行经这两个区域的边界时它们的相互顺序.*

我们首先来讨论当 D 与D^* 都是单位圆时的情形. 按照第 32 目中的公式(2)，可以构成一个把圆$|z|<1$ 映到圆$|w|<1$ 上去的分式线性映射，使其满足已给的条件 $f(z_k)=w_k$. 我们来证明这个映射是唯一的. 假设 $w=g(z)$，$g(z_k)=w_k$是另外一个把圆$|z|<1$ 映到圆$|w|<1$ 上去的映射. 函数 $g(z)$满足对称原理的条件，因此，它可以解析地延拓到相对于圆周$|z|=1$ 与圆$|z|<1$ 对称的那个区域内去，即，可以解析延拓到这个圆的外部$|z|>1$. 函数 $w=g(z)$同它自己的延拓合在一起，作出完全 z 平面的一个单叶映射，因此根据第 31 目中的定理 1，它也是一个分式线性函数. 于是便可以断定 $g(z)\equiv f(z)$，因为，根据第 32 目中的证明，给定了三对点的对应，分式线性映射就可以完全被确定.

一般的情形，可以简单地化成刚才所讨论的那种情形. 事实上，设 $\zeta=\varphi(z)$，$\zeta_k=\varphi(z_k)$与 $\omega=\psi(w)$，$\omega_k=\psi(w_k)$是任何两个分别把区域 D 与D^* 映到圆$|\zeta|<1$ 与$|\omega|<1$ 上去的共形映射，$\omega=F(\zeta)$，$F(\zeta_k)=\omega_k$是把圆$|\zeta|<1$ 映到圆$|\omega|<1$ 上去的那个映射（这映射的存在性和唯一性是有保障的）. 显然，函数

$$w=\psi^{-1}F\varphi(z)=f(z)$$

——其中 ψ^{-1} 是 ψ 的逆映射——作出一个映射,这映射把区域 D 映到区域 D^* 上去,而且保持所给三对边界点的对应.假如还有第二个把区域 D 映射到区域 D^* 的映射 $w=g(z)$ 存在,而且也保持那三对边界点的对应的规定,那么就要得出:有第二个把圆 $|\zeta|<1$ 映到圆 $|\omega|<1$ 上去的映射

$$\omega=\psi g\varphi^{-1}(\zeta)=G(\zeta)$$

存在,也满足规定 $G(\zeta_k)=\omega_k$,而这是同前面的结论相抵触的.定理便已经完全证明了.

我们还要考虑的是:应用这个对称原理,来讨论多阶连通区域共形映射的存在问题.根据第 28 目中的基本定理,任何两个单连通区域都是可以彼此单叶地并且共形地互相映射的.另一方面,我们也已经知道,不可能把一个单连通区域单叶并且共形地映到一个多阶连通区域上去.于是就发生了一个问题:是否可以把一个多阶连通区域映到另一个具有相同连通阶数的多阶连通区域上去?现在已经知道,一般地讲,这问题的回答是否定的.事实上,甚至于连在最简单的同心圆环形的情形,也要有下述定理:

定理 3 要想有一个把环形 $r_1<|z|<r_2$ 映到环形 $\rho_1<|w|<\rho_2$ 上去的共形映射 $w=f(z)$ 存在,其充分必要条件是这两个环相似:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{r_2}{r_1}. \tag{5}$$

为了要证明条件(5)是必要的,我们注意,函数 $f(z)$ 满足对称原理的条件,并且根据这个原理,可以把它解析延拓到区域 $\frac{r_1^2}{r_2}<|z|<r_1$ 和 $r_2<|z|<\frac{r_2^2}{r_1}$ 内去,这两个区域分别是相对于圆周 $|z|=r_1$ 及圆周 $|z|=r_2$ 与环形 $r_1<|z|<r_2$ 成对称的.函数 $f(z)$ (连同它的延拓在一起)把扩大了的环形 $\frac{r_1^2}{r_2}<|z|<\frac{r_2^2}{r_1}$ 映到环形 $\frac{\rho_1^2}{\rho_2}<|w|<\frac{\rho_2^2}{\rho_1}$ 上.于是,我们对于函数 $f(z)$ 再应用对称原理,就可以把它再延拓到环形 $r_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2<|z|<r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ 内去.无限制地继续实施这样的延拓,我们便得到:$f(z)$ 实施一个把区域 $0<|z|<\infty$ 映到区域 $0<|w|<\infty$ 上去的单叶映射.并且,或者是

$$\lim_{z\to 0}f(z)=0,\ \lim_{z\to\infty}f(z)=\infty,$$

或者是

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\infty,\ \lim_{z\to\infty}f(z)=0,$$

这要看对应于圆周 $|z|=r_1$ 的是圆周 $|w|=\rho_1$ 还是圆周 $|w|=\rho_2$ 而定.由此我们便可以断定:$f(z)$ 是一个分式线性函数,具有下述两种形状之一:

$$f(z)=az,\quad f(z)=\frac{a}{z}, \tag{6}$$

其中 a 是一个复数常数. 显然,在这两种情形中,等式(5)都是满足的.

条件(5)的充分性可以从下述事实得出:当具备了条件(5)时,这两个环形是相似的,因此,可以用一个简单的延伸变换把它们中的一个映到另一个上去.

作为对所证明的这个定理的补充,我们还要指出:任何一个二阶连通区域,终究可以被映到某一个环形 $\rho_1<|w|<\rho_2$ 上去,并且,当半径 ρ_1 已经给定时,对于已知的区域来说,半径 ρ_2 是单值地确定了的. 完全同样,任意一个 n 阶连通区域,都可以被映到某一个由平面中去掉 n 个圆而得到的区域上去. 这些命题的证明,读者可以在 M. B. 凯尔迪什的论文[7]或柯朗(R. Kypaht)的书[5]中找到.

最后,我们要举出对称原理在被映射区域的边界含有解析弧时的一个推广. 如果一段弧 C 可以用参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

来给出,其中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 都是实变量 t 在区间 (α,β) 上的解析函数,即,这两个函数在这区间内每一个点 t_0 的邻域内,都可以展开成 $t-t_0$ 的幂级数,那么我们就说,C 是**解析弧**. 这时我们假定,在这区间内的任何一个点处,导数 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 都不会同时变成零(即,在 C 上没有奇点). 曲线 C 也可能是条闭曲线,只要 $x(\alpha)=x(\beta)$, $y(\alpha)=y(\beta)$.

下面的定理称为**解析延拓原理**:

定理 4(H. 施瓦茨) *设函数 $w=f(z)$ 实施一个共形映射,把边界上含有一段解析弧 C 的一个区域 D,映到某一个区域 D^* 上,并且对应于弧 C 的,也是区域 D^* 的边界上的一段解析弧 C^*. 在这些条件之下,函数 $w=f(z)$ 可以经过弧 C 作解析延拓.*

事实上,设 z_0 是弧 C 上的任意一个点,$z=z(t)=x(t)+iy(t)$ 是这曲线的方程,并且 $z_0=z(t_0)$. 由于 C 根据条件是解析弧,所以在 t_0 的某一个邻域 $|t-t_0|<\delta$ 内,函数 $z=z(t)$ 可以展开成 $t-t_0$ 的幂级数. 根据阿贝尔定理,对于 t 的那些复数值(我们用 ζ 来表示)来说,在圆 $|\zeta-t_0|<\delta$ 内这幂级数也是收敛的. 因此,在这个圆内定义了一个解析函数 $z=z(\zeta)$. 因为 $z'(t_0)\neq0$,所以,在必要时把 δ 再减小,我们总可以把映射 $z=z(\zeta)$ 认为是一个共形映射. 根据它的构成方式,$z=z(\zeta)$ 把圆 $|\zeta-t_0|<\delta$ 的一条直径映到曲线 C 的包含点 z_0 的某一段上. 我们假定,这时上半圆变换为区域 D 的内部,而下半圆则变换为 D 的外部.

完全同样地,如果 $w=w(\tau)$ 是曲线 C^* 的方程,我们可以构成一个共形映射 $w=w(\omega)$,把圆心在实轴上的某一个圆 $|\omega-\tau_0|<\delta_1$ 映到点 $w_0=w(\tau_0)=f(z_0)$ 的一个邻域上,并且把这个圆的一条直径变换成曲线 C^* 上的某一段. 我们也假定,上半圆变换为区域 D^* 的内部,下半圆变换为 D^* 的外部.

函数 $w=f(z)$ 构成一个共形映射

$$\omega=\omega\{f[z(\zeta)]\}=\varphi(\zeta)$$

($\omega=\omega(w)$,是 $w=w(\omega)$的反函数),这映射把圆$|\zeta-t_0|<\delta$ 的上半圆映成圆$|\omega-\tau_0|<\delta_1$的上半圆的某一部分,并且把第一个半圆的直径变成第二个半圆的直径的一部分.根据已经证明了的对称原理(定理 1),可以把函数 $\varphi(\zeta)$解析地延拓到下半圆内,并且 $\varphi(\zeta)$ (同它的解析延拓一起)实施一个共形映射,把整个圆$|\zeta-t_0|<\delta$ 映到圆$|\omega-\tau_0|<\delta_1$的包含了一段直径的某一部分上.

所构成的这个 $\omega=\varphi(\zeta)$的解析延拓,产生了函数 $f(z)$的经过曲线 C 上一段的一个解析延拓.事实上,在区域 D 的外部对应于下半个圆$|\zeta-t_0|<\delta$ 的那一部分内,$\omega=\varphi(\zeta)$的延拓定义了一个解析函数 $w=w\{\varphi[\zeta(z)]\}$ (这里的 $\zeta(z)$是 $z(\zeta)$的反函数),它在弧 C 的一段上的边界值,与 $f(z)$的边界值相同.根据连续延拓原理,这函数便是函数 $f(z)$的解析延拓.由于 z_0是曲线 C 上的任意一个点,因此可以断定,$f(z)$经过整段弧 C 都是能作解析延拓的.定理得证.

特别是,若所给的区域的整条边界 C 与 C^* 都是解析曲线,那么函数 $f(z)$就是经过区域 D 的整个边界都能作解析延拓的(因而,在闭区域 $\bar{D}$ 上是解析的).

在下一目中,我们将举出许多应用对称原理来实施共形映射的例题.

36. 例题

(1) 把十字形的外部映到圆的外部上去的映射(图 71) 沿虚轴作一条辅助的割痕(在图中用虚线来表示)FAB,并在图形的右面一半考虑映射 $z_1=z^2$.这映射把所考虑的那一半圆形,变换成沿实轴去掉了一条从 $A(-\infty)$到 $D(a^2)$的射线的平面 z_1,然后我们再利用映射

$$z_2=\sqrt{z_1-a^2}=\sqrt{z^2-a^2}, \tag{1}$$

把所得到的区域变换成右半平面.这时那条辅助的割痕就被变换成虚轴上一条包含点∞的从 $F(-if)$到 $B(ig)$的线段,其中 $f=\sqrt{a^2+c^2}$,$g=\sqrt{a^2+b^2}$ (图 71).

函数 $z_2=\sqrt{z^2-a^2}$满足对称原理的条件,因此,它可以有一个经过 FAB 到左半平面内去的解析延拓,并且,它同它的解析延拓(我们重新用 $z_2=\sqrt{z^2-a^2}$来表示它)一起实施一个映射,这映射把所给的十字形的外部,映到 z_2平面中虚轴上一段线段 BF 的外部上.

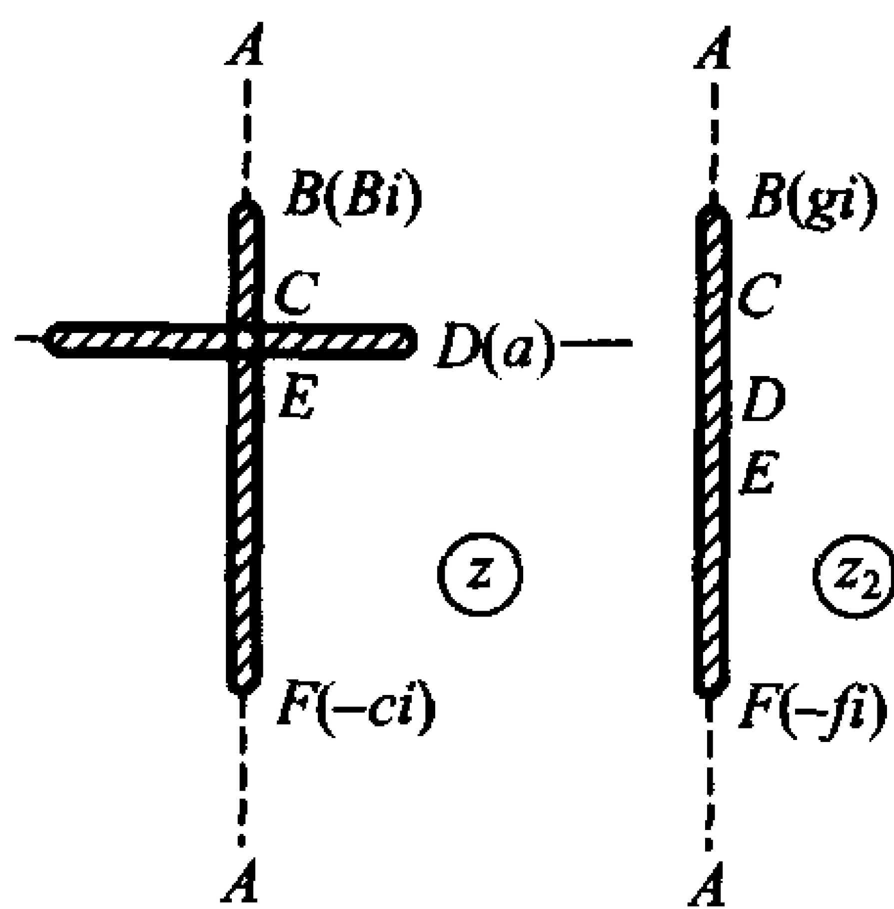


图 71

余下还要把最后那个区域映到单位圆的外部上去.为此,我们先应用一个把线段 BF 的外部变换成单位线段$[-1,1]$的外部的线性映射 $z_3=\dfrac{2i}{f+g}z_2-\dfrac{f-g}{f+g}$,然后再作一个茹科夫斯基映射的逆映射(参看第 7 目):

$$w=-i(z_3+\sqrt{z_3^2-1})=\frac{2}{f+g}\left\{\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2+fg+(f-g)i\sqrt{z^2-a^2}}+\frac{f-g}{2}i\right\}, \tag{2}$$

便得到所求的结果了.

特别,当 $b=c=a$ 时,我们得到 $w=\dfrac{1}{a\sqrt{2}}(\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{z^2+a^2})$,由此便得出

$$z=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{w^4+1}}{w} \tag{3}$$

(参看第 30 目例 3).

(2) 把去掉了一些线段 $1\leqslant|z|\leqslant 1+a, \arg z=\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 的单位圆的外部映到单位圆的外部上去的映射(图 72) 我们在圆的半径的延长线上,从点 B_1 与点 B_2 起到无穷远作两条辅助割线,并建立一个共形映射,把所得到的扇形映到同是那样的一个扇形上去,但是要使点 B_1 与 B_2 落到 A_1 与 A_2 的位置上. 这可以用下述方式来实现:利用变换 $z_1=z^{\frac{n}{2}}$,把扇形映到去掉了半个圆的上半平面上,然后再利用茹科夫斯基函数 $z_2=\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)$,把它映成上半平面. 这时点 B_1 与 B_2 被变换成点

$$\pm(1+a_1)=\pm\frac{1}{2}\left[(1+a)^{\frac{n}{2}}+(1+a)^{-\frac{n}{2}}\right]. \tag{4}$$

然后,我们用变换 $z_3=\frac{z_2}{1+a_1}$ 把这半平面加以压缩,再使用茹科夫斯基的逆映射 $z_4=z_3+\sqrt{z_3^2-1}$. 结果我们重又得到了一个去掉单位半圆的上半平面,但是现在点 B_1 与 B_2 已经被变换成点 ± 1 了. 余下就只要使用映射 $w=z_4^{2/n}$,便得出了所需要的那个把扇形映到一个扇形上去的映射:

$$w=\frac{(1+a_1)^{-\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{4}}\left\{z^{\frac{n}{2}}+z^{-\frac{n}{2}}+\sqrt{(z^{\frac{n}{2}}-z^{-\frac{n}{2}})^2-8a_1-4a_1^2}\right\}^{\frac{2}{n}}. \tag{5}$$

函数(5)满足对称原理的条件. 应用对称原理,我们得出:这函数是可以经过线段 B_2C 延拓的,并且,它同它本身的延拓一起实施一个映射,把 z 平面中第一个扇形与第二个扇形的总和,映到 w 平面中第一个扇形与第二个扇形的总和上(图 72). 所得到延拓也可以经过线段 B_3C 再延拓,新的延拓把 z 平面中的第三个扇形映到 w 平面中的第三个扇形上(使得点 B_3 落到圆周上). 重复这样的推理,最后我们便得出:函数(5)同它的解析延拓一起作出了所要求的那个映射.

在图 72 中展示了所讨论的映射在 $n=8$ 和 $a=0.25$ 时,圆周 $|w|=\rho$ 的一部分像. 可看出,在 $\rho=1.8$ 时,去掉线段的大影响实际上没有显露出来——实际上,这些像与圆周没有不同.

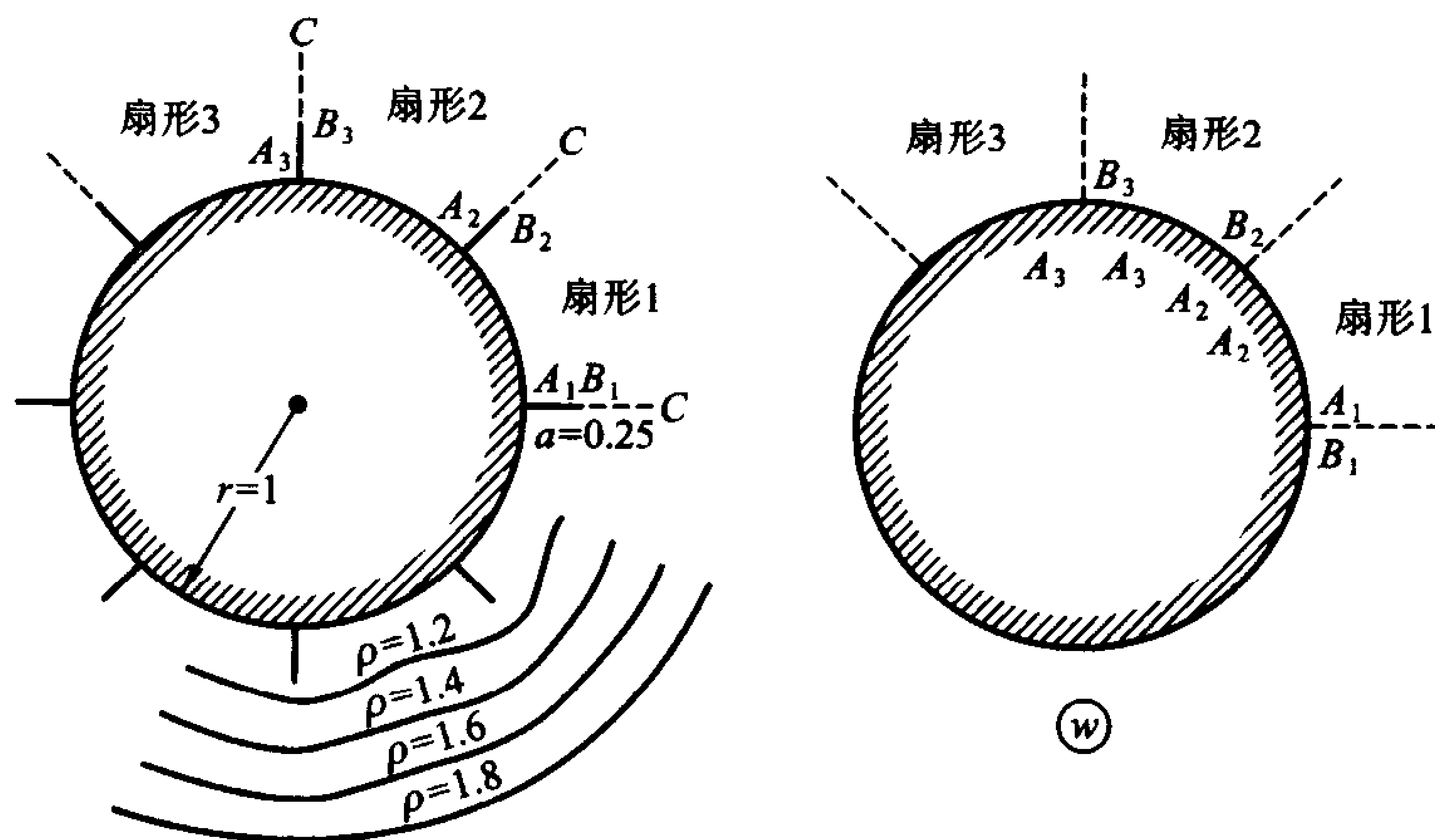


图 72

当 $a=0$ 时，就有 $a_1=0$，于是，函数(5)化成公式 $w\equiv z$. 我们来找出当 a 很小时映射(5)的主要部分. 从关系式(4)我们得出 $a_1\approx\frac{n^2a^2}{8}$. 略去阶数按 a^2 更高的无穷小，从公式(5)便得出我们所讨论的共形映射的一个近似公式：

$$w\approx\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\left(1-\frac{2a_1}{n}\right)\left\{z^{\frac{n}{2}}+z^{-\frac{n}{2}}+\left(z^{\frac{n}{2}}-z^{-\frac{n}{2}}\right)\left(1-\frac{4a_1}{\left(z^{\frac{n}{2}}-z^{-\frac{n}{2}}\right)^2}\right)\right\}^{\frac{2}{n}}$$

$$=z\left(1-\frac{2a_1}{n}\right)\left(1-\frac{2a_1}{z^n-1}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

或者，最后我们得到下面的公式

$$w\approx z\left\{1-\frac{na^2}{4}\frac{z^n+1}{z^n-1}\right\} \tag{6}$$

(参看第 30 目的例 4 中的(10)式). 公式(6)适用于不太邻近那 n 个 1 的 n 次方根的那些点.

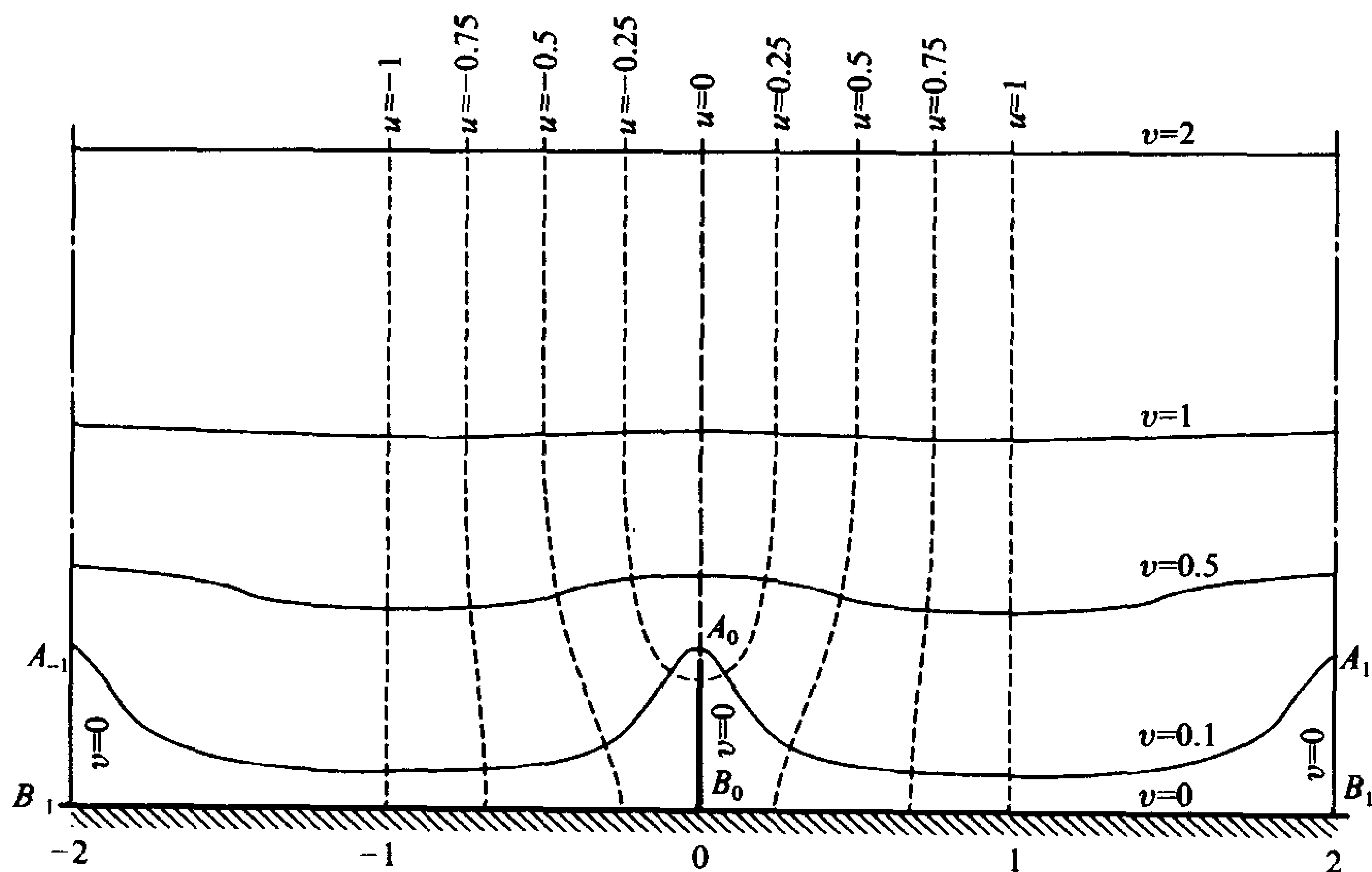


图 73

(3) 把去掉了一些线段 $0\leqslant y\leqslant h$, $x=ka$ ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$) 的上半平面映到上半平面上的映射　从线段的端点 A_{-1} 与 A_0 到无穷远作两条辅助的割痕 $A_{-1}C$ 与 A_0C(图 73 中的虚线)，然后我们来把所得的这半个带形 $CB_{-1}B_0C$ 映到一个同样形状的半带形上去，但是要使点 A_{-1} 与 A_0 被变换成这半带形的两个顶点. 为此，我们先把我们的半带形映成半平面：$z_1=\cos\frac{\pi z}{a}$ (见第 9 目). 再把所得的半平面用映射 $z_2=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{a}}z_1$ 压缩(使得点 A_{-1} 与 A_0 被变换成点 $z_2=\pm1$)，然后再利用第一个映射的逆映射：$w=\frac{a}{\pi}\arccos z_2$. 因此，我们得到所要求的把半带形映成半带形的映射：

$$w=\frac{a}{\pi}\arccos\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{a}}\cos\frac{\pi z}{a}\right\}. \tag{7}$$

对所得到的这个函数应用对称原理无限多次,我们便可以证明:函数(7)实施一个所求的映射,它把图 73 中的"栅形"映成半平面.

图 73 上展示了所讨论映射在 $h=0.5$ 和 $a=2$ 时线 $u=\text{const}$ 和 $v=\text{const}$ 的像.可看出,在 $v=2$ 时丢掉线段的大的影响实际上没有显露出来——所讨论的像实际上与直线没有不同.

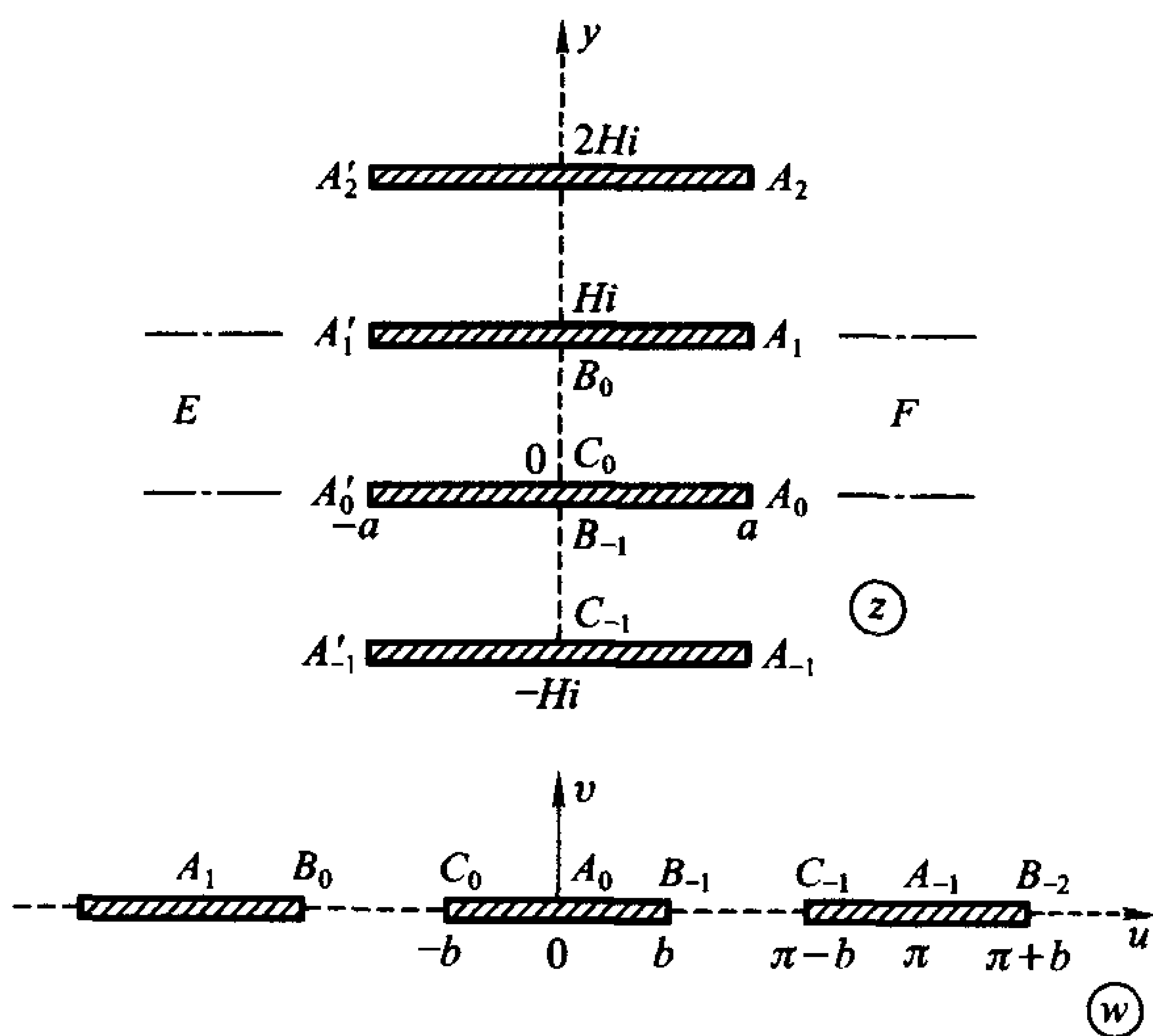


图 74

(4) 把一个去掉了一些线段 $-a\leqslant x\leqslant a, y=kH$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的平面映到一个在实轴上去掉了一些线段的平面上去的映射(图 74,这两个区域都是无限多阶连通的).

我们沿虚轴作一条辅助的割痕(图中的虚线),然后来把所形成的那两个区域中的一个,譬如说右面那个,映成上半平面.为此,我们先把 z 平面旋转 90°,再利用上一例题的结果:函数

$$w=\arccos\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{H}}\operatorname{ch}\frac{\pi z}{H}\right\} \tag{8}$$

实施一个把原区域的右半映成上半平面的共形映射.这时,点 $A_0(z=a)$ 变换成点 $w=\arccos 1=0$,点 $B_{-1}(z=0)$ 被变换成点 $w=\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{H}}=b$,点 $C_{-1}(z=-iH)$ 被变换成点 $w=\arccos\dfrac{-1}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{H}}=\pi-b$,点 A_{-1} 变换成 π,点 B_{-2} 变换成 $\pi+b$,一般地讲,点 A_k 被变换成点 $w=-k\pi$,而线段 B_kC_k 则被变换成线段

$$[-(k+1)\pi+b,-k\pi-b]\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

根据对称原理,我们可以把函数(8)经过这些线段 B_kC_k 来延拓,于是便得出:函数(8)同它的解析延拓一起,实施一个共形映射,这映射把所给的区域,映到去掉了一些线段 $(k\pi-b,k\pi+b)$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的 w 平面上.问题便解决了.

(5) 由二次曲线所围成的区域的映射

A. 抛物线 设坐标原点在抛物线的焦点处,抛物线的方程为 $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ (图 75).

a) 利用函数 $w=\sqrt{z}$,可以把这抛物线的外部映到半平面 $\operatorname{Im} w>\sqrt{\frac{p}{2}}$ 上去.实际上,令 $z=x+iy, w=u+iv$,我们便得出:

$$x=u^2-v^2,\quad y=2uv,\tag{9}$$

由此可以看到:直线 $v=c$ 被变换成抛物线 $y^2=4c^2(x+c^2)$. 当 $c=\sqrt{\frac{p}{2}}$ 时,我们便得到所给出的抛物线.因此,函数

$$w=\sqrt{z}-i\sqrt{\frac{p}{2}}\tag{10}$$

就实施一个把抛物线的外部映到上半平面上去的共形映射.函数(10)在抛物线的内部有一个支点.

b) 为了要得出对抛物线内部的映射,我们沿射线 BFG 作一条割痕(图 75),并且注意:借助函数 $z_1=\sqrt{z}$ 可以把抛物线内部的上一半映到半带形 $0<y_1<\sqrt{\frac{p}{2}}, 0<x_1<\infty$ 上.再利用函数 $z_2=\cos\left\{\sqrt{\frac{2}{p}}\pi i z_1\right\}$,可以把这半带形映到上半平面上,这时与割痕 BFG 对应的是射线 $-1<x_2<\infty$. 应用对称原理,然后再使用变换 $w=i\sqrt{1+z_2}$,我们就得出所求的把抛物线的内部映到上半个平面上去的映射:

$$w=i\sqrt{2}\cos\frac{\pi i z_1}{\sqrt{2p}}=i\sqrt{2}\operatorname{ch}\pi\sqrt{\frac{z}{2p}}.\tag{11}$$

B. 双曲线 a) 为了要找出一个把围在双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

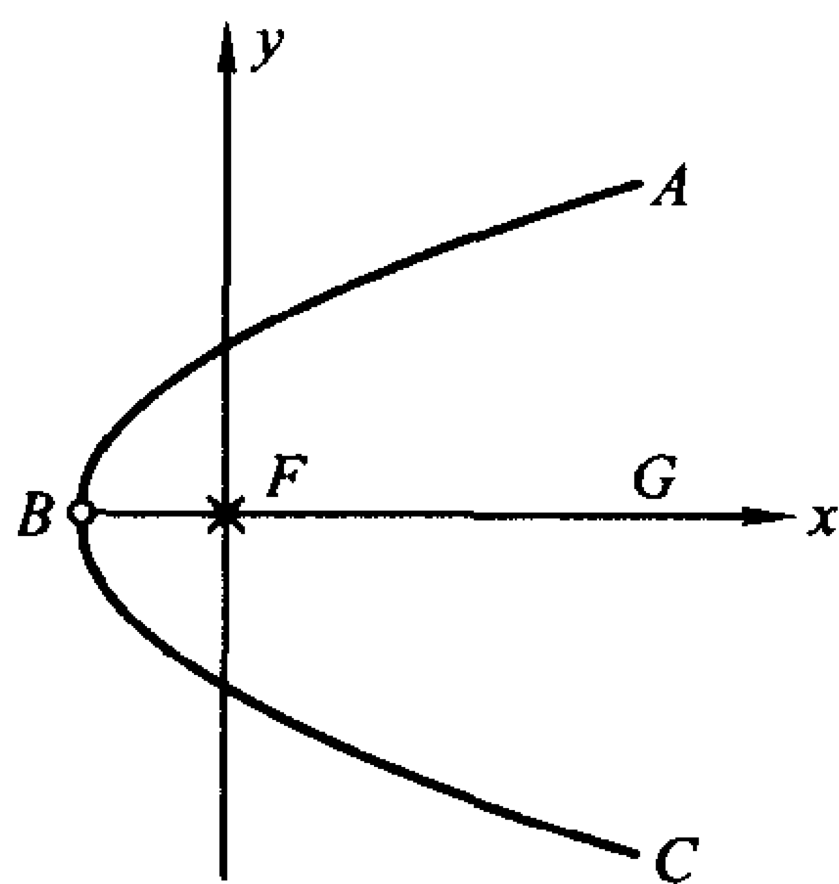


图 75

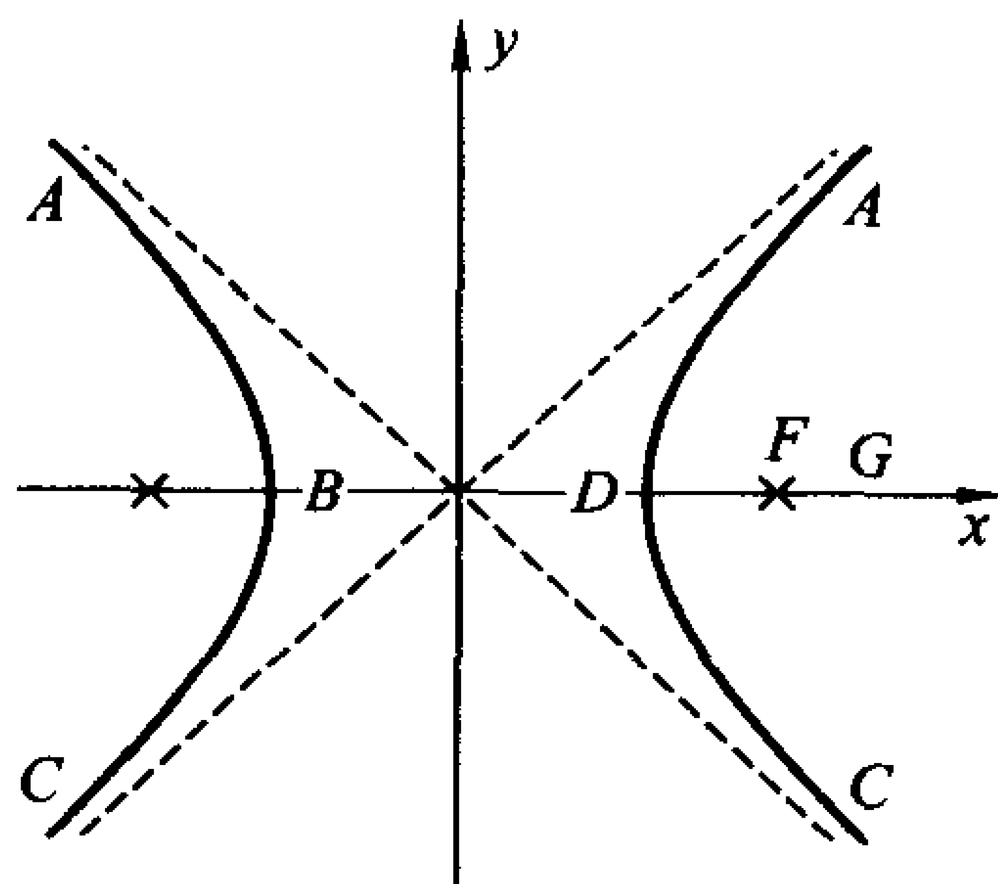


图 76

的两支之间的那个区域(图 76)映到上半平面上去的共形映射,我们沿实轴作一条割痕 BD,并且注意:函数

$$z_1=\frac{1}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})$$

(其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$)把所给区域的上面那一半映到扇形

$$\theta<\arg z_1<\pi-\theta,\quad |z_1|>1$$

上,其中 $\theta=\arccos\frac{a}{c}$ (参看第 7 目). 根据对称原理,这函数实施一个把整个所给的区域映到整个扇形 $\theta<\arg z_1<\pi-\theta$ 上去的共形映射. 并且,函数

$$w=(e^{-i\theta}z_1)^{\frac{\pi}{\pi-2\theta}}=\left(\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{ce^{i\theta}}\right)^{\frac{\pi}{\pi-2\theta}} \tag{12}$$

显然就实施把围在双曲线的两个分支之间的那区域映射到上半个平面上去的映射.

b) 为了要得出双曲线右支内部的映射,我们沿射线 DFG 作一条割痕,并且注意:函数 $z_1=\frac{1}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})=e^{\operatorname{arch}\frac{z}{c}}$,实施一个把这区域的上面一半映到扇形 $0<\arg z_1<\theta,|z_1|>1$ 上去的共形映射. 函数 $z_2=\frac{1}{2}(z_1^{\frac{\pi}{\theta}}+z_1^{-\frac{\pi}{\theta}})=\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{\theta}\operatorname{arch}\frac{z}{c}\right)$ 又把这扇形映射到上半平面上,这时对应于射线 DFG 的,是实轴上的一条射线 $(-1,\infty)$. 应用对称原理,然后再利用一个补充的映射 $w=i\sqrt{1+z_2}$,我们便得出了所求的那个映射,它把双曲线右支的内部映射到上半平面上去

$$w=i\sqrt{1+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{\theta}\operatorname{arch}\frac{z}{c}\right)}=i\sqrt{2}\operatorname{ch}\left\{\frac{\pi}{2\theta}\operatorname{arch}\frac{z}{c}\right\}. \tag{13}$$

C. 椭圆 a) 函数

$$w=\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b} \tag{14}$$

实施一个把椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的外部映到单位圆的外部上去的共形映射,其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (参看第 7 目). 这函数在椭圆的内部有一个支点(图 77).

b) 为了要得出一个椭圆内部的映射,我们沿长轴作一条割痕,然后利用函数 $z_1=\frac{1}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})$. 于是我们得到一个把椭圆内部的上面一半映到上半个环形 $1<|z_1|<\frac{a+b}{c}$, $\operatorname{Im} z_1>0$ 上的映射,这时割痕变换成实轴的两条线段 AF_1, F_2C 及半个单位圆周. 函数 $z_2=\ln z_1$ 再把这半个环形映到矩形 $0<\operatorname{Re} z_2<d$, $0<\operatorname{Im} z_2<\pi$ 上,其中 $d=\ln\frac{a+b}{c}$. 我们还不能应用对称原理,因为我们的割痕的像是一条三节的折线 AF_1F_2B. 需要先把这矩形映到上半平面上,以使得这折线变换成一条直线段. 把一个矩形映到平面上去的映射,不可能借助初等函数的组合来得出——它是由椭圆函数所作出的(见第 39 目中的例 1),所以,把椭圆的内部映到半平面上去的那个映射,也不能用初等函数来写出.

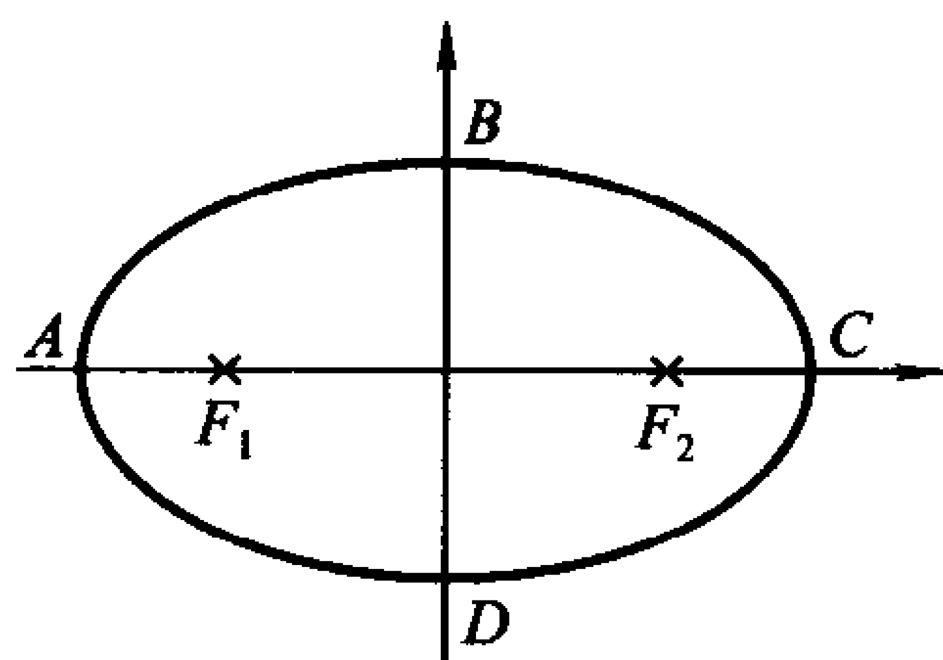


图 77

37. 多角形的映射 在着手推导把半平面映射到多角形上去的公式之前*,我们要先来说明关于共形映射在区域的角点处的状态这个问题. 为了简单起见,我们假设:区域 Δ 的边界,在角点 w_0 的邻域内是由两条直线段构成的. 在这两条线段之间的那个角度,我们用 $\alpha\pi$ 来表示,设 $0<\alpha\leqslant 2$ (图 78). 设函数 $w=f(z)$ 作出一个把

* 这一公式的另一种更结构性的推导见后面的第 44 目.

上半平面映到区域 Δ 上的共形映射，并且，对应于角点 w_0 的，是在实轴上的一个点 z_0.

为了说明函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内的特性，我们引进一个辅助的变量 $\omega=(w-w_0)^{\frac{1}{\alpha}}$. 复合函数

$$\omega=\{f(z)-w_0\}^{\frac{1}{\alpha}}=\omega(z) \tag{1}$$

实施一个共形映射，这映射把点 z_0 的邻域中属于上半 z 平面的那一部分，映到点 $\omega=0$ 的一个邻域中属于某半 ω 平面内的那一部分上，这时对应于 z 平面中实轴上的线段的，是一段直线段(图 78). 根据对称原理，函数 $\omega(z)$ 可以解析延拓到点 z_0 的整

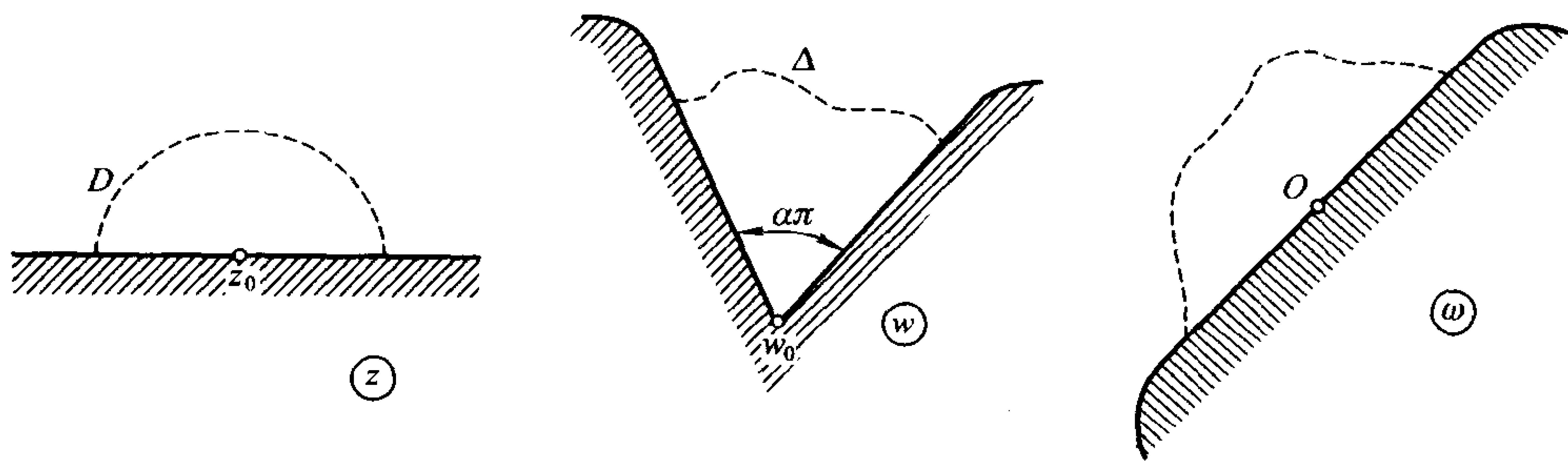


图 78

个邻域内，并且因此可以用泰勒级数来表示

$$\omega(z)=c_1'(z-z_0)+c_2'(z-z_0)^2+\cdots.$$

在这个级数中没有常数项，因为 $c_0'=\omega(z_0)=0$. 但是，由于这函数作出一个共形映射，所以 $c_1'=\omega'(z_0)\neq 0$. 现在再利用关系式(1)回转到函数 $f(z)$ 上来，我们便得到：在点 z_0 的邻域内，函数 $f(z)$ 可以表示成下列形式

$$f(z)=w_0+(z-z_0)^{\alpha}\{c_1'+c_2'(z-z_0)+\cdots\}^{\alpha}.$$

因为在大括弧中的那个表达式在 $z=z_0$ 时不等于 0，所以在点 z_0 的某一邻域内可以分出函数 $\{c_1'+c_2'(z-z_0)+\cdots\}^{\alpha}$ 的一个单值解析分支来. 把这分支展开成泰勒级数，我们便得出函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内的最终表示式

$$f(z)=w_0+(z-z_0)^{\alpha}\{c_0+c_1(z-z_0)+\cdots\}. \tag{2}$$

由此便可以看出：当 $\alpha>1$ 时，导数 $f'(z_0)=0$；当 $\alpha<1$ 时，$f'(z_0)=\infty$. 反过来，就逆映射 $z=\varphi(w)$ 来说，当 $\alpha<1$ 时 $\varphi'(w_0)=0$，当 $\alpha>1$ 时，$\varphi'(w_0)=\infty$.

由这个关系式(2)，我们还可以看到，z_0 在 $\alpha\neq 1$ 且 $\alpha\neq 2$ 时是函数 $f(z)$ 的一个支点.

注意到，更一般的情况，当点 w_0 的邻域中区域 Δ 的边界由光滑的或者甚至解析弧组成，而这两条弧在点 w_0 处相交成角 $\alpha\pi$ 的情况，所作出的结论一般说来是不正

确的*. 在这种情况下,映射函数不一定有形状(2):在它的展开式的主要项中可能出现这样的因子,它们在趋向零和无穷大时比 $z-z_0$ 的任何幂次都慢.

例如,我们在上半圆 $|z|<r, y\geqslant 0$ 内观察函数

$$w=z\ln\left(\frac{1}{z}\right),\quad w(0)=0,\tag{3}$$

其中对数的分支由条件 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 定出. 容易看出,在 r 足够小时,这函数把 x 轴上的线段 $(0,r)$ 变换成 u 轴上线段 $\left(0, r\ln\frac{1}{r}\right)$,把线段 $(-r,0)$ 变换成弧 $\gamma: u=x\ln\frac{1}{-x}, v=-\pi x$,而把半个圆周 $|z|=r, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 变换成接近于半圆周的弧(图 79).

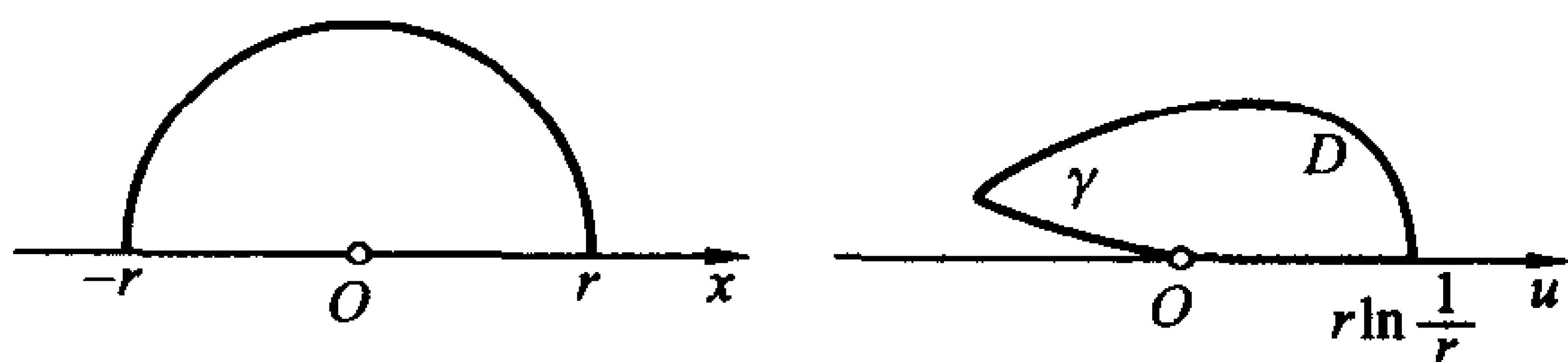


图 79

弧 γ 在点 $w=0$ 处光滑地与线段 $\left(0, r\ln\frac{1}{r}\right)$ 衔接,所以角 $\alpha=1$;同时(3)的展开式的主项被因子 $\ln\frac{1}{z}$ "破坏"了. 对于函数

$$w=\frac{z}{\ln\frac{1}{z}},\quad w(0)=0\tag{4}$$

可观察到类似的影响.

我们转到多角形的映射上来. 设在 w 平面内给出了一个没有自己相交的点的闭多角形 $A_1A_2\cdots A_n$,并且它不包含无穷远点(我们将在下目中来解除这个限制).

根据黎曼的基本定理(第 28 目),必定有一个函数 $w=f(z)$ 存在,它实施把上半 z 平面映到这多角形的内部 Δ 上的共形映射. 为了确定起见,我们规定: z 平面中实轴上的三个点(例如, a_1, a_2 与 a_3)与 Δ 的边界上的三个点(例如,三个顶点 A_1, A_2 与 A_3)是相对应的. 于是根据第 35 目中的定理 2,函数 $f(z)$ 就被单值地确定的. 我们先假定:这函数是已知的,特别是,被变换成多角形的顶点 $A_4,\cdots,A_n$ 的那 $n-3$ 个 x 轴上的点 $a_4,\cdots,a_n$ 都是已知的. 我们的任务是要找出这函数的解析表达式.

因为在实轴的每一段 (a_k, a_{k+1}) 上,函数 $w=f(z)$ 都只取位于直线段 A_kA_{k+1} 上的那些值,所以,根据对称原理,可以把这函数经过这线段解析延拓到下半平面内去.

* 在第三版中这个地方不正确,M. A. 拉夫连季耶夫和 Б. В. 沙巴特善意地提醒我们注意.

这函数的解析延拓实施一个共形映射,它把下半平面映到关于线段 A_kA_{k+1} 与多角形 Δ 成对称的那个多角形 Δ' 上(图 80). 这解析延拓又可以经过任何一段线段 $(a_{k'}, a_{k'+1})$ 而被延拓到上半 z 平面内,这时新的解析延拓所实施的那个共形映射,把上半 z 平面映到关于线段 $A_{k'}A_{k'+1}$ 与多角形 Δ' 对称的那个多角形 Δ'' 上.

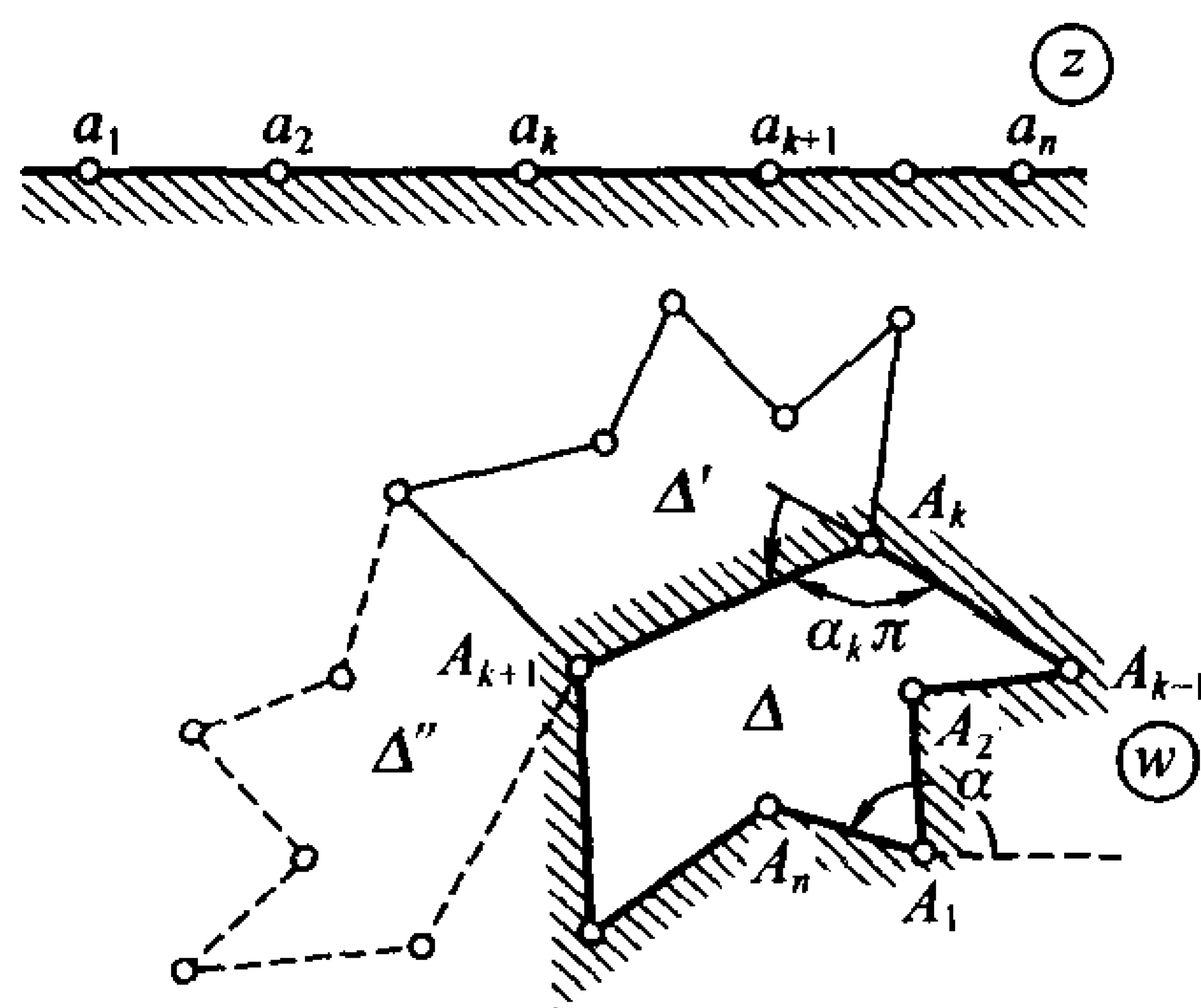


图 80

我们假定:我们已经完成了一切可能的像上面所说那种形式的解析延拓. 一般说来,结果将得出一个无限多值的解析函数 $w = F(z)$, 对于这函数来讲,原先的那个函数 $f(z)$ 是它在上半平面内单值分支中的一个.

设 $w = f_*(z)$ 与 $w = f_{**}(z)$ 是函数 $F(z)$ 在上半平面内的任意两个分支. 按照我们的函数 $F(z)$ 的构成方式,这两个分支分别实施把上半平面映到两个多角形 Δ^* 与 Δ^{**} 上去的共形映射,这两个多角形 Δ^* 与 Δ^{**} 彼此相差偶数次的关于边的对称变换. 但是,因为每一对关于任意两条直线的对称变换,都可以化成某一个平移与旋转,所以在上半平面内处处都有 $f_{**}(z) = e^{i\alpha}f_*(z) + a$, 其中的 a 与 α 都是常数. 对于函数 $F(z)$ 在下半平面内的任何两个分支来说,同样的结论也是正确的.

并且,函数

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{d}{dz}\ln f'(z)$$

在上半平面内是解析的,因为, $f'(z)$ 既然是一个实施共形映射的函数 $f(z)$ 的导数,那就必定处处都不会变成零. 根据前面对函数 $F(z)$ 的分支所作的讨论,在 $f(z)$ 作一切可能的解析延拓时,这个函数 $g(z)$ 仍旧是单值的 $\Big($ 我们有: $f'_{**}(z) = e^{i\alpha}f'_*(z)$, $f''_{**}(z) = e^{i\alpha}f''_*(z)$, 所以, $\dfrac{f''_{**}(z)}{f'_{**}(z)} = \dfrac{f''_*(z)}{f'_*(z)}\Big)$.

因此我们可以得出结论说: $g(z)$ 在完全 z 平面内,除了对应于多角形的顶点的那些点 $z = a_k$ 处以外,处处都是单值的解析函数. $g(z)$ 在无穷远处是解析的,因为点 $z = \infty$ 变换成在多角形的边上的某一个点,而不变换成多角形的顶点.

为了要说明函数 $g(z)$ 在点 $z = a_k$ 处的特性,我们取某一个分支 $f(z)$, 并使用公式(2). 于是就有

$$f(z) = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k}\{c_0 + c_1(z - a_k) + \cdots\}.$$

从这个式子便容易得出 $g(z)$ 在点 $z = a_k$ 的邻域内的洛朗展开式:

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1)\alpha_k c_0(z - a_k)^{\alpha_k - 2} + \cdots}{\alpha_k c_0(z - a_k)^{\alpha_k - 1} + \cdots}$$

$$= \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + c_0' + c_1'(z - a_k) + \cdots.$$

由这展开式可以看出:点 $z=a_k$ 是 $g(z)$ 的一阶极点,具有留数 α_k-1.

因此,函数 $g(z)$ 在完全平面内只有 n 个奇点.从 $g(z)$ 中减去它在这些点处的展开式的主要部分的和,我们得到一个函数

$$G(z)=g(z)-\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}-\frac{\alpha_2-1}{z-a_2}-\cdots-\frac{\alpha_n-1}{z-a_n},$$

这函数在整个完全平面内都是正则的,因而必定是一个常数(参看第 24 目中所叙述的柯西-刘维尔定理).由于在点 $z=\infty$ 处函数 $f(z)$ 是正则的,所以在这个点的邻域内有

$$f(z)=d_0+\frac{d_{-p}}{z^p}+\frac{d_{-p+1}}{z^{p+1}}+\cdots$$

及
$$g(z)=\frac{p(p+1)\frac{d_{-p}}{z^{p+2}}+\cdots}{-\frac{pd_{-p}}{z^{p+1}}+\cdots}=-\frac{p+1}{z}+\frac{d'_{-2}}{z^2}+\cdots.$$

于是 $g(\infty)=0$,因而,$G(\infty)$ 也等于 0.所以

$$g(z)=\frac{d}{dz}\ln f'(z)=\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}+\frac{\alpha_2-1}{z-a_2}+\cdots+\frac{\alpha_n-1}{z-a_n}. \tag{5}$$

把表达式(5)沿着在上半平面内的任何一条路线求积分,然后把对数的形式指数化,我们得到

$$f'(z)=C(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}. \tag{6}$$

再求一次积分,便得出了所求的 $f(z)$ 的表达式.这样就证明了下面的定理:

定理 1(H.施瓦茨,E.克里斯托弗*,1867—1869 年) *如果函数 $w=f(z)$ 实施一个把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映到一个有界的多角形 Δ 的内部的共形映射,Δ 在其顶点 A_k 处有角度 $\alpha_k\pi$ $(0<\alpha_k\leqslant 2, k=1,2,\cdots,n)$,并且,实轴上对应于这多角形的顶点的那些点 a_k $(-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<\infty)$ 都是已知的,那么 $f(z)$ 便可以用积分*

$$f(z)=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_1 \tag{7}$$

来表示,其中 z_0,C 与 C_1 是某三个常数.

求施瓦茨-克里斯托弗(Schwarz-Christoffel)积分时,假定了对应于多角形顶点的那些点 a_k 都是已知的.但是,在共形映射的具体问题中,往往是仅给出了多角形的顶点 A_k,而这些点 a_k 却仍是未知的.按照第 29 目中所说的,其中有三个点(例如 a_1,a_2,a_3)可以任意指定,而其余的那些点以及常数 C 与 C_1,就必须从所给问题的条件来确定**.这种情形是实际使用施瓦茨-克里斯托弗积分时的主要困难.

---

* 爱尔文·克里斯托弗(E. Christoffel,1829—1900),德国数学家.

** 常数 z_0 总可以立即确定,例如,令 $z_0=0$.所以在以后我们便不把它当作公式(7)中未知的参数.

确定这些常数 a_k，C 与 C_1 的方法，我们将在下面具体的例题中来说明. 由上面所叙述的定理 1 的证明中，可以知道，实际求出这些常数，在原则上是可能的. 事实上，设已经给定了一个多角形 Δ. 根据基本定理，我们可以断言：必定存在着一个把半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映到多角形 Δ 上去的唯一的共形映射 $w=f(z)$，它把实轴上三个给定的点 a_1, a_2 与 a_3 变换成 Δ 的三个顶点，譬如说，变换成 A_1, A_2 与 A_3. 就这个函数 $f(z)$ 而言，根据上面的证明，在适当地选定常数 $a_4, a_5, \cdots, a_n, C$ 及 C_1 时，公式(7)便成立. 因此，当三个 a_k 已经给出时，其余的那些常数便也同时被唯一地确定了. 我们还要注意：依照(6)式，在 z 平面的实轴上，当 $z=x>a_n$ 时，对所有 k 都有 $\arg(x-a_k)^{\alpha_k-1}=0$，所以 $\arg f'(x)=\arg C$. 由于那段(含有点 $z=\infty$ 的)线段 (a_n, a_1) 在映射 $w=f(z)$ 下被变换成线段 A_nA_1，所以 $\arg C$ 等于这线段 A_nA_1 与 u 轴所成的那个角度 θ (图 80 中 $\alpha=\theta-\pi$). 给出一个顶点的位置，常数 C_1 就可以被确定. 要确定常数 a_k 与 C，可以利用已知的多角形的边长

$$A_kA_{k+1}=\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f'(x)|\,dx \quad (k=1,2,\cdots,n-1), \tag{8}$$

尽管实际上我们远非经常应用这种方法. 在实际中常常不得不利用近似方法来确定常量 a_k 和 C. 近似方法读者可以在 П. Ф. Фильчаков 的书[10]或者 Г. Н. Положий 的文章[12]中了解到.

38. 补充注释 我们来讨论上目中未曾弄清楚的一些情形.

(1) 多角形有一个顶点是无穷远点的像 例如，设 $a_n=\infty$. 为了要把这情形化成上一目所研究的那种情形，我们作一个分式线性变换 $\zeta=-\dfrac{1}{z}+a_n'$，把半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 变换成半平面 $\operatorname{Im}\zeta>0$，把点 $a_1, a_2, \cdots, a_n=\infty$ 分别变换成有限点* a_1'，$a_2', \cdots, a_n'$. 应用上一目中的公式(7)，我们得出

$$\begin{aligned} w&=C'\int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta-a_1')^{\alpha_1-1}(\zeta-a_2')^{\alpha_2-1}\cdots(\zeta-a_n')^{\alpha_n-1}d\zeta+C_1 \\ &=C'\int_{z_0}^{z} \left(a_n'-a_1'-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_1-1}\left(a_n'-a_2'-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_2-1}\cdots\left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{z^2}+C_1. \end{aligned}$$

把所有括号中的分母都取出来写成共同的分母，并从每一个括号中都取出一个因子 $a_n'-a_k'$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$，便得

$$w=C\int_{z_0}^{z} (z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}\cdot\frac{dz}{z^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-n+2}}+C_1,$$

其中 $a_k=\dfrac{1}{a_n'-a_k'}$，是一些实数常量，而 C 是复数常量(它的表达式中包含所有取出

---

* 如果有一个点 $a_k=0$，那么应该取 $\zeta=\dfrac{-1}{z-a}+a_n'$，其中 a 是一个与所有的 a_k 都不同的数.

的因子).再利用几何学中关于 n 边形顶角的和的一个基本定理

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n-2, \tag{1}$$

结果我们便得出

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}dz+C_1. \tag{2}$$

因此,如果多角形 Δ 的那些顶点中有一个顶点与无穷远点相对应,那么便在施瓦茨-克里斯托弗公式中,丢掉那个与这顶点有关的因子.

在实际应用时,可以利用这事实来简化施瓦茨-克里斯托弗积分(参看第 39 目及其后).

(2) **多角形有一个或几个顶点在无穷远点** 设多角形 Δ 的一个顶点 A_k 是无穷远点.我们在射线 $A_{k-1}A_k$ 上与 A_kA_{k+1} 上,各任意取一个点 A_k' 与 A_k'',把这两个点用直线段连接起来,然后来考虑所得到的那个$(n+1)$角形 Δ'(图 81).根据上一目,把半平面映到多角形 Δ' 上去的那个函数,可以用公式

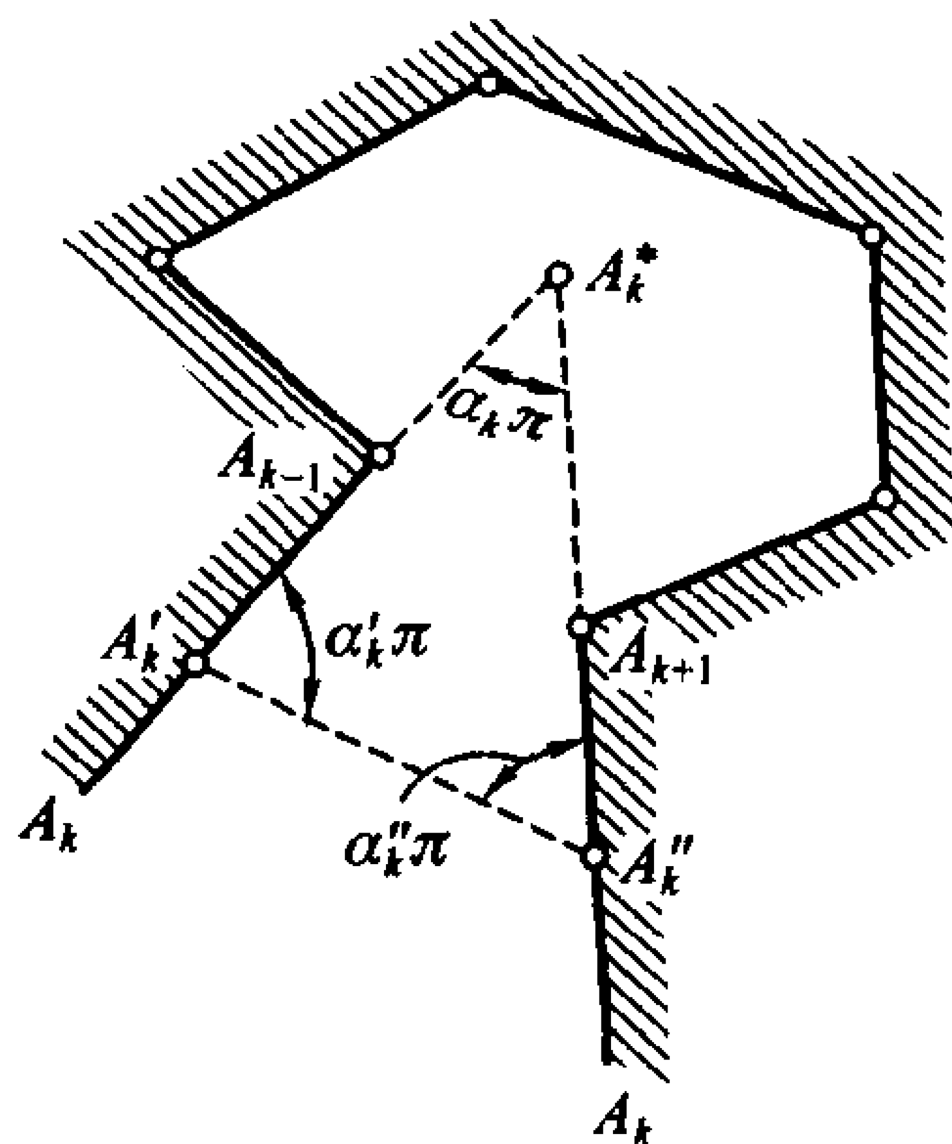


图 81

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_k')^{\alpha_k'-1}(z-a_k'')^{\alpha_k''-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_1 \tag{3}$$

来表达,其中 α_k' 与 α_k'' 分别是在顶点 A_k' 处的顶角与在顶点 A_k'' 处的顶角,以 π 为单位来度量,a_k' 与 a_k'' 是 x 轴上对应于这两个顶点的两个点.

令线段 $A_k'A_k''$ 向无穷远处移远,但始终保持同它原来的位置相平行.这时点 a_k' 与 a''_k 便逐渐合成一个点,就是对应于顶点 A_k 的那个点 a_k.在(3)式中含有 a'_k 与 a''_k 的那两个因子,则在趋于极限时变成$(z-a_k)^{\alpha_k'+\alpha_k''-2}$.我们把射线 $A_{k-1}A_k$ 与 $A_{k+1}A_k$ 在有限点 A_k^* 处的那个交角乘以 -1,记作 $\alpha_k\pi$.于是,由三角形 $A_k'A_k''A_k^*$,我们有 $\alpha_k'+\alpha_k''-\alpha_k=1$,而这就是说,$\alpha'_k+\alpha''_k-2=\alpha_k-1$,因此,(3)式仍然可取通常的形状:

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_k)^{\alpha_k-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_1. \tag{4}$$

当多角形有几个顶点在无穷远处时,可以进行同样的讨论.

因此,对于有一个或几个顶点在无穷远处的那些多角形来说,施瓦茨-克里斯托弗公式仍然有效,只需把顶点在无穷远处的那两条直线之间的角度,规定为这两条直线在有限点处的那个交角乘以 -1 (参看第 31 目).

在我们的无穷远处角度的定义下,关于多角形顶角的和的那个关系式(1),仍然是有效的.实际上,对于顶点都在有限点处的那个$(n+1)$角形 Δ'来说,根据公式(1)我们有 $\Sigma'+\alpha_k'+\alpha_k''=n-1$,在这里 Σ'是表示多角形 Δ 中,除了那个在顶点 $A_k=\infty$ 处的角以外,所有的顶角之和(我们仍然沿用前面所用的那些记号).作代换 $\alpha_k'+\alpha_k''$

$=\alpha_k+1$,便得出对于多角形 Δ 的关系式(1).

(3) 多角形外部的映射　这种情形与在第 37 目中所研究的那情形的不同之处在于,在上半平面中对应于多角形的无穷远点的某一个有限点* a 处,函数 $f(z)$ 有一个一阶极点(若有高阶极点存在,便要同这映射的单叶性相矛盾了).也同在第 37 目中一样,可以证明:在这个点处 $g(z)$ 将有一个一阶极点,其留数等于 -2.同样的结论,对于下半平面中的点 $\bar{a}$ 来说也是成立的,因为点 $\bar{a}$ 是函数 $f(z)$ 的解析延拓的一阶极点.因此,我们便有函数 $g(z)$ 的展开式

$$g(z)=\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}+\frac{\alpha_2-1}{z-a_2}+\cdots+\frac{\alpha_n-1}{z-a_n}-\frac{2}{z-a}-\frac{2}{z-\bar{a}}.$$

由此便得出下述的公式,它表示一个实施把上半平面映到多角形的外部上去的共形映射的函数

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{(z-a)^2(z-\bar{a})^2}+C_1. \tag{5}$$

在这公式中,α_k 是多角形那些顶角的外角,以 π 为单位来度量,a_k 是实轴上对应于多角形的顶点的那些点,a 是上半平面中对应于多角形的无穷远点的那个点,z_0,C 与 C_1 则是某三个常数.

(4) 把单位圆的内部(外部)映到多角形的内部(外部)上去的映射　这映射可以由函数

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_1 \tag{6}$$

实施.在这里 α_k 是多角形的那些内角(外角),以 π 为单位来度量,a_k($|a_k|=1$)是单位圆周上对应于多角形顶点的那些点,C 与 C_1 是某两个常数.此外,当把单位圆的外部映到多角形的外部上时,还假定 z 平面中与 w 平面中的无穷远点互相对应.

对于把单位圆的内部映到多角形的外部上去的映射,有公式

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{z^2}+C_1, \tag{7}$$

其中那些记号的意义同在公式(6)中的一样,并且假定,多角形的无穷远点与圆心相对应.

公式(6)与(7),都可以像在本目开头处导出公式(2)时所做的那样,对 z 平面作一个辅助的分式线性映射,而化成上一目中的形式.

(5) 逆问题　现在设已经给定了任意两组实数 a_k 与 α_k,满足条件 $-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<\infty$,$-2\leqslant\alpha_k\leqslant 2$,$\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=n-2$ 以及任意两个复数 C 与 C_1.我们利用

* 如果多角形的无穷远点是与 z 平面的无穷远点相对应的,那么这无穷远点便是多角形的一个边界点,于是我们就有了在(2)中已研究过的那种情形.

这些数来构成一个施瓦茨－克里斯托弗积分

$$w = C\int_{z_0}^{z} (z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz + C_1. \tag{8}$$

可以证明:在这些条件之下,施瓦茨－克里斯托弗积分决定了一个函数,它把上半平面共形映射到某一个多角形上去,这多角形在其顶点处的顶角等于 $\alpha_k\pi$.

事实上,函数(8)的导数的辐角

$$\arg\frac{dw}{dz} = \arg C + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\arg(z-a_k) \tag{9}$$

在实轴的每一段线段(a_k,a_{k+1}),$k=1,2,\cdots,n-1$ 上都保持不变的值*,而导数$\frac{dw}{dz}$本身,在这样一段线段的内部又是不会变成 0 的. 因此,函数(8)把线段(a_k,a_{k+1})双向单值地映到某一条直线段 A_kA_{k+1}上. 对于实轴上包含了点 $z=\infty$的那段线段(a_n,a_1),也完全同样. 实际上,第一,根据条件$\sum\alpha_k=n-2$,线段(a_n,∞)与$(-\infty,a_1)$在我们的映射下旋转了同样一个角度. 第二,积分(8)在点 $z=\infty$处是收敛的**,所以当 $z\to\pm\infty$时,函数 w 趋于同一个极限.

因此,函数(8)作出在实轴与某一条折线 $A_1A_2\cdots A_n$之间的一个对应关系. 在一般情况下,这折线可以有自交点和不界定任何平面区域(此时它将界定黎曼曲面上一个非单叶区域). 把这些情况排除在外,我们将认为 $A_1A_2\cdots A_n$是某一(单叶)多角形的边界.

我们注意:在这个多角形的顶点中,可能有一些是在无穷远处的——这就是那些使得有 $\alpha_k\leqslant 0$ 的顶点 A_k(事实上,当 z 越接近它们的对应点 a_k时,函数 $w\to\infty$,因为,由于被积函数的无穷大阶数$\geqslant 1$,积分(8)是发散的). 可是,即使是在这种情形中,我们也仍可以应用边界对应原理,并且可以断言:函数(8)实施一个把上半 z 平面映到多角形$A_1A_2\cdots A_n$的内部上去的共形映射. 这多角形在顶点 A_k处的顶角等于$\alpha_k\pi$,因为,由(9)式中可以看出,当按照从左到右的方向通过每一个点 a_k时,$\arg\frac{dw}{dz}$改变$-\pi(\alpha_k-1)=\pi-\alpha_k\pi$,于是,对应的线段 $A_{k-1}A_k$便按照逆时针的方向转动一个角度$\pi-\alpha_k\pi$. 我们的命题已经完全证明了.

便是在条件 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=n-2$ 不满足时,这命题也仍然是正确的. 在这种情况只是出现了多角形的一个添加的对应于点 $z=\infty$的第 $n+1$ 个顶点. 读者可以自行验证:

---

* 我们规定:$\arg(x-a_k)$等于 0 或等于 π,依 $x>a_k$或$x<a_k$而定. 所以,在每一段线段(a_k,a_{k+1})上,(9)式的那个和式中所有的项都是常数.

** 第一个结论是由 $\arg\frac{dw}{dz}$在线段(a_n,∞)上等于 $\arg C$,而在线段$(-\infty,a_1)$上等于 $\arg C+(\sum\alpha_k-n)\pi=\arg C-2\pi$ 推出. 第二个结论是由于:在点 $z=\infty$的邻域内,被积函数的主要项具有 $z^{\sum\alpha_k-n}=z^{-2}$的形状.

如果 $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < n-2$，则这个顶点是一个有限点；如果 $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k > n-2$，则这个顶点是无穷远点.

(6)"星形"外部的映射　最后，遵循拉赫金(L. K. Lahtin)，我们求出圆外部 $|z|>1$ 映射到由坐标原点引出的 n 条直线线段所组成的"星形"的外部的一般公式(图 82). L_k 与 L_{k+1} 之间的角用 $\alpha_k\pi$ 表示，对应这个角的顶点和端点 L_k 的圆周上的点分别通过 a_k 和 b_k ($k=1, 2, \cdots, n, L_{n+1}=L_1$) 表示.

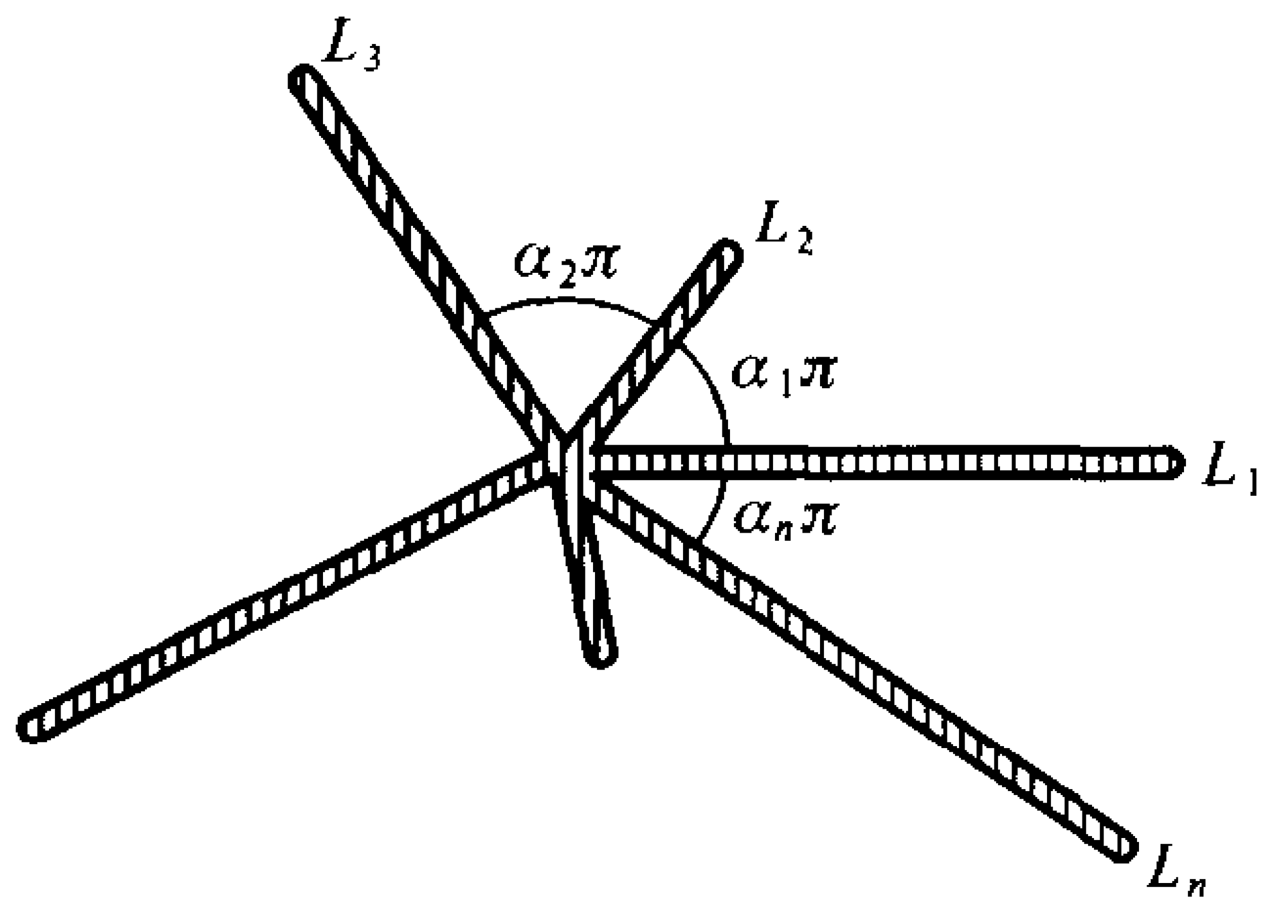


图 82

首先我们讨论 ζ 的上半平面到所给区域的映射. 设 a'_k 和 b'_k 是平面 ζ 的实轴上的点，它们分别对应 L_kL_{k+1} 角的顶点和线段 L_k 的端点，并且 a_0 是对应 $w=\infty$ 的上半平面的点. 映射函数 $w=f(\zeta)$，显然，在点 $\zeta=a'_k$ 的邻域内应当有形状

$$f(\zeta)=(\zeta-a'_k)^{\alpha_k}\varphi_k(\zeta), \quad \varphi_k(a'_k)\neq 0,$$

而在 $\zeta=b'_k$ 的邻域内有形状

$$f(\zeta)=c_k+(\zeta-b'_k)^2\psi_k(\zeta), c_k\neq 0, \psi_k(b'_k)\neq 0,$$

其中 $\varphi_k(\zeta)$ 和 $\psi_k(\zeta)$ 在所提到的邻域内是正则函数. 最后，在点 a 和 $\bar{a}$ 处它应该有一阶极点，并且在平面 ζ 的其余点上应该是正则的. 如上面一样，由此我们作出结论，映射函数的对数导数应该在点 $\zeta=a'_k$ 处有一阶极点，带有留数 α_k，在点 $\zeta=a$ 和 $\zeta=\bar{a}$ 处有一阶极点，带有留数 -1，并且在点 $\zeta=b'_k$ 和 ζ 平面的其余点上是正则的.

由此可见，

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\zeta-a'_k}-\frac{1}{\zeta-a}-\frac{1}{\zeta-\bar{a}}.$$

因而，在积分和反对数演算后我们得到

$$f(\zeta)=C'\frac{\prod_{k=1}^{n}(\zeta-a'_k)^{\alpha_k}}{(\zeta-a)(\zeta-\bar{a})},$$

其中 C' 为某个常数.

完成补充映射 $z=(\zeta-\bar{a})/(\zeta-a)$，把上半平面映射到单位圆的外部 $|z|>1$，我们得到所要找的映射有形状

$$w=C\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k}, \tag{10}$$

其中 C 和 a_k（$|a_k|=1$）为某一些常数*.

与拉赫金公式(10)一样，使用通常的把圆外部映射到多角形外部的公式是较方便的，对我们的情况这公式有形状

$$w = C_1 \int \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\alpha_k - 1}(z-b_k)\frac{dz}{z^2}. \tag{11}$$

公式(10)和(11)联合考虑能够避开令人厌倦的积分.

作为例子，我们考虑特殊情形 $n=2$，此时多角形表现为两条在坐标原点相交成角 $\alpha_1=\alpha$ 的线段的外部. 我们有 $\alpha_2=2-\alpha$，并且公式(10)和(11)分别采用这样的形状

$$w = \frac{C}{z}(z-a_1)^{\alpha}(z-a_2)^{2-\alpha}, \tag{12}$$

$$w = C_1 \int \left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\alpha-1}(z-b_1)(z-b_2)\frac{dz}{z^2}. \tag{13}$$

比较导数，经简单变换后我们将有

$$\frac{C_1}{C}(z-b_1)(z-b_2) = z^2-(\alpha-1)(a_2-a_1)z-a_1a_2,$$

由此为了确定常数 b_1 和 b_2 我们得到方程

$$z^2-(\alpha-1)(a_2-a_1)z-a_1a_2=0.$$

例如，我们可以采取 $b_1=1$，此时 $(\alpha-1)(a_2-a_1)=1-a_1a_2$ 和 $b_2=-a_1a_2$. 公式(12)包含四个实参数($C=C_1+iC_2, a_1=e^{i\varphi_1}, a_2=e^{i\varphi_2}$)，选择它们，可以达到点 b_1，b_2 和线段的端点 L_1 和 L_2 的对应关系.

在下一目中，我们将要就施瓦茨－克里斯托弗公式对于多角形映射上的应用，举一些例题.

39. 例题

(1) 把上半个平面 $\mathrm{Im}\, z>0$ 映到一个矩形 $A_1A_2A_3A_4$ 上去的映射(图 83) 我们先来讨论一个映射，它把 z 平面中的第一象限映到所给矩形的右半面 OA_1A_2B 上，并且使三对点 $O\leftrightarrow 0, A_1\leftrightarrow 1, B\leftrightarrow\infty$ 成对应. 我们把变换成点 A_2 的原像记作 $\frac{1}{k}$，其中 $0<k<1$. 所求的那个映射可以看作是这映射根据对称原理经过 y 轴的正向半轴的解析延拓，所以，可以令 $A_3\leftrightarrow -\frac{1}{k}$ 和 $A_4\leftrightarrow -1$. 因此所求的映射可以写成

---

* 我们有 $\zeta=\frac{az-\bar{a}}{z-1}$，$\zeta-a_k'=a_k''\frac{z-a_k}{z-1}$（$a_k''$ 为常数），$\zeta-a=\frac{a-a''}{z-1}$，$\zeta-\bar{a}=\frac{(a-\bar{a})z}{z-1}$，除此之外，还有 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=2$.

$$w = C' \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\left(z^2-\frac{1}{k^2}\right)}} + C_1$$

$$= C \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

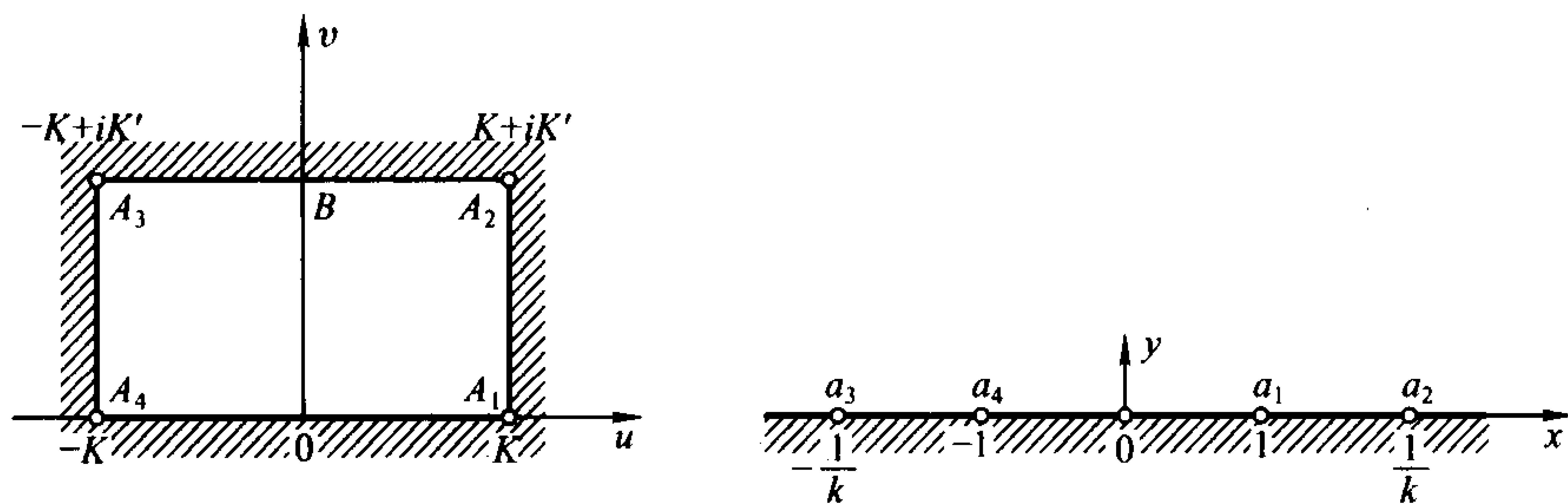


图 83

的形状(由于点 $O \leftrightarrow 0$ 的对应关系,常数 $C_1 = 0$). 要确定常数 C 与 k,可以用点 $A_1 \leftrightarrow 1$ 的对应关系

$$K = C \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{1}$$

与点 $A_2 \leftrightarrow \frac{1}{k}$ 的对应关系

$$K + iK' = C\int_0^1 + C\int_1^{\frac{1}{k}} = K + iC\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

(我们把从 0 到 $\frac{1}{k}$ 的积分分解成两个——从 0 到 1 的与从 1 到 $\frac{1}{k}$ 的,并利用等式(1)). 由此有

$$K' = C\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \tag{2}$$

我们将设常数 k $(0<k<1)$是已经给定的,而矩形的长与宽则选择得使(1)式与(2)式中的常数 C 等于 1.

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \tag{3}$$

于是,把半平面映到我们这个矩形上的那个映射,将可由函数

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{4}$$

来实施. 积分(4)不能表达成初等函数,它是属于所谓的椭圆积分之列的. 使它反演的函数(即,把矩形映射到半平面上去的那个函数),是属于雅可比(Jacobi)椭圆函数行

列中的,它有个专门的记号

$$z = \mathrm{sn}\ w = \mathrm{sn}(w;k), \tag{5}$$

并特别称为**椭圆正弦**.我们将在最后一章中来比较详尽地介绍这种函数(见第 102 目),在那里我们将要讨论关于把任意一个矩形(而不是像在这里那样具有固定的长与宽)映射到半平面上去的问题的解答.

在这里我们只指出函数 $\mathrm{sn}\ z$* 的一个重要性质:$\mathrm{sn}\ z$ 已被判明是一个具有两个周期的亚纯函数,这两个周期的比是个纯虚数.

为了证明这个结论,我们把所说的这个矩形用数字(1)来表示,而把它的边用数字Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ来表示,如同在图 84 中所标出的那样.原先定义在矩形(1)内的那个函数 $w = \mathrm{sn}\ z$,我们可以根据对称原理来加以延拓,例如,可以把它经过边Ⅰ延拓到矩形(2)内.这延拓实施一个把(2)映到下半平面上去的映射.再经过矩形(2)的边Ⅱ′来延拓这个映射,便得到函数 $w = \mathrm{sn}\ z$ 实施一个把矩形(3)重新映到上半平面上来的映射,如此类推(图 84 中画上斜线的那些矩形,是映到上半平面上的,没有画斜线的那些矩形,是映到下半个平面上的).

这样,我们便把函数 $w = \mathrm{sn}\ z$ 延拓到整个 z 平面上.同时,这函数是单值的,因为如果我们在绕行某条闭周线后重新落到了原先的矩形内,例如,又落到矩形(1)内,那时 $\mathrm{sn}\ z$ 的那些新的值就将同原先的那些值一致(它们以原先的那个规则,把(1)映到上半平面上),并且,这函数在这些矩形的内部以及在它们的边界上都是正则的,只有边界上的一个点 iK' 以及所有在延拓中对应于它的那些点要除外(在图 84 中这些点用叉形标出),函数 $\mathrm{sn}\ z$ 在这些点处有极点,因为,在共形映射下,这些点被变换成点 $w = \infty$.因此,$\mathrm{sn}\ z$ 是一个亚纯函数.

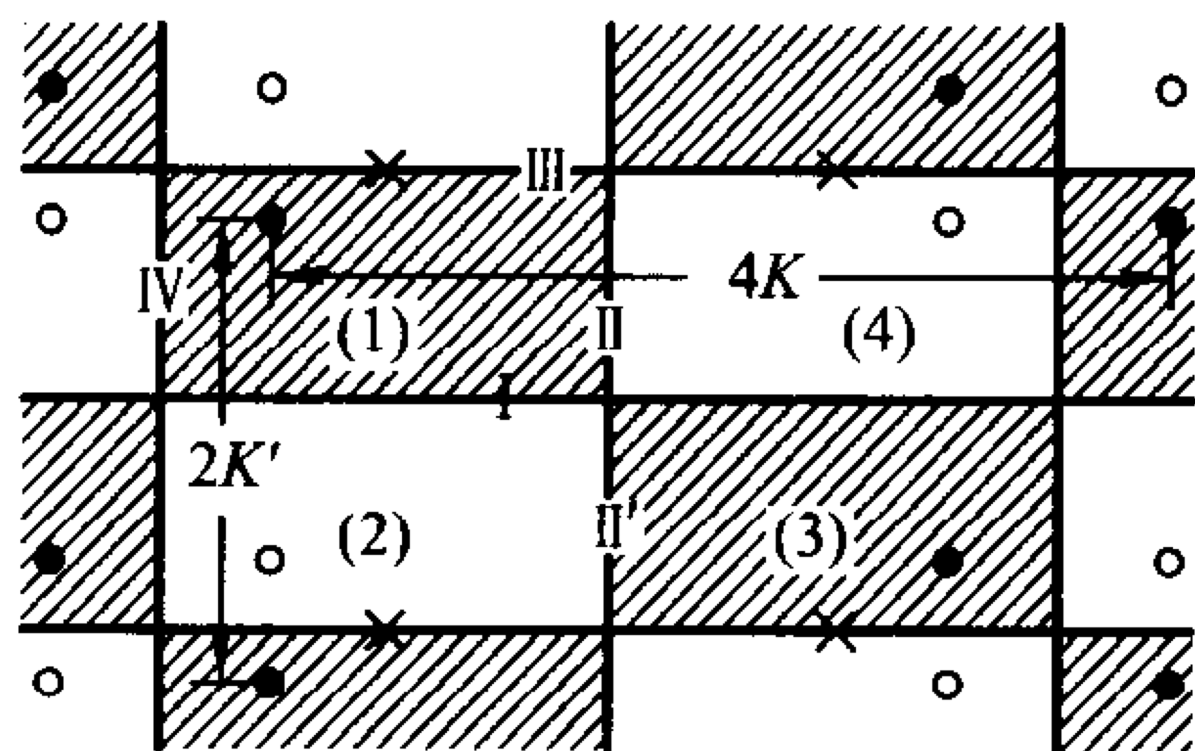


图 84

其次,我们在图 84 中用黑圆点标出矩形(1)中的任意一个点 z,以及所有由这个点用偶数次延拓所得出的那些点**.这些点具有下列形式

$$z + 4nK + 2n'K'i,$$

其中 $n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 在所有这些点处函数 sn 都取同样的值:

$$\mathrm{sn}(z + 4nK + 2n'K'i) = \mathrm{sn}\ z. \tag{6}$$

这性质就表明了 $\mathrm{sn}\ z$ 有两个周期:$\tau = 4K$ 与 $\tau' = 2K'i$.

从对于 $\mathrm{sn}\ z$ 的延拓的讨论中,还可以得出:这函数是个奇函数

$$\mathrm{sn}(-z) = -\mathrm{sn}\ z. \tag{7}$$

(2) 具有水平割痕的带形(图 85)　这区域乃是一个四角形,它的三个顶点 A_1, A_2 与 A_3 都在

* 我们改换了变量的记号.

** 我们用白的小圆圈来标出我们这个函数在其上取值 $\overline{\mathrm{sn}\ z}$ 的那些点.

无穷远,并且角 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. 我们令 $a_4=0, a_1=1$ 及 $a_2=\infty$,并且取 $z_0=0$(于是由点 a_4 与 A_4 的对应关系,立刻可以得出 $C_1=0$). 因此点 A_3 是与负向半轴上的某一个点 $a_3=-a$ 相对应的. 这时施瓦茨-克里斯托弗积分便呈下列形式

$$w=C\int_0^z \frac{zdz}{(z-1)(z+a)}=C'\left\{\ln(1-z)+a\ln\left(1+\frac{z}{a}\right)\right\} \tag{8}$$

(对应于点 A_2 的那个因子消失,参看上一目的(1)中所说的). 要确定常数 C' 与 a,我们使用下述的想法:当点 z 沿着一个半径 r 足够小的半圆周 C_r 绕行点 $a_1=1$ 时(即,当向量 $1-z=re^{i\varphi}$ 旋转 $180°$,它的辐角从 0 变到 $-\pi$ 时),其对应点 w 就应当从射线 A_4A_1 上过渡到 A_1A_2 上,并且 w 的增量应当与 $-ih_1$ 相差很小:

$$\Delta w=-ih_1+O(r),$$

其中 $O(r)$ 是当 $r\to 0$ 时的无穷小. 这个想法被证明是由于当 r 很小时,半圆周 C_r 的像,同连接射线 A_4A_1 与 A_1A_2 并且垂直于它们的那直线段,相差很小.

另一方面,当增量 Δz 很小时,(8)式中的大括号内第二项的增量也必定很小,因为这个项在点 $z=1$ 处是连续的. 而其第一项

$$\ln(1-z)=\ln r+i\varphi$$

的增量则等于 $-i\pi$,因此,

$$\Delta w=-C'i\pi+O(r).$$

把所得的 Δw 的两个表达式相比较,并当 $r\to 0$ 时取极限,便得出:

$$C'=\frac{h_1}{\pi}.$$

类似地,当点 z 沿着圆周 $z+a=re^{i\varphi}$(φ 从 π 变到 0)绕过点 $a_3=-a$ 时,增量

$$\Delta w=-C'ai\pi+O(r)$$

应当与 $-ih_2$ 相差很小,由此便得出

$$a=\frac{h_2}{h_1}.$$

结果我们得到,实施把半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到那个具有割痕的带形上(图 85)的共形映射,具有形状

$$w=\frac{h_1}{\pi}\ln(1-z)+\frac{h_2}{\pi}\ln\left(1+\frac{h_1}{h_2}z\right). \tag{9}$$

我们再实施一个补充的映射

$$\omega=e^{\frac{\pi}{H}(w+h_1 i)},$$

其中 $H=h_1+h_2$,这映射把我们那个具有割痕的带形,映到去掉了一段长度为 1 的倾斜线段的上

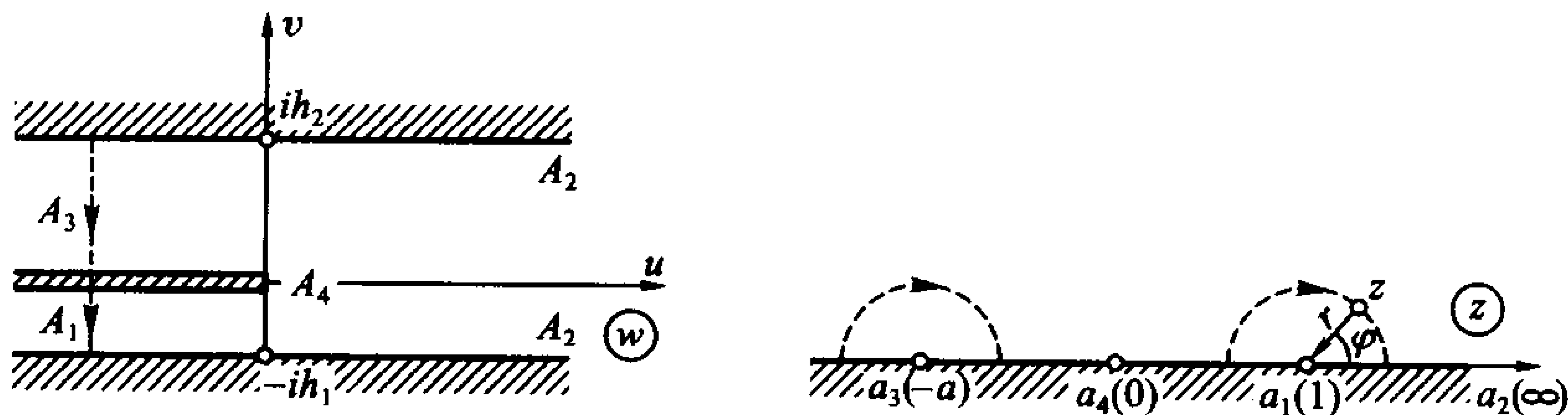


图 85

半平面 Im $\omega>0$ (图 86)上,然后应用公式(9),便得出一个把半平面 Im $z>0$ 映到这个区域上去的映射

$$\frac{H}{\pi}\ln w-h_1 i=\frac{h_1}{\pi}\ln(1-z)+\frac{h_2}{\pi}\ln\left(1+\frac{h_1}{h_2}z\right)$$

(我们已经在式中把 ω 重又记作 w).再作一些简单的变换之后,我们便得出

$$w=(z-1)^{\frac{h_1}{H}}\left(1+\frac{h_1}{h_2}z\right)^{\frac{h_2}{H}}.$$

所去掉的那段线段与正轴形成一个角度 $\pi\frac{h_1}{H}$,这个角度我们记作 $\alpha\pi$ (图 86).引进参数 α,结果我们得出一个映射,它把上半平面 Im $z>0$ 映到去掉了线段$(0,e^{i\alpha\pi})$的上半平面 Im $w>0$ 上去,这个映射就是

$$w=(z-1)^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}z\right)^{1-\alpha}. \tag{10}$$

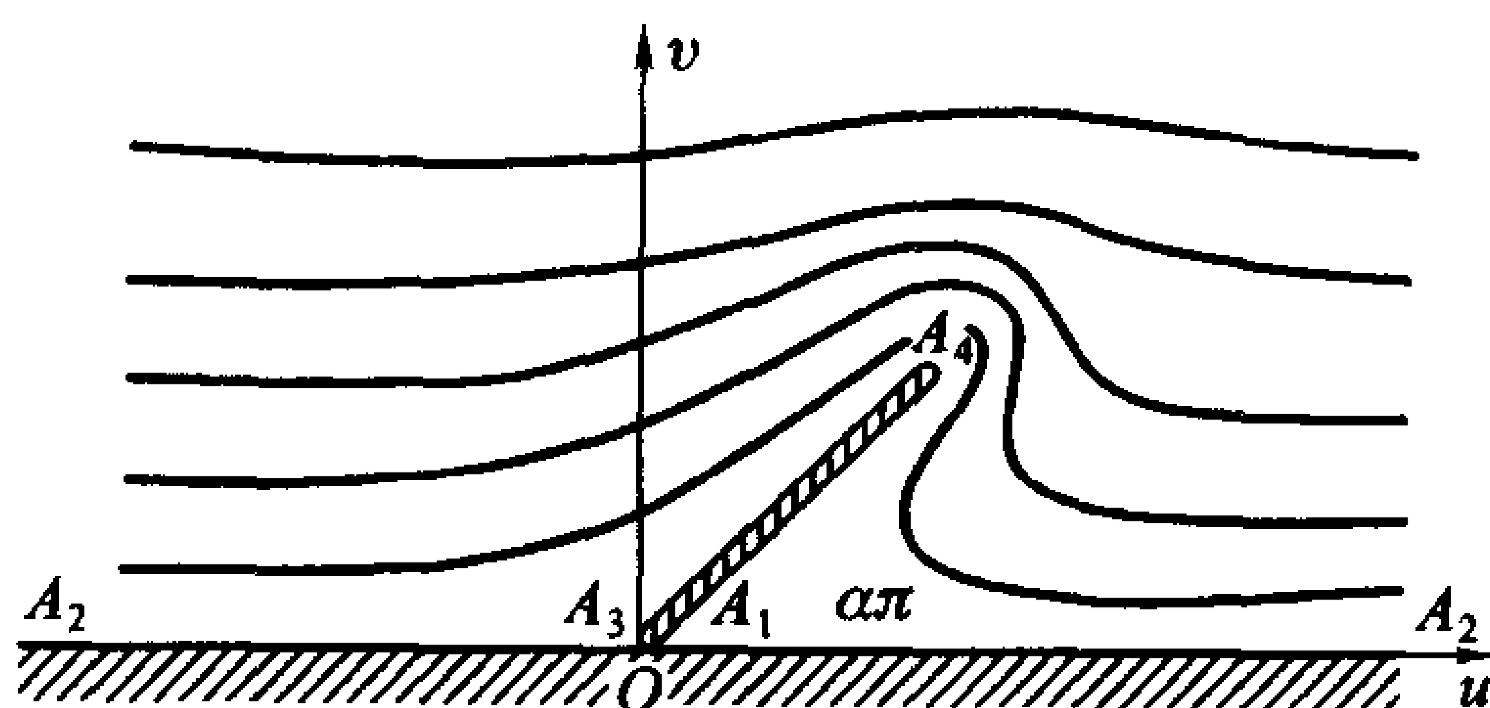


图 86

在图 86 中表示在这映射下对应于直线 Im $z=$ const 的线.

当 $\alpha=\frac{1}{2}$时,我们得出一个已经讨论过的结果(见第 33 目中的例 2).

(3) 在图 87 中的多角形乃是一个有两个顶点在无穷远的四角形 由于可以应用对称原理,我们限于讨论多角形的上一半——三角形 $A_1A_2A_3$,其三个顶角是 $\alpha_1=0,\alpha_2=-\alpha,\alpha_3=1+\alpha(\sum\alpha_k=1)$.我们规定,$x$ 轴上对应于这三个顶点的点是:$a_1=0,a_2=\infty,a_3=-1$.考虑到点 a_3与 A_3相对应,我们有

$$w=C\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}dz+ih.$$

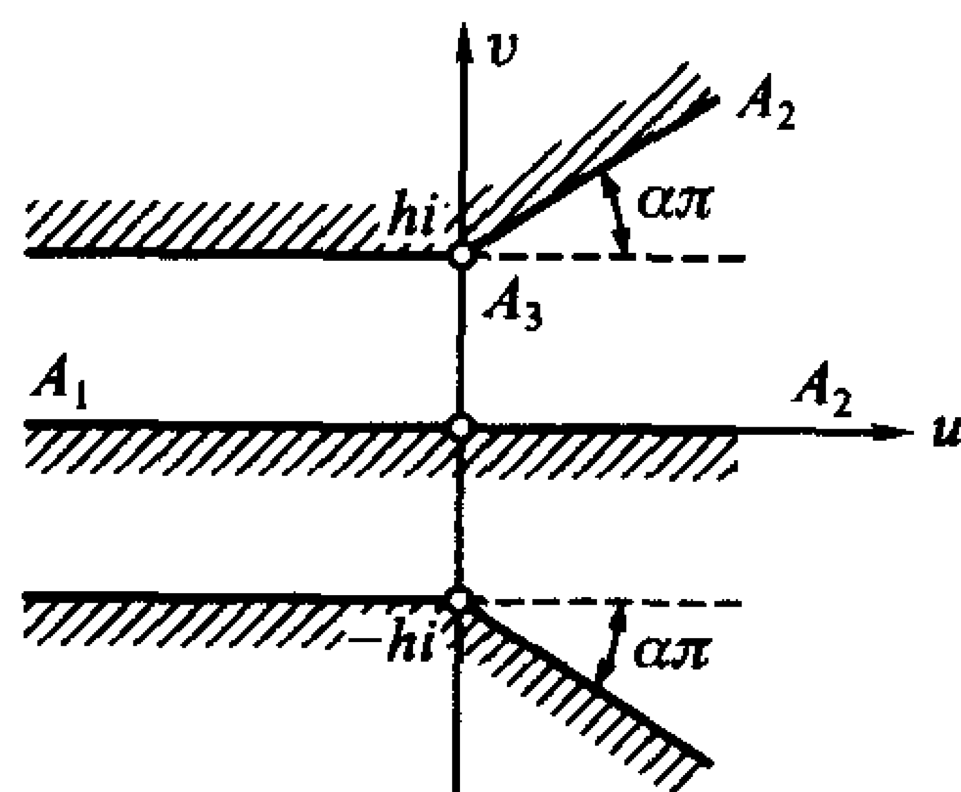


图 87

要确定常数 C,我们利用下述事实:当点 z 绕行半个圆周 c_r: $z=re^{i\varphi}$(φ 从 π 变到 0)时,由上式这个积分所规定的那函数获得一个增量

$$\Delta w=C\int_{c_r}\frac{dz}{z}+O(r)=-C\pi i+O(r)$$

(函数$(z+1)^{\alpha}$在圆周c_r上与 1 相差很小;$(z+1)^{\alpha}=1+O(r)$).

另一方面,在这种绕行时,对应点 w 从射线A_1A_3转到射线 A_1A_2,因此增量 Δw 与 $-hi$ 相差很小.由此,$C=\frac{h}{\pi}$,于是,把上半平面共形地映射到图 87 中那多角形的上半个上去的函数,具有形状

$$w=\frac{h}{\pi}\int_{1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}dz+ih. \tag{11}$$

在这式中把 z 换成 e^{z}，我们便得出一个映射，它把带形 $0<y<\pi$ 映到这多角形的上半个上去，这映射是

$$w=\frac{h}{\pi}\left\{\int_{i\pi}^{z}(e^{z}+1)^{\alpha}dz+i\pi\right\}. \tag{12}$$

因为按照对应点的选择，这带形的下沿是与多角形的中线相对应的，所以，根据对称原理，这个函数(12)实施一个把带形 $-\pi<y<\pi$ 映到整个这多角形上去的共形映射.

当 α 是个有理数时，积分(12)可以用初等函数来表达(这个积分可以化成对二项式的微分的积分). 当 $\alpha=1$ 时，我们得到一个已经知道的映射(见第 30 目中的例 5)：

$$w=\frac{h}{\pi}(e^{z}+z+1). \tag{13}$$

当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，我们得到

$$w=\frac{2h}{\pi}\left\{\sqrt{e^{z}+1}+\ln(\sqrt{e^{z}+1}-1)-\frac{z}{2}\right\}. \tag{14}$$

(4) 把带形 $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ 映到去掉两条射线的平面的共形映射(图 88，$0<\alpha<1$)　再次应用对称原理——平面 w 内的区域的上面一半是一个带有两个顶点在无穷远处和三个角 $\alpha_1=\alpha-1$，$\alpha_2=-\alpha$，$\alpha_3=2$ 的三角形. 为了使用施瓦茨－克里斯托弗公式，把带形 $0<y<\pi$ 映射到半平面：$\zeta=e^{z}$. 顾及到在图 88 上所指出的点的对应关系，我们采取 $a_1=0$，$a_2=-\infty$，此时点 a_3 落在负半

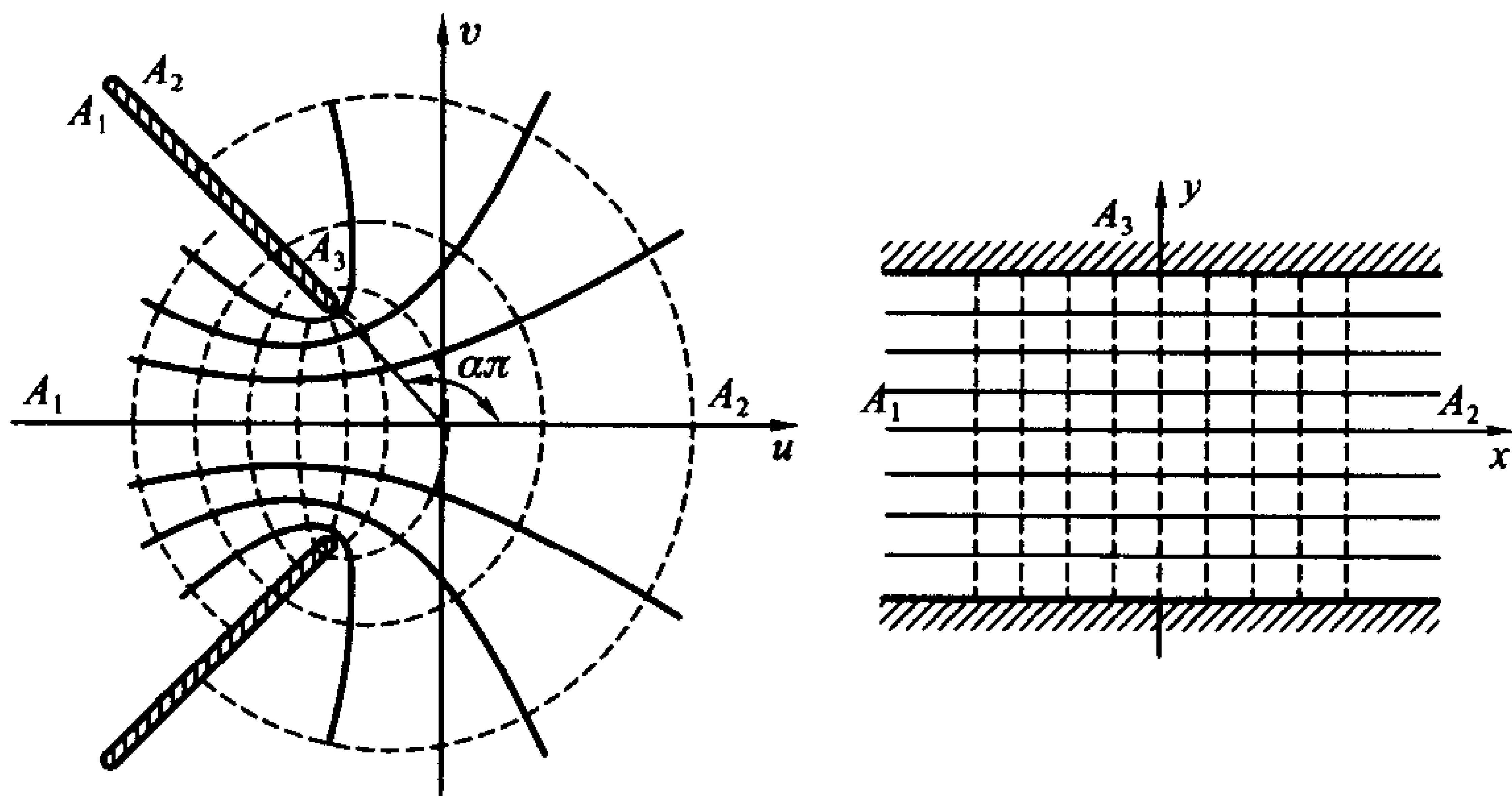


图 88

轴上，并且我们令 $a_3=-a$，其中 a 是一个暂时还未定的正数. 施瓦茨－克里斯托弗公式取形状

$$w=C\int\zeta^{\alpha-2}(\zeta+a)d\zeta+C_1=C\left(\frac{\zeta^{\alpha}}{\alpha}+\frac{a}{\alpha-1}\zeta^{\alpha-1}\right)+C_1, \tag{15}$$

其中 C 为正常数，因为射线 A_1A_2 在映射时不转动，从而 $\arg C=0$ (看 37 目末的注)，C_1 为实数，因为把 ζ 的正值代入(15)应该导出实的 w (见图 88). 为了公式(15)取更简单的形状，我们令 $\frac{1}{\alpha}=-\frac{a}{\alpha-1}$，亦即 $a=\frac{1-\alpha}{\alpha}$，我们将有

$$w=\frac{C}{\alpha}(\zeta^{\alpha}-\zeta^{\alpha-1})+C_1. \tag{16}$$

点 $\zeta=-a$ 和 $w=le^{i\alpha\pi}$ 的对应关系给出

$$\frac{C}{\alpha}(e^{i\alpha\pi}a^{\alpha}+e^{i\alpha\pi}a^{\alpha-1})+C_1=le^{i\alpha\pi},$$

由此,顾及到常数 C 和 C_1 是实数,我们得出值 $C_1=0$ 和 $C=\frac{\alpha l}{a^{\alpha-1}(a+1)}=l\alpha^{1+\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}$. 把 $\zeta=e^{z}$ 代入(16)式,我们求出要找的映射

$$w=l\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}(e^{\alpha z}-e^{(\alpha-1)z}). \tag{17}$$

在图 88 中也表示出在这个映射下线的对应关系.

(5) 在图 89 中的那个多角形 $\left(0\leqslant\alpha<\frac{3}{2}\right)$ 乃是一个有两个顶点在∞处的四角形,它的四个顶角是 $\alpha_1=\alpha-2,\alpha_2=2,\alpha_3=-\alpha,\alpha_4=2$ 我们令 $a_1=0,a_2=1,a_3=\infty$,于是 a_4 便落在负向半轴上,设 $a_4=-b$. 这时施瓦茨-克里斯托弗积分的形状是

$$\begin{aligned}w&=C\int_1^z z^{\alpha-3}(z-1)(z+b)dz\\&=C\left[\frac{1}{\alpha}z^{\alpha}+\frac{b-1}{\alpha-1}z^{\alpha-1}-\frac{b}{\alpha-2}z^{\alpha-2}+\frac{\alpha(1+b)-2}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

$(\alpha\neq0,\alpha\neq1)$. 要确定常数 C 与 b,我们可以利用下述两事实:1) 射线 A_2A_3 是被变换成正向半轴 $(0,\infty)$ 的,所以 $\arg C=0$,即,C 是一个正的常数;2) 点 $z=-b$ 与 $w=ai$ 相对应. 在公式(18)中,代入 $z=be^{i\pi}$,$w=ai$ 后,把实数部分与虚数部分分开,我们便得到两个方程:

$$b^{\alpha-1}\cos\pi\alpha=\frac{2-\alpha(1+b)}{2b-\alpha(1+b)},\quad C=\frac{ab^{1-\alpha}}{\sin\pi\alpha}\cdot\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2b-\alpha(1+b)}, \tag{19}$$

这两个方程使我们可以(即使是近似地)求出那么知的两个常数.

特别,当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,我们得出 $b=3,C=\frac{3\sqrt{3}}{32}a$,于是作出映射的那个函数便呈下列形式

$$w=\frac{3a}{16}\sqrt{3z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^2. \tag{20}$$

当 $\alpha=1$ 时,我们得到的不是表达式(18),而是

$$w=C\left\{z+\frac{b}{z}+(b-1)\ln z-1-b\right\}. \tag{21}$$

为了要确定常数 C 与 b,我们有方程

$$\ln b=2\cdot\frac{b+1}{b-1},\quad C=\frac{a}{\pi(b-1)}. \tag{22}$$

(6) 图 90 中的那个多角形乃是一个五角形 我们来考察它的右面一半——四角形 $A_1A_2A_3A_4$,它的四个顶角是 $\alpha_1=\frac{1}{2},\alpha_2=\alpha_4=0,\alpha_3=\frac{3}{2}$ $(\sum\alpha_k=2)$. 如果取 $a_1=0,a_2=1,a_3=a^2,a_4=\infty$,则函数

$$w=C\int_0^{\zeta}\sqrt{\frac{\zeta-a^2}{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta-1}$$

便实施一个共形映射,它把上半 ζ 平面映到这个四角形上去. 为了计算常数 a 与 C,我们分别考虑,当点 z 沿着以点 $\zeta=1$ 为圆心半径为无穷大的半圆周 C_R 绕行,以及当点 $\zeta=1$ 为圆心半径为无穷小的半圆周 c_r 绕行时 w 所得的增量,对应第一个绕行,射线 A_1A_4 转变到射线 A_3A_4,因此,

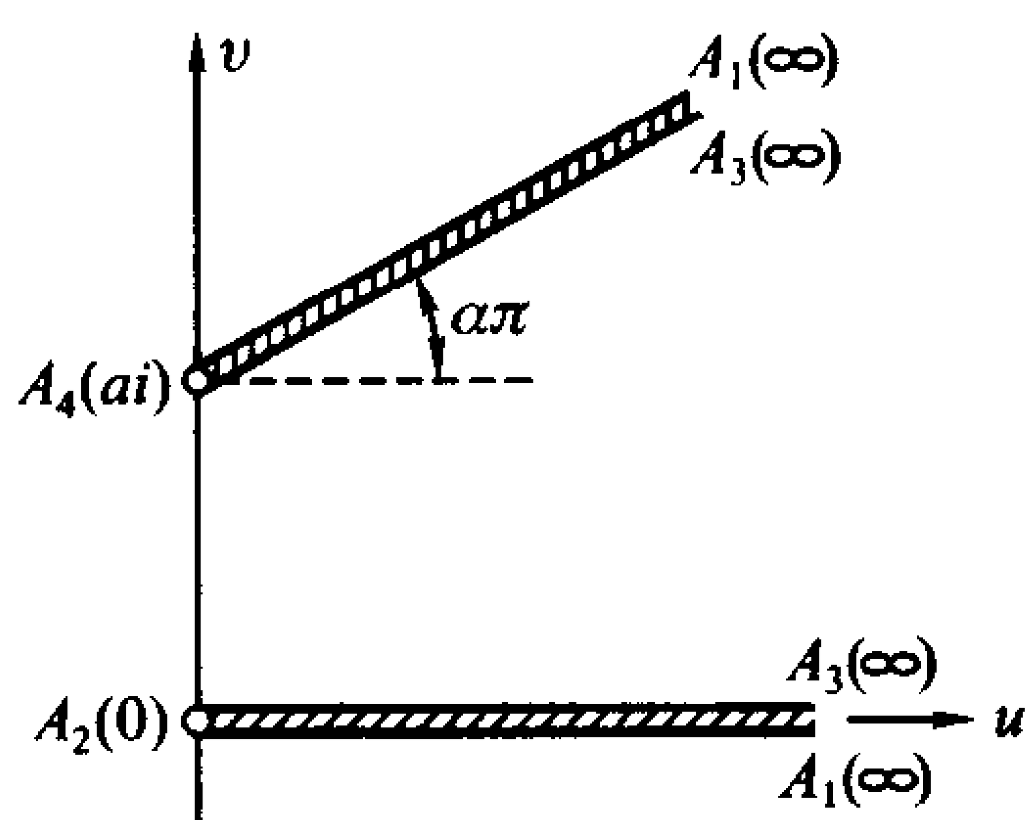


图 89

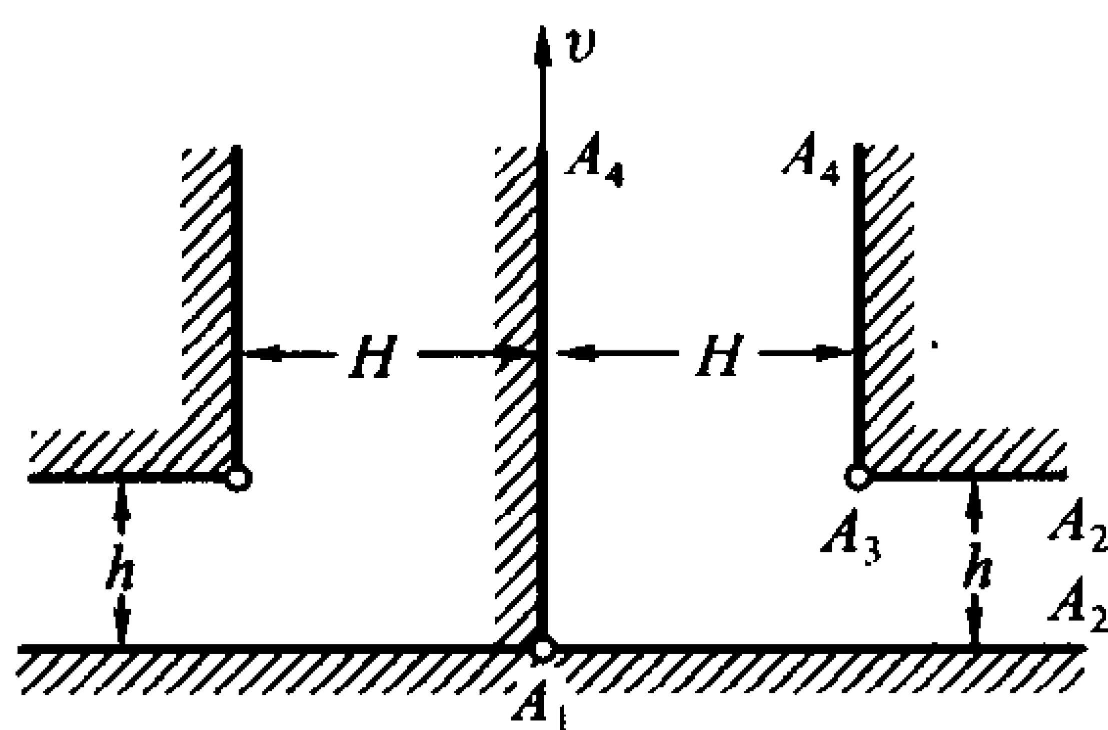


图 90

$\Delta w = H + O(1/R)$. 另一方面,在$|\zeta|$很大时积分号下的根式接近于 1,从而

$$\Delta w = C\Delta\int_0^{\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-1}+O\left(\frac{1}{R}\right)=-i\pi C+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

比较这两个表达式,我们求出 $C = Hi/\pi$. 第二个绕行所对应的是射线 A_1A_2 转变到射线 A_3A_2,因此,$\Delta w = ih + O(r)$,而施瓦茨 - 克里斯托弗积分给出 $\Delta w = C\sqrt{1-a^2}(-i\pi)+O(r)$,比较这两个表达式就导出等式 $a^2 = (H^2+h^2)/H^2$.

作一个代换$\frac{\zeta-a^2}{\zeta}=\frac{1}{\omega^2}$,可以把我们所考虑的积分化成

$$w = 2C\int_0^{\omega}\left\{\frac{a^2-1}{1+(a^2-1)\omega^2}+\frac{1}{1-\omega^2}\right\}d\omega,$$

作了这样的代换之后,积分便容易计算了. 把所求得的 a 与 C 的值代入,并实施积分,我们得出

$$w=\frac{2i}{\pi}\left(h\arctan\frac{h}{H}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-a^2}}+H\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-a^2}}\right).$$

这时对应于 w 平面中那条沿虚轴的辅助割痕的,是 ζ 平面中沿着负向半轴的那条割痕,因此,根据对称原理,我们所得出的这函数,便把去掉了正向半轴的 ζ 平面共形地映射到所给的整个五角形上去.

令 $\zeta = z^2$,结果我们得出了一个共形映射,它把上半个 z 平面映射到所给的整个五角形上去

$$w=\frac{2i}{\pi}\left(h\arctan\frac{hz}{H\sqrt{z^2-a^2}}+H\operatorname{arth}\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\right). \tag{23}$$

(7) 在图 91 中的那个多角形的顶角是 $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=0, \alpha_2=\alpha_4=\frac{3}{2}$ 设对应于这五个顶点的那些点是 $a_1=-a, a_2=-1, a_3=-b, a_4=0, a_5=\infty$. 于是,把上半平面映到这多角形上去的那个函数,便有下列形状:

$$w = C\int_0^z\frac{\sqrt{z(z+1)}}{(z+a)(z+b)}dz. \tag{24}$$

沿着圆心在坐标原点的无穷大半圆周求积分,我们便得出 $C(-i\pi)=-ih_3$,从而有 $C=\frac{h_3}{\pi}$. 沿着圆心在点 $z=-a$ 处的无穷小半圆周以及圆心在点 $z=-b$ 处的无穷小半圆周来求积分,我们分别

得出*

$$-C\cdot\frac{\sqrt{a(a-1)}}{-a+b}(-i\pi)=-h_1 i$$

及
$$C\cdot\frac{i\sqrt{b(1-b)}}{a-b}(-i\pi)=h_2,$$

由此
$$\frac{\sqrt{a(a-1)}}{a-b}=\frac{h_1}{h_3},\quad \frac{\sqrt{b(1-b)}}{a-b}=\frac{h_2}{h_3}.$$

由最后这两个方程,便可以求出常数 a 与 b. 积分(24)可以表成初等函数.

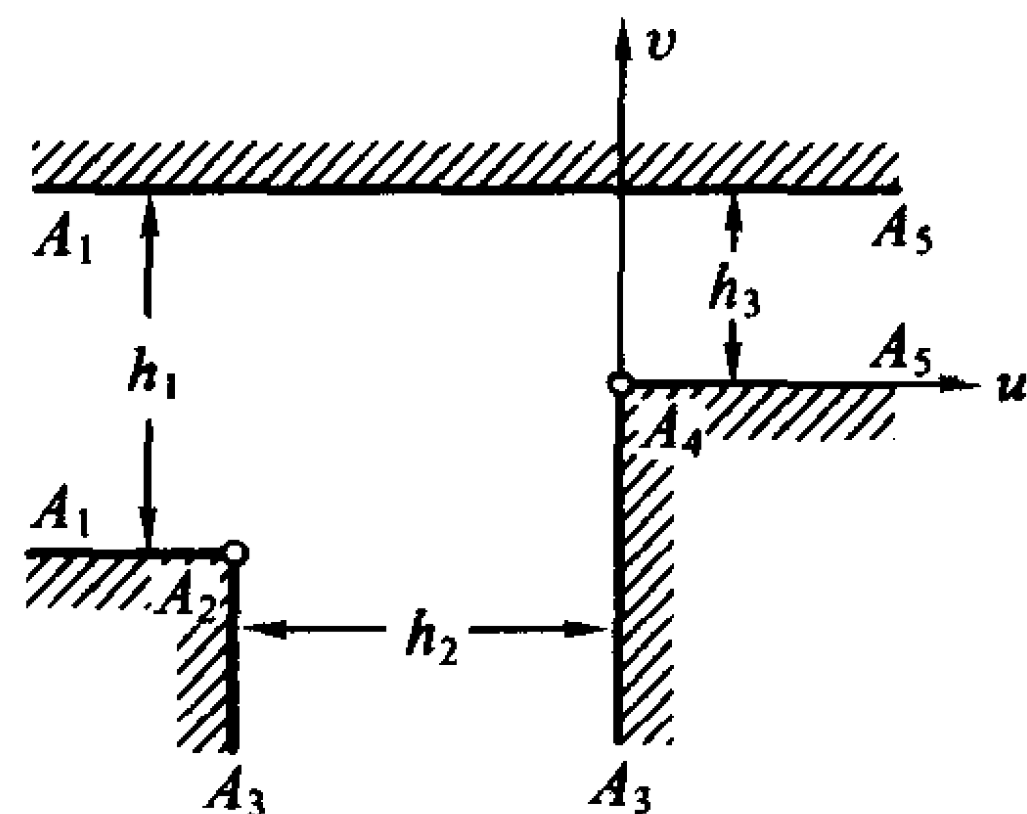


图 91

(8) 在结束时我们举一个把圆 $|z|<1$ 映射到多角形——五角星内部的例子,画出在图 92 上. 这区域是一个十角形,它的五个角 $\alpha=\frac{7}{5}$ 和五个角 $\beta=\frac{1}{5}$. 利用 38 目中的公式(6),为了求出对应于星的顶点的圆周上的点,我们考察它的十分之一部分——三角形 A_1B_1O (图 92). 这三角形可映射到扇形 $0<\arg z<\pi/5$, $|z|<1$,这样,使得点 A_1 变到 1,而 B_1 变到 $e^{i\pi/5}$. 按照对称原理,映射延拓到整个星形,并且点 A_k 转变到 $a_k=e^{i\frac{2\pi}{5}(k-1)}$(1 的 5 次幂根),而 B_k 转变到 $b_k=e^{\frac{i\pi}{5}(2k-1)}$($-1$ 的 5 次幂根),$k=1,2,3,4,5$. 根据映射的唯一性,可以按照 38 目中公式(6)找到这个映射,因而这公式采用形状

$$w=C\int_0^z\frac{\prod(z-a_k)^{2/5}}{\prod(z-b_k)^{4/5}}dz=C\int_0^z\frac{(1-z^5)^{2/5}}{(1+z^5)^{4/5}}dz \tag{25}$$

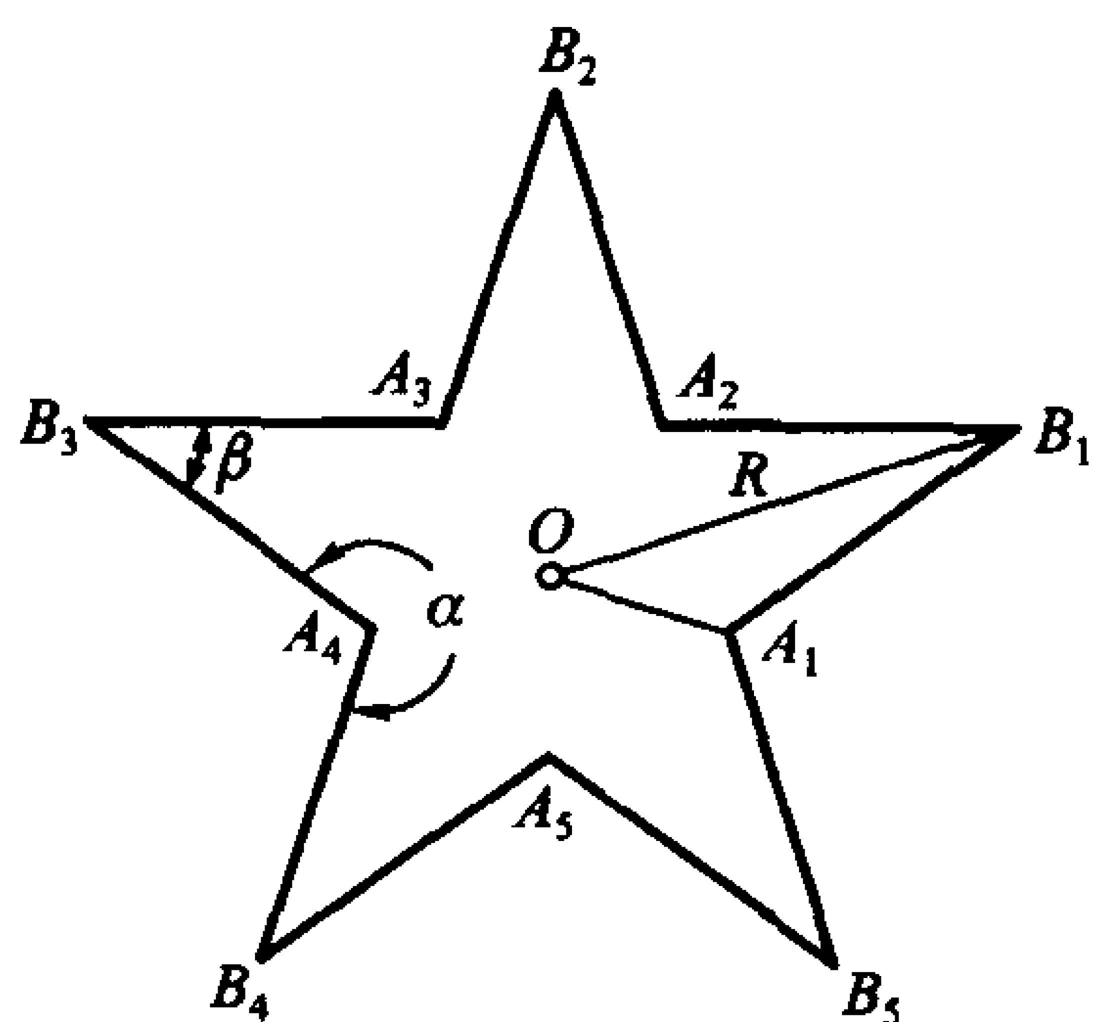


图 92

(我们利用明显的恒等式 $\prod(z-a_k)=z^5-1$, $\prod(z-b_k)=z^5+1$; $\prod$ 为乘积符号).

我们把常量 C 取成实的. 它由星的尺寸 $OB_k=R$ 决定:因为点 $z=-1$ 转变为星的顶点,而 $z=0$ 转变为中心,所以

$$R=C\int_{-1}^0\frac{(1-x^5)^{2/5}}{(1+x^5)^{4/5}}dx$$

在置换 $t=\left(\frac{1+x^5}{1-x^5}\right)^2$ 后,这积分转变为通过欧拉 Γ 函数表示的积分

$$\frac{1}{5\cdot 2^{2/5}}\int_0^1 t^{-9/10}(1-t)^{-4/5}dt=\frac{1}{5\cdot 2^{2/5}}\frac{\Gamma(1/10)\Gamma(1/5)}{\Gamma(3/10)}$$

(见第 90 目). 由此推得,

$$C=\frac{5\sqrt[5]{4}\,\Gamma(3/10)}{\Gamma(1/5)\Gamma(1/10)}R. \tag{26}$$

40. 角的圆化 在许多实用的问题中,需要考虑到,所讨论的那些多角形的顶

* 不难检查,这里应当取根的负值.

角，在实际上总是圆化了的.在本目中我们将给出一些计算这种圆化的影响的近似方法.

(1) 小于 π 的角的圆化 我们先来求得实施下述映射的那个函数：这映射把上半 z 平面映到去掉了一小块面积的上半 ζ 平面上，这一小块面积是：线段 $(-1,1)$ 以及立在这线段上而在其两个端点处与实轴相切的一段曲线弧围起来的*（图 93）.为了要求得这个函数，我们考虑映射 $z_1=\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}$，它把上半个 ζ 平面映到去掉了半个单位圆的上半个 z_1 平面上.取来作为上面所说那段曲线的，是 z_1 平面中一个半椭圆在 ζ 平面中的逆像，这个半椭圆接近一个半圆周，并以 1 与 $1+h$ 为其半轴.于是，剩下来就是要求得一个把去掉了那半个椭圆的上半 z_1 平面映到上半 z 平面上去的映射.最后这个问题可以用初等的方式来解决.我们先使用相似变换 $z_2=\dfrac{z_1}{c}$，其中 $c=\sqrt{(1+h)^2-1}=\sqrt{h(2+h)}$，把这椭圆的焦点变换成点 $\pm i$，然后应用变换 $z_2=\dfrac{1}{2}\left(z_3-\dfrac{1}{z_3}\right)$，于是代替那个椭圆，在 z_3 平面中便得到一个圆，其半径为 $r=\dfrac{1+\sqrt{1+c^2}}{c}=\sqrt{\dfrac{2+h}{h}}$.最后，再使用变换 $z=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_3}{r}+\dfrac{r}{z_3}\right)$ 便得到了上半 z 平面.我们有

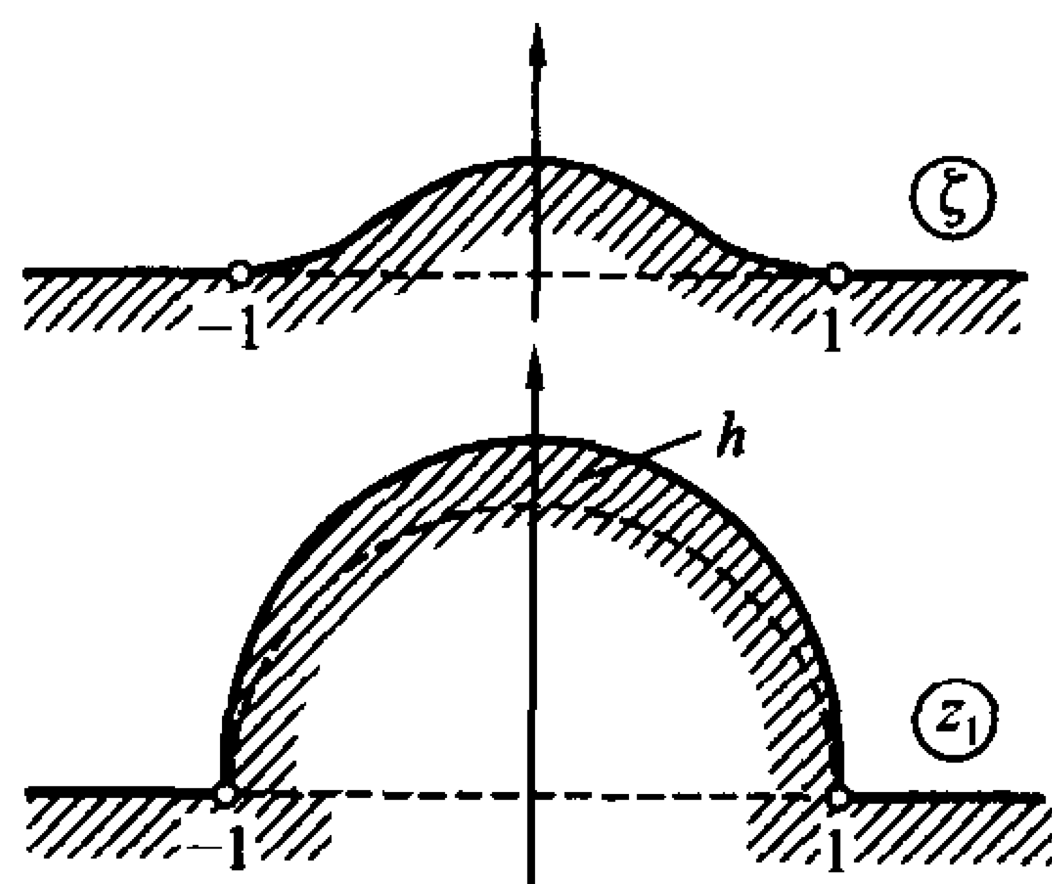


图 93

$$z_3=r(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$z_1=\frac{c}{2}\left[\left(r-\frac{1}{r}\right)z+\left(r+\frac{1}{r}\right)\sqrt{z^2-1}\right],$$

或者，把 r 与 c 的表达式代入，得到

$$z_1=z+(1+h)\sqrt{z^2-1}.$$

最后，我们省略去阶数较 h 高的无穷小，结果便得出：

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)\approx z-h\{\sqrt{(z^2-1)^3}-z(z^2-1)\}. \tag{1}$$

再利用两个补充的线性变换 $\tilde{\zeta}=a\zeta+b,\tilde{z}=az+b$，我们可以得到一个更一般的结

* 第 34 目的例(2)中的函数不能适用，因为在那里曲线弧是不与坐标轴相切的.

果:函数*

$$\zeta \approx z - \frac{h}{a^2}\{\sqrt{(z-b_1)^3(z-b_2)^3} - (z-b_1)(z-b_2)(z-b)\} = g_b(z), \qquad (2)$$

其中 $b_1 = b - a$, $b_2 = b + a$,这函数把上半个平面 $\operatorname{Im} z > 0$ 映射到去掉了一小块面积的上半个平面 $\operatorname{Im} \zeta > 0$ 上去,这块所去掉的面积,是由线段$(b-a, b+a)$,与立在这线段上并且在其两个端点处与这线段相切的一段曲线弧所围成的.与曲线的最大纵坐标成比例的那个值 h,假设是一个关于 a 的高阶无穷小(图 94).

现在设函数 $w = f(\zeta)$实施一个把上半平面 $\operatorname{Im} \zeta > 0$ 映到某一个多角形 Δ 上去的共形映射,并且点 b 对应于这多角形的一个小于π 的角的顶点 B. 利用函数(2)作出一个补充的映射 $\zeta = g_b(z)$,我们便得到了一个共形映射

$$w = f[g_b(z)], \qquad (3)$$

它把上半 z 平面映射到区域$\tilde{\Delta}$ 上去,区域 $\tilde{\Delta}$ 是由 Δ 中在顶点B 的一个足够小的邻域内、把角 B 圆化后得到的(图 94).重复应用这个方法,便可以把 Δ 中所有的那些小于π 的顶角,都施行圆化.

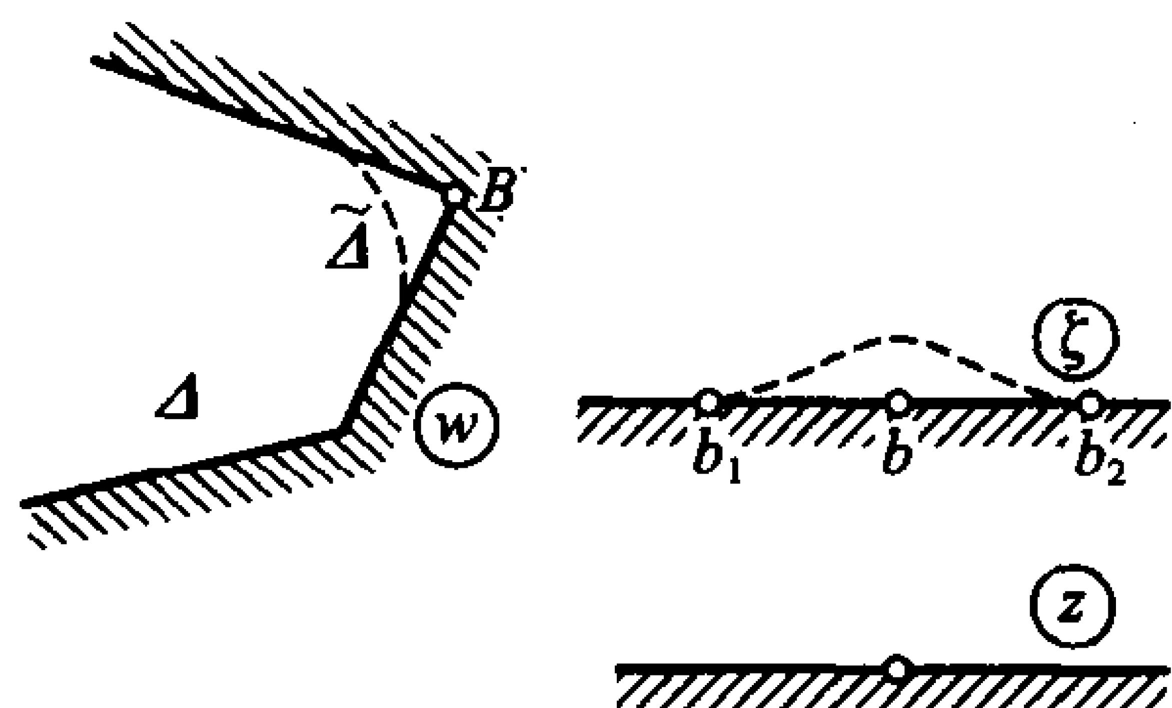


图 94

(2) 大于 π 的角的圆化 不失一般性可以认为:在多角形 Δ 中,我们所要圆化的那个角在顶点 A_1处,而 A_1位于点 $w=0$ 上,边 A_1A_2是沿着正向半轴走的,并且,$a_1 = 0$,Δ 的其余那些顶点的逆像 $-a_2, -a_3, \cdots, -a_n$都是负的(这总可以通过对平面作一些补充的分式线性映射达到).在这些假定之下,我们可以利用施瓦茨-克里斯托弗积分,可以把上半个 z 平面共形映射到多角形Δ 上去的函数写成下列的形状

$$w = C\int_0^z z^{\alpha_1 - 1}\varphi(z)dz, \qquad (4)$$

其中 $\varphi(z) = (z+a_2)^{\alpha_2 - 1}\cdots(z+a_n)^{\alpha_n - 1}$,而 C 是一个正的常数(根据我们对于线段 A_1A_2的选取,可以使 $\arg C = 0$).

为了要使在顶点 A_1处的那个角圆化,我们不考虑函数(4),而考虑函数

$$w = f(z) = C\int_0^z \{z^{\alpha_1 - 1} + \gamma(z+\beta)^{\alpha_1 - 1}\}\varphi(z)dz, \qquad (5)$$

其中 β 与 γ 是两个待定的常数.我们设 β 是个很小的正数(对于每一个 n,都有 $\beta < a_n$).依照第 38 目中的第 5 部分,函数

$$w = f_2(z) = C\gamma\int_0^z (z+\beta)^{\alpha_1 - 1}\varphi(z)dz$$

---

* 我们已把 $\tilde{z}$ 与$\tilde{\zeta}$ 重又写作z 与ζ.

实施一个映射，这映射把半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映到一个其边与 Δ 的边相平行的多角形上，并且点 $z=-\beta$ 对应于一个位于 u 的负半轴上的顶点 B''（在这个顶点处的顶角等于 $\alpha_1\pi$），而其余的那些顶点 $A_2'',\cdots,A_n''$ 与点 $-a_2\cdots,-a_n$ 相对应（这个多角形在图 95 中用虚线来表示）.

我们再考虑函数

$$w=f_1(z)=C\int_0^z z^{\alpha_1-1}\varphi(z)dz,$$

这函数把半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到一个具有顶点 $A_1,A_2',\cdots,A_n'$ 的多角形（在图 95 中我们用细线来表示）上去. 对于每一个固定的 z 来说，把向量 $f_1(z)$ 与向量 $f_2(z)$ 相加，就可得到由(5)式所定出的那个向量 w. 只要把它们实际相加起来，我们便可以确认：当点 z 画出整条实轴时，点 w 便画出一条闭路线 $A_1A_2\cdots A_nBA_1$，这路线的全部，除掉了 BA_1 那一段外，是由平行于所给多角形的对应边的一些直线段所构成的（在图 95 中的粗线）.

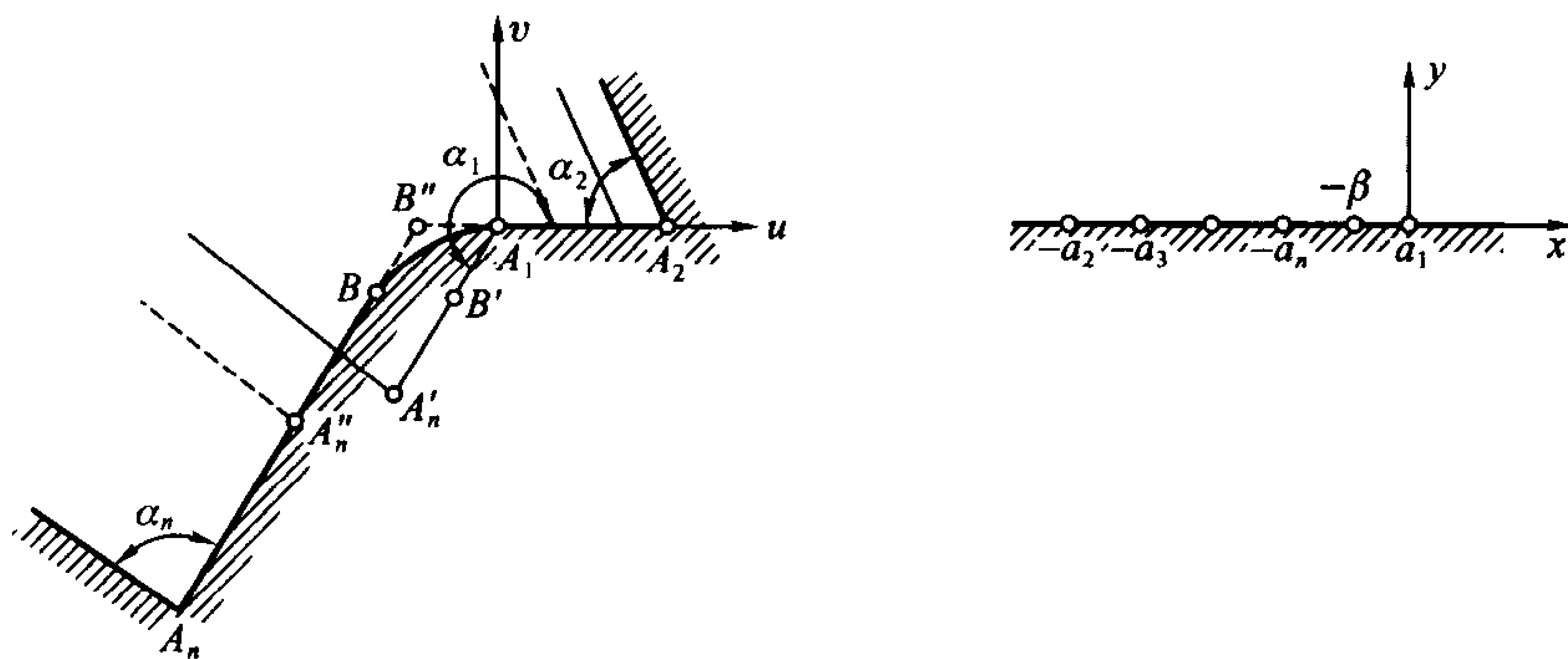


图 95

为了要得出 BA_1 这一段的参数方程，我们引进一个正的参数 $t=-z$ $(0<t<\beta)$. 这时由(5)式得出

$$\frac{dw}{dt}=\frac{du}{dt}+i\frac{dv}{dt}=C\{e^{i\alpha_1\pi}t^{\alpha_1-1}-\gamma(\beta-t)^{\alpha_1-1}\}\varphi(-t),$$

从这里我们便有 BA_1 的切线对于 u 轴的斜率

$$\tan\theta=\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}}=\frac{\sin\alpha_1\pi\cdot t^{\alpha_1-1}}{\cos\alpha_1\pi\cdot t^{\alpha_1-1}-\gamma(\beta-t)^{\alpha_1-1}}=\frac{\sin\alpha_1\pi}{\cos\alpha_1\pi-\gamma\left(\frac{\beta}{t}-1\right)^{\alpha_1-1}}.$$

由这个表达式中可以看出：在大于 π 的角的情形（即，当 $1<\alpha_1<2$ 时），在对应于点 A_1 的那个点 $t=0$ 处，$\tan\theta=0$；而在对应于点 B 的那个点 $t=\beta$ 处，等于 $\tan\alpha_1\pi$. 因

此,在大于 π 的角的情形下,弧 BA_1 确实圆化了在顶点 A_1 处的那个角*.

根据边界对应原理,函数(5)把半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 共形映射到由周线 $A_1A_2\cdots A_nBA_1$ 所围成的那个区域 $\tilde{\Delta}$ 上去.变动常数 C,β 与 γ,我们便可以使这个区域 $\tilde{\Delta}$ 与所给多角形区域 Δ 的差,随意小到什么程度.

我们将就一个简单的例题来说明这映射是如何作成的.我们考虑在图 96 中所描绘的那个多角形——这是上一目中例 3 的三角形的一个特例.假设与点 A_1, A_2 及 A_3 相对应的,是实轴上的三个点 0,1 及 ∞,这时施瓦茨－克里斯托弗积分可以写成下面的形状

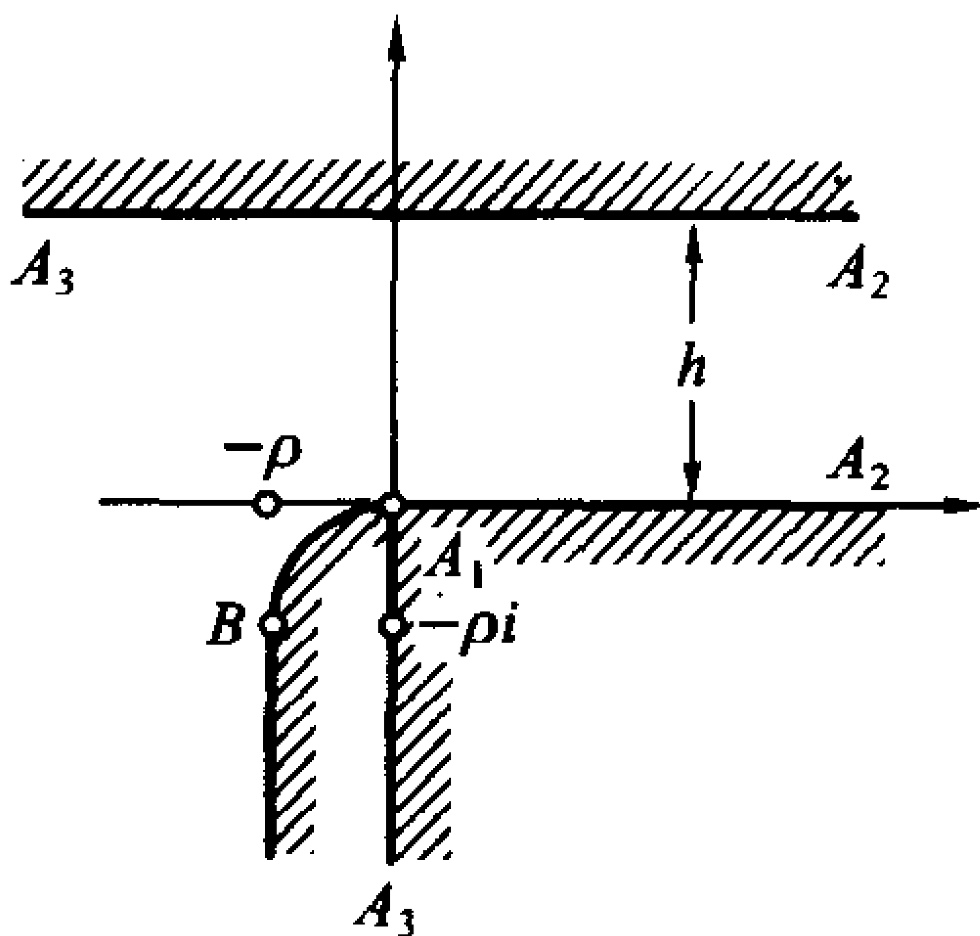


图 96

$$w=C\int_0^z\frac{\sqrt{z}dz}{1-z},\tag{6}$$

其中 C 是一个正的常数(在线段(0,1)上 w 应当取正值).按照前面所叙述的方法,我们不用函数(6)而令

$$w=C\int_0^z\frac{\sqrt{z}+\gamma\sqrt{z+\beta}}{1-z}dz.\tag{7}$$

这函数把线段(0,1)变换成正向半轴,而且我们要求:在经过点 $z=1$ 时,它要获得一个增量 ih,由此如在 39 目中一样得出

$$C\pi(1+\gamma\sqrt{1+\beta})=h.\tag{8}$$

下面,我们还要求:对应点 $z=-\beta$ 是点 $B=-\rho-i\rho$,这样,使得在 β 很小时,曲线弧 BA_1 近似于半径为 ρ 的圆弧.作代换 $z=-t$ 之后,这便化为方程

$$\rho+i\rho=C\int_0^\beta\frac{i\sqrt{t}+\gamma\sqrt{\beta-t}}{1+t}dt.$$

在这个方程中把实数部分与虚数部分分开,再求出积分,便化成下面那两个关系式

$$\left.\begin{aligned}&\rho=2C\{\sqrt{\beta}-\arctan\sqrt{\beta}\},\\&\rho=2C\gamma\left\{\sqrt{1+\beta}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}-\sqrt{\beta}\right\}.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

由所得到的这三个关系式(8)与(9),可以求出 ρ,C 与 γ 来,把它们作为参数 β 的函数.当 β 很小时,我们有

$$\rho\approx\frac{h}{3\pi}\beta^{\frac{3}{2}},\quad C\approx\frac{h}{2\pi}\left(1-\frac{3}{4}\beta\right),\quad \gamma\approx1+\beta.\tag{10}$$

---

* 当 $\alpha_1<1$ 时,我们有 $\left.\frac{dv}{du}\right|_{t=0}=\tan\alpha_1\pi$, $\left.\frac{dv}{du}\right|_{t=\beta}=0$,所以弧 A_1B 并不圆化这个角.这时仍可以使角圆化,只要取函数

$$w=C\int_0^z\{z^{\alpha_1-1}+\gamma(z-\beta)^{\alpha_1-1}\}\varphi(z)dz$$

(其中 $\beta>0$)来代替(5)便够了.但是这种方法,不如本目开始时所述的那方法来得方便.

于是,映射的函数便可以写成下面的形状(在不计关于 β 的高阶无限小的精确程度内)

$$w=\frac{2h}{\pi}\left\{\operatorname{arth}\sqrt{z}-\sqrt{z}+\left(\frac{\beta}{4}-1\right)\sqrt{z}\right\}. \tag{11}$$

在这一章中我们介绍了共形映射某些理论问题,它们与第 28 目开始时所叙述的一系列问题有关.在下面两章中读者将找到这些问题的进一步的例子.在第三章中解决平面向量场理论的各种不同边界问题时共形映射将还会遇到,它们与应用紧密相关.第四章专讲共形映射理论中的变分原理,我们在那里讨论在被映射区域的边界变化时共形映射的性状(第 28 目中的问题 3),同时还有某些近似公式.

我们将不涉及共形映射的近似计算的方法(除了第 45 目中的网格方法,这方法可能被用于这个目的).这些计算的分析方法读者可以在 Л. В. Канторович 和 В. И. Крвлов 的书[9]中了解到.对于许多实际目的,较好的计算方法是利用物理类比的方法,它是使用不复杂的专门化了的仪器和导电纸的计算方法,在 П. Ф. Фильчаков 和 В. И. Панчишин 的书[11]中有叙述.

读者可以在 В. Коппенфельс 和 Ц. Штальман 的书[13]中了解到某些实用的方法.

第三章　函数论的边值问题及其应用

我们已经说过,复变函数论,特别是它的几何部分——共形映射的理论,是基于各种物理学上的观念而产生并且发展起来的.欧拉和达朗贝尔从流体力学上的考虑而获得了复变函数的解析性的条件,黎曼在他的著作中,经常用到关于流体的平面流动与热流的解析函数的解释.

反过来,从另一方面讲,复变函数论的发展,又使得可以创立新的方法,来解决数学自然科学各部门(流体力学与空气动力学,弹性理论,静电场,磁场,热场,等等)中的重要实用问题.必须指出,在复变函数论的应用中的先进地位与主要的功绩,无疑地要归于俄国的学者.

尼古拉·伊戈罗维奇·茹科夫斯基与谢尔盖·阿历克赛耶维奇·恰普雷金(1869—1942)于20世纪之初,在将函数论应用到流体力学与空气动力学方面,获得了许多最重要的结果.复变函数论的方法,在他们的那些著名的论文中,以及在H.E.茹科夫斯基的著作"航空学的理论基础(Теоретические основы воазухоплавания)"(1911年)中,起着极重要的作用.由于他们的这些工作,有理由认为俄国不仅是航空事业的发源地,而且也是理论空气力学的发源地.就是在今天,函数论在流体力学与空气动力学上的最重要与最深入的应用,也是由苏联学者们(M.B.凯尔迪什,C.A.克里斯蒂安诺维奇,B.B.戈鲁别夫,Л.И.谢道夫等)所得出的.

古利·瓦西里耶维奇·科洛索夫* 在1909年奠定了复变函数论应用到弹性理论的平面问题的基础.尼古拉·伊万诺维奇·穆斯海利什维里在20世纪20年代,运用函

* 古利·瓦西里耶维奇·科洛索夫(1867—1936),俄罗斯学者、弹性理论专家.

数论的方法，得到这问题的辉煌的解答. 这些方法叙述在“平面弹性理论的若干基本问题”(1933 年)[10]一书中. 复变函数论的方法，在对于物理学各部门的研究中，也占有显著的地位(B. A. 福克、H. H. 鲍戈留波夫、B. C. 弗拉基米洛夫等).

在本章中，我们将讨论与复变函数论有关的一些基本的物理观念以及复变函数论的一些最简单的应用. 我们先从叙述与平面向量场的势能密切相关的、含两个变量的调和函数的理论，调和函数与解析函数的基本边值问题开始，然后根据理论的发展，来叙述重要的应用问题.

§1 调和函数

含两个实变量的实函数 $u(x,y)$，如果在一个区域 D 内具有连续的二阶偏导数，并且满足微分方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\text{是微分算子的记号}\right)$，便称做**在区域 D 内的调和函数***. 这个微分方程通常称为*拉普拉斯方程*. 但是，拉普拉斯(P. S. Laplace)研究这方程是在 1782 年，而远在他之前，L. 欧拉在其关于流体力学以及数学物理的其他学科的著作中，已经利用过这方程式了.

我们立刻可以注意到，由于拉普拉斯方程是线性的，所以一些调和函数 $u_k(x,y)$ 的任何具有实常数系数 α_k 的线性结合 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k(x,y)$，都仍然是一个调和函数.

在本章的随后几节中我们将看到，在物理学中所研究的那些重要的向量场的势能，都是调和函数，而任何一个调和函数，也都可以在物理学上代表某一个向量场的势能. 因此，在一般的情形中，调和函数常常被称做**势函数**，调和函数的理论被称做**势函数论**.

41. 调和函数的性质 首先，我们来说明在解析函数与调和函数这两个概念之间的关系，这关系可以在下面两个简单定理中表达出来.

定理 1 *任意一个在区域 D 内的单值解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实数部分与虚数部分，都是在这区域内的调和函数.*

这定理的证明可以直接由柯西 - 黎曼条件

---

* 在这里所讲的处处都是含两个变量的调和函数，因为正是这种调和函数，是同解析函数密切地联系着的. 在实用上说起来，满足方程式

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

的含三个变量的调和函数 $u(x,y,z)$，其重要性也不稍逊，但是，我们不去讨论它们.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

中导出.事实上,由于解析函数具有所有各阶的导数,所以方程组(1)可以按 x 与 y 来微分.把其中的第一个方程按照 x 微分,第二个方程式按照 y 微分,再利用混合导数相等定理,即$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$这个结果,我们得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

由此便有

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

对于函数 $v(x,y)$来说,证明完全类同.

设有两个在区域 D 内的调和函数 $u(x,y)$与 $v(x,y)$,它们以柯西-黎曼条件(1)互相联系着,则此两个调和函数就称为是共轭的.

定理 2　对于每一个在单连通区域 D 内的调和函数 $u(x,y)$,总可以找出一个与它共轭的调和函数 $v(x,y)$.

事实上,我们来考虑积分

$$v_0(x,y)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

其中 $z_0=x_0+iy_0$是一个定点,$z=x+iy$ 是区域D 内的一个变动点.根据拉普拉斯方程$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$,这个积分与积分路线无关,而仅是点 z 的函数.我们也把这个函数记作 $v_0(x,y)$.利用曲线积分的性质,我们有

$$\frac{\partial v_0}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{v_0(x+h,y)-v_0(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}-\frac{\partial u}{\partial y}dx=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

(我们可以沿水平线段从 z 到$z+h$ 取积分,在这线段上 $dy=0$);类似地,可以有$\frac{\partial v_0}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$.所以,$v_0(x,y)$便是所求的与函数 $u(x,y)$共轭的函数.因为这函数是由它自己的偏导数来定出的,可以相差一个常数项,所以,所有那些与 $u(x,y)$共轭的调和函数的全体,可以用公式

$$v(x,y)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C \tag{2}$$

来给出,其中的 C 是一个任意(实的)常数.

我们要注意,一般说来,在多阶连通区域 D 内,积分(2)

$$v(x,y)=\int_{z_0\,L}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C$$

规定了一个多值函数.如果连接点 z_0与 z 的两条路线L 与$\tilde{L}$,不可能始终保持在区

域 D 的内部，而从一条路线变形到另一条的话（即，如果在那个由 L 与 $\widetilde{L}$ 所围成的区域内，含有不属于 D 的点的话），这积分沿着 L 与沿着 $\widetilde{L}$ 便可能获得不同的值. 显然，第 13 目中相应的推理可以完全移用到现在这情形中来，并且可以确定：在多阶连通区域内，由积分(2)所规定的那个函数 $v(x,y)$ 的值的普遍公式，其形状为

$$v(x,y)=\int_{z_0\ L_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+N_1\Gamma_1+N_2\Gamma_2+\cdots+N_n\Gamma_n+C, \qquad (3)$$

其中 N_k 是任意整数，Γ_k 是沿着闭周线 γ_k 的积分，每一个 γ_k 都在其内部包含了 D 的边界的一个连通部分：

$$\Gamma_k=\int_{\gamma_k} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \qquad (4)$$

（参看第 13 目中的(2)与(3)两式）. 这些常量 Γ_k 叫做积分(2)的**周期**，或**周期常量**.

如果在位于 D 内的某一个区域 D' 内，可以分出由公式(3)所定出的那个函数 $v(x,y)$ 的一个单值连续分支来，那么，这分支显然是一个同 $u(x,y)$ 共轭的调和函数. 所以我们把函数 $v(x,y)$ 看作是*多值调和函数*. 要注意，这函数的偏导数仍是单值的

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

这可以由公式(3)中得出.

显然，定理 2 可以表述为

定理 2′ *任何一个在区域 D 内的调和函数，都可以看作是某一个解析函数 $f(z)$ 的实数部分或虚数部分. $f(z)$ 精确到可以任意加上或减去一个常数项，这常数项是虚的或是实的，这取决于：此调和函数是 $f(z)$ 的实数部分，还是虚数部分.*

我们在这定理中并没有把多阶连通区域的情形除外，因此解析函数 $f(z)$ 可以是多值的.

例 计算出偏导数，便可以表明：函数

$$u=\ln(x^2+y^2)=2\ln|z|$$

是一个在环形 $0<|z|<\infty$ 内的调和函数. 积分(2)的形状是

$$v(x,y)=2\int_{z_0\ L}^{z}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}+C=2\operatorname{Arg} z+C,$$

它在环形 $0<|z|<\infty$ 内表示一个无限多值函数. 其所对应的解析函数

$$f(z)=u+iv=2\ln|z|+2i\operatorname{Arg} z+iC=2\operatorname{Ln} z+iC$$

也是无限多值的.

定理 3 *任何调和函数 $u(x,y)$ 都是其变元 x 与 y 的解析函数，这就是说，在区域 D 中每一个点 $z_0=x_0+iy_0$ 的一个邻域内，这函数总可以被表示成绝对收敛级数的和的形式*

$$u(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}c_{mn}(x-x_0)^m(y-y_0)^n. \tag{5}$$

事实上,根据定理 2′可以把 $u(x,y)$ 看作是在点 z_0 的某一邻域 $|z-z_0|<R$ 内的一个单值解析函数 $f(z)$ 的实数部分. 设在这邻域内

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{6}$$

其中 $c_n=\alpha_n+i\beta_n$. 级数(6)的一般项的实数部分

$$\alpha_n\left\{(x-x_0)^n-\frac{n(n-1)}{2!}(x-x_0)^{n-2}(y-y_0)^2+\cdots\right\}$$
$$+\beta_n\left\{-n(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x-x_0)^{n-3}(y-y_0)^3+\cdots\right\} \tag{7}$$

的绝对值不超过

$$|c_n|\cdot\{|x-x_0|+|y-y_0|\}^n,$$

又因为根据第 19 目的阿贝尔定理,级数(6)在任何一个圆 $|z-z_0|\leqslant r<R$ 内都绝对收敛,即,当 $r<R$ 时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot r^n$ 收敛,所以,当

$$|x-x_0|+|y-y_0|<R$$

时,以(7)作为一般项的那个级数也必定是绝对收敛的. 而这级数便是那表示 $u(x,y)$ 的级数. 在重新组合它的项(这是可以做的,因为我们已经证明这级数绝对收敛)之后,我们便得出所需要的级数(5). 定理已经证明.

特别是,从这个已经证明的定理中,可以推出:调和函数具有所有各阶的偏导数. 不难证明,这些偏导数也都是调和函数(参看第 17 目的定理 1).

根据定理 3,可以得出一个便于实用的、从已知的实数部分 $u(x,y)$ 复原解析函数 $f(z)$ 的方法. 把那表示 $u(x,y)$ 的级数的一般项的表达式(7)进行初等变换,我们便得出这函数在点 z_0 的邻域内的一个表示式

$$u(x,y)=\alpha_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{c_n[(x-x_0)+i(y-y_0)]^n$$
$$+\bar{c}_n[(x-x_0)-i(y-y_0)]^n\}.$$

根据阿贝尔定理,对于同 x_0 与 y_0 足够接近的那些 x 与 y 的复数值,这级数也收敛,所以可以在式中令

$$x-x_0=\frac{\zeta-z_0}{2},\quad y-y_0=\frac{\zeta-z_0}{2i},$$

其中的 ζ 是一个与 z_0 足够接近的点,于是我们得到

$$u\left(x_0+\frac{\zeta-z_0}{2},y_0+\frac{\zeta-z_0}{2i}\right)=\alpha_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\zeta-z_0)^n$$
$$=\alpha_0+\frac{1}{2}[f(\zeta)-c_0].$$

在这个式子中把 ζ 换成 z,再作一些简单的变换之后,我们便得出最后的公式

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)-\bar{c}_0. \tag{8}$$

公式(8)是就邻近于 z_0 的那些点 z 而得出的,但是,显然它在 $f(z)$ 的整个定义域内都成立,因为在这区域内(8)式的两部分都是 z 的解析函数.

特别,如果 $f(z)$ 在坐标原点处是解析的,我们可以令 $z_0=0$,于是公式(8)便呈特别简单的形式

$$f(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-\bar{c}_0. \tag{9}$$

我们来举几个应用公式(8)与(9)的例子:

例 1 $u=x+y, f(z)=z+\frac{z}{i}+C=(1-i)z+C$ (公式(9));

例 2 $u=\ln(x^2+y^2), f(z)=2\ln\left\{\frac{(z+1)^2}{4}-\frac{(z-1)^2}{4}\right\}+C=2\ln z+C$(公式(8), $z_0=1$).

例 3 $u=\frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y-\cos 2x}, f(z)=\frac{2\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch} i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)-\cos\left(z+\frac{x}{2}\right)}+C=\cot z+C\Big($公式(8), $z_0=\frac{\pi}{2}\Big)$.

在所有这三个式子中,C 都是纯虚数的常量.

现在我们来研究调和函数的性质,基于定理 1 与定理 2,这些性质很容易由解析函数的相应性质中得出.为了方便起见,我们有时将用 $u(z)$ 来代替 $u(x,y)$,就如同对于含几个变量的函数,用 $u(P)$ 来代替 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 那样,这时 P 被理解成其坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的点.

定理 4(中值定理) 如果函数 $u(z)$ 在一个以点 z 为圆心以 r 为半径的闭圆上是连续的,并且在这个圆的内部是一个调和函数,那么

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\varphi})d\varphi. \tag{10}$$

这定理的证明,可以直接由第 14 目的公式(5)中分出实数部分而得到.

定理 5 一个不为常数的调和函数,不可能在其定义域的内点处达到其最大值或最小值.

这定理只要就最大值的情形予以证明便够了,因为调和函数 $u(z)$ 的最小值点便是函数 $-u(z)$ 的最大值点,而 $-u(z)$ 也是一个调和函数.我们姑且作相反的假定,假设调和函数 $u(z)$ 在其定义域的一个内点 z_0 处达到最大值.在点 z_0 的邻域内,我们构成一个单值解析函数 $f(z)$,使得 $u=\operatorname{Re} f(z)$.函数 $e^{f(z)}$ 是一个解析函数且不是常数,其模为 $e^{u(z)}$,并且,根据我们的假定,它的模 $e^{u(z)}$ 在区域的一个内点 z_0 处达到最大值.这同第 15 目中的最大值原理相矛盾,因此定理便已证明了.

也还可以同第 15 目中证明最大值原理时那样,根据中值定理来直接证明定

理 5.

定理 6 如果一个在整个开平面内的调和函数 $u(z)$是上有界或下有界的,那么这函数 $u(z)$必定是个常数.

事实上,设 $u(z)$是上有界:$u(z)<M$.我们来构成一个在整个开平面内的解析函数 $f(z)$,使得 $u(z)=\mathrm{Re}\,f(z)$.根据定理的条件,所有的函数值 $w=f(z)$都在半平面 $u<M$ 内,因此,根据在第 28 目末所提出的注,函数 $f(z)$是个常数,这意味着 $u(z)$也是一个常数.

下面的两个定理确立了调和函数的等值线——即,那些使 $u(z)=\mathrm{const}$ 的点的总和——的特性.

定理 7 如果一个不是常数的调和函数 $u(z)$有一条封闭的等值线 $u(z)=u_0$,那么在这条等值线的内部至少有函数 $u(z)$的一个奇点*.

事实上,假如不然的话,在这等值线所围成的那闭区域内连续的这个函数$u(z)$,应当达到它的最大值 $u(z_1)$与最小值 $u(z_2)$.根据定理 5,点 z_1与 z_2必须都位于这区域的边界上,即,必须都位于等值线上,因此,$u(z_1)=u(z_2)$,所以 $u(z)$是个常数.

定理 8 等值线 $u(z)=u_0$上的点 z_0的任何一个足够小的邻域,总被这条等值线划分成偶数 $2n$ $(n\geqslant 1)$个扇形,在这些扇形上 $u(z)$轮流地取大于 u_0及小于 u_0的值.

函数 $u(z)-u_0$在点 z_0处等于 0.我们来这样地选择它的共轭函数 $v(z)$,使得 $v(z_0)=0$.于是我们得到一个解析函数 $f(z)=u(z)-u_0+iv(z)$,它也在点 z_0处等于 0.把这个零点的阶数记作 n,于是在点 z_0的邻域内有

$$f(z)=c_n(z-z_0)^n+c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots,\quad c_n\neq 0,$$

因此,

$$u(z)=u_0+\mathrm{Re}\,f(z)=u_0+Ar^n\sin(n\varphi+B)+o(r^n),\tag{11}$$

其中令 $z-z_0=re^{i\varphi}$,$A\neq 0$ 与 B 是某两个常数,又 $o(r^n)$表示当 $r\to 0$ 时阶数较 r^n 更高的无穷小.由此可见,对于足够小的 r 来说,当 φ 从 0 变到 2π 时,差 $u-u_0$有 $2n$ 次变成 0,同时改变符号.定理便已经证明.

同样可以证明:与 $u(z)$共轭的调和函数 $v(z)$的经过点 z_0的等值线,在这个点的邻域内分裂成 n 条分支,这些分支在点 z_0处与定理 8 中所说的那些扇形的平分线相切.由定理 8 得出:调和函数的等值线只可能有单点($n=1$)或具有不同的左右切线的多重点**($n>1$)——孤立点、端点或歧点的情形都不包含.

---

* 使函数的调和性条件不成立的点,叫做调和函数的奇点.

** 在函数 $u(z)$的任何一个闭的调和性区域内,总只可以找到等值线的有限多个多重点(在每一个这样的点处 $f'(z)=0$).因为不然的话,根据唯一性定理(第 20 目),便应当有 $f'(z)\equiv 0$ 了.

我们来指出中值定理的下述逆定理,这对于以后颇为有用.

定理 9 如果函数 $u(z)$在区域 D 内连续,并且在任何一个点 z 处对于足够小的 r 都有

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{i\varphi})d\varphi,$$

那么函数 $u(z)$必是一个在 D 内的调和函数.

我们的证明要基于下述这个定理:有一个调和函数存在,它在一个单连通区域的边界上的取值是已经给出的.这定理将在第 43 目中来证明.设 z_0是 D 内的任意一个点,$\bar{D}_0$是一个属于 D 内而包含点 z_0 于其内部的单连通闭区域.根据所说的那个定理,我们可以构成一个调和函数 $u_0(z)$,使它在区域 $\bar{D}_0$的边界 C_0上所取的值,与函数 $u(z)$的值相同.并记 $U(z)=u_0(z)-u(z)$.

根据这函数的构造以及所要证明的定理的条件,函数 $U(z)$在 $\bar{D}_0$内连续,并且在这区域的边界 C_0上等于 0.此外,$U(z)$在任何一个属于 $\bar{D}_0$内的圆的圆心处的值,都等于它在这圆的圆周上的值的平均数,因为,$u(z)$与 $u_0(z)$这两个函数都是具有这性质的:$u(z)$是由于定理的条件,$u_0(z)$是由于中值定理.由此便有:函数 $U(z)$不可能在 D_0的一个内点处达到其最大值或最小值,这只需依据这个函数的连续性与中值定理便可以证明(见定理 5 后面的注).可是,因为一个在闭区域上连续的函数应当达到它的最大值与最小值,所以 $U(z)$应当在 $\bar{D}_0$的边界上达到其最大值与最小值.由于在边界上处处都有 $U(z)=0$,所以 $U(z)$的最大值与最小值都等于 0,因此,在 $\bar{D}_0$内处处都有 $U(z)\equiv 0$.这就是说,函数 $u(z)$在 $\bar{D}_0$内处处都与一个调和函数 $u_0(z)$相同,特别是,$u(z)$在点 z_0处是调和函数.由于 z_0是 D 内的任意一个点,所以定理已经证明.

现在我们来导出一个与第 19 目中的魏尔斯特拉斯定理相类似的定理.

定理 10 设已经给出了一列在区域 D 内调和而在 $\bar{D}$ 内连续的函数序列

$$u_0(z),u_1(z),\cdots,u_n(z),\cdots.$$

如果级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k(z)$在 D 的边界上一致收敛,那么它在 D 的内部也必一致收敛,并且它的和是一个在 D 内的调和函数.

根据最大最小值原理(定理 5),便可以得出级数在 D 的内部的一致收敛性.事实上,按照著名的柯西收敛准则*,由于 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k(z)$在区域 D 的边界上一致收敛,可以得出:对于任何一个 $\varepsilon>0$,总可以找出一个整数 N,只要对于任何 $n>N$ 和任何正整数 p 以及边界上的一切点 ζ 来说,都有

* 见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》,卷二,第 376 目.

$$|u_{n+1}(\zeta)+u_{n+2}(\zeta)+\cdots+u_{n+p}(\zeta)|<\varepsilon.$$

因为在模记号内的这个和式是个调和函数,所以根据最大最小值原理,对于在区域内部的一切点 z 来说,也都有

$$|u_{n+1}(z)+u_{n+2}(z)+\cdots+u_{n+p}(z)|<\varepsilon.$$

按照那个柯西准则,便知道级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ 是一致收敛的. 余下还需要证明,这级数的和 $u(z)$ 是一个调和函数. 为此,我们要利用定理 9 与定理 4. 对于任何一个足够小的 r,有

$$\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\varphi})d\varphi=\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z+re^{i\varphi})d\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} u_k(z+re^{i\varphi})d\varphi$$

(我们利用了级数的一致收敛性,所以级数的逐项积分是合法的). 根据定理 4,右端的那积分等于 $2\pi u_k(z)$,因此

$$\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\varphi})d\varphi=2\pi\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)=2\pi u(z),$$

所以,根据定理 9,函数 $u(z)$ 在点 z 处是调和函数. 由于 z 是区域 D 内的任意一个点,所以定理已经证明了.

最后,我们还要提出两个在以后很有用的定理. 其中的第一个定理表达了:函数的调和性不会因自变量的解析变换而被破坏.

定理 11 如果函数 $u(z)$ 在区域 D 内是调和的,而 $z=g(\zeta)$ 是在某一个区域 Δ 内的解析函数,并且它的函数值都在 D 内,那么复合函数 $u[g(\zeta)]=U(\zeta)$ 是在 Δ 内的调和函数.

事实上,我们可以构成一个(或许是多值的)解析函数 $f(z)$,使得 $u(z)=\mathrm{Re}\,f(z)$. 函数 $f[g(\zeta)]=F(\zeta)$ 显然在区域 Δ 内是解析的,因此,它的实数部分 $U(\zeta)=\mathrm{Re}\,f[g(\zeta)]=\mathrm{Re}\,F(\zeta)$ 在这区域内是调和函数.

第二个定理表达了调和函数的法线方向导数的积分的性质.

定理 12 如果函数 $u(z)$ 在一个单连通区域 D 内是个调和函数,并且它同它的偏导数都是在 $\bar{D}$ 内连续的,那么

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds=0, \tag{12}$$

其中 C 是区域 D 的边界,$\frac{\partial}{\partial n}$ 表示按垂直于 C 的方向所取的导数,而 ds 为弧的微分.

我们在 $\bar{D}$ 内构造一个与 $u(z)$ 共轭的调和函数 $v(z)$. 由于 D 是个单连通区域,所以 v 是个单值函数. 根据在第 5 目末所提的注,柯西-黎曼条件可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s} \tag{13}$$

的形状,其中 $\frac{\partial}{\partial s}$ 表示按某一曲线的切线方向所取的导数,$\frac{\partial}{\partial n}$ 表示按这曲线的法线方

向所取的导数(要使得从向量 $\boldsymbol{n}^0$ 到 $\boldsymbol{s}^0$ 的旋转是按照逆时针方向进行的).由于函数 $u(z)$的偏导数是连续的,因之,它们的组合$\frac{\partial u}{\partial n}$与$\frac{\partial u}{\partial s}$也是连续的,所以等式(13)在区域 D 的边界C 上也成立.因此,沿着闭周线 C 便有

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int_C \frac{\partial v}{\partial s} ds = -\int_C dv = 0,$$

因为函数 $v(z)$是单值的.

42. 调和函数的性质(续) 在这里我们将研究关于调和函数的奇点,唯一性定理以及解析延拓的问题.我们先从研究一个单值调和函数 $u(z)$在它的孤立奇点的邻域内的性状开始.设函数 $u(z)$在点 a 的一个邻域 $0<|z-a|<R$ 内是个单值调和函数.把在这邻域内与函数 $u(z)$共轭的调和函数 $v(z)$的周期常量记作 Γ.

因为当 z 沿着一条环绕点a 的闭路线按正方向绕行一周时,函数 $iv(z)$的任何一个分支的增量都等于 $i\Gamma$,而在同样绕行时 $\mathrm{Ln}(z-a)$的任何一个分支的增量则等于 $2\pi i$.

$$f(z) = u(z) + iv(z) - \frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Ln}(z-a)$$

在我们的这个邻域内显然分解成单值解析函数的总体,在任何固定点上这些函数的值彼此相差 $i\Gamma$ 的一个整数倍.因此,函数

$$e^{\frac{2\pi}{\Gamma}(u+iv)} = (z-a)e^{\frac{2\pi}{\Gamma}f(z)} = g(z)$$

也是一个单值解析函数,于是我们便得出了单值调和函数 $u(z)$在孤立奇点 a 的邻域内的一个表示式

$$u(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln|g(z)|. \tag{1}$$

在 $\Gamma=0$ 的情形,同样形式的表示式也成立,因为在那时函数 $f(z)=u+iv$ 是单值的,所以,令 $e^{f(z)}=g(z)$,我们便得出

$$u(z) = \ln|g(z)|. \tag{2}$$

基于公式(1)与(2),可以得出下述的对单值调和函数的孤立奇点的分类.下面三个定理包揽了在奇点邻域内这种函数的性状的所有可能情况.

定理 1 如果 $u(z)$在点 a 的邻域内是有界的,那么必有

$$\lim_{z\to a} u(z) = b$$

存在.令 $u(a)=b$ 后,我们便得到一个在点 a 处也是调和的函数(可去奇点).

事实上,在这情形下表达式(1)或(2)中的那个函数 $g(z)$在点 a 处有一个可去奇点,这便是说,极限$\lim\limits_{z\to a} g(z)$存在,这极限显然不等于0——由此便得出了我们的结论.

定理 2 如果当 $z\to a$ 时$u(z)$趋于无穷大,那么在点 a 的邻域内,$u(z)$可以表示成

$$u(z)=k\ln|z-a|+U(z) \tag{3}$$

的形式，其中 $k\neq 0$ 是某一个常数，$U(z)$是一个在点 a 处调和的函数（极点）.

事实上，函数 $g(z)$在点 a 处只可能有极点或零点（如果 $u\to-\infty$），因此，可以把它表示成

$$g(z)=(z-a)^n\varphi(z)$$

的形状，其中 n 是一个正数或负数，$\varphi(z)$是一个在点 a 处解析的函数，并且 $\varphi(a)\neq 0$. 把这代入表达式(1)或(2)中，我们便得出所求的那表示式(3).

最后，有

定理 3　如果当 $z\to a$ 时 $u(z)$不趋于任何一个极限，那么它在点 a 处便是完全不确定的；对于任何一个实数 b，都可以找到一组点列 $z_n\to a$，使有 $\lim\limits_{n\to\infty}u(z_n)=b$（本性奇点）.

事实上，这时 $g(z)$在点 a 处只可能有本性奇点，所以我们的这个结论便是Ю. В. 索霍茨基定理（第 22 目）的直接推论.

例

$$g(z)=e^{\frac{1}{z}},\ u=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

上面所说的一切，对于无穷远点来说也都适用，不过应当把邻域 $0<|z-a|<R$ 换成邻域 $R<|z|<\infty$，把表示式(3)换成表示式

$$u(z)=k\ln|z|+U(z).$$

函数在无穷远点处是调和函数这句话的意义，是指点 $z=\infty$是这函数的一个可去奇点.

我们不讨论多值性的奇点（对于函数 $u=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$来说的点 $z=0$，便是这种点的例子），也不讨论非孤立奇点.

现在我们讨论关于调和函数的唯一性定理的问题. 解析函数理论中的“内唯一性定理”（第 20 目），不能整个地移用到调和函数上来，因为，在一些曲线上取值相同的那些调和函数，并不一定在整个区域内也相同. 事实上，许多调和函数在某些曲线（等值线）上同取一个值，因此，它们在这些曲线上与一些常数相同，而在区域内部却不是常数. 但是，下面的定理则是正确的：

定理 4　如果两个在区域 D 内调和的函数，在某一个包含于 D 中的区域D_0内是相同的，那么它们在整个区域 D 内也必相同.

事实上，这样两个函数的差 $u(z)$也是一个调和函数，并且在区域 D_0内恒等于 0. 我们在区域 D 内构造一个（可以是多值的）解析函数 $f(z)$，使 $u(z)=\mathrm{Re}\,f(z)$. 在区域 D_0内与 $u(z)$共轭的调和函数 $v(z)$应当是一个常数，因为根据柯西－黎曼条件，在这区域内有$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\equiv 0$. 所以，$f(z)$在 D_0内是个常数，这意味着在整个区域 D 内也是个常数. 于是 $u(z)$在 D 内也是常数，而且，此时必须在 D 内

等于 0 (因为它在 D_0内等于 0). 定理得证.

解析函数理论中的"边唯一性定理"是表明:在一个区域内解析的函数,可由它本身在边界上的那些值来定出(第 14 目),这定理可以移用到调和函数上来.对于调和函数来说,这定理是最大最小值原理(上一目中的定理 5)的一个直接推论.为了要在更一般的假设下来得到这定理,使得对于实用来说这结果可以适用得充分普遍起见,我们先来证明广义最大最小值原理:

定理 5 如果一个在区域 D 内的有界调和函数 $u(z)$,在这区域的边界 C 上取值* $u(\zeta)$,并且 $u(\zeta)$是逐段连续而且仅有有限多个第一类间断点的,那么 $u(z)$在 D 的内部的值,必定都在它的最大边界值与最小边界值($u(\zeta)$在间断点处的那些值不算在内)之间.

设 $M=\sup\limits_{C} u(\zeta)$,又 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$是 $u(\zeta)$的间断点,δ 是区域D 的直径,即,D 中两点间距离的最大值.我们固定任意一个正常数 ε,并考虑函数

$$U(z)=M+\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{\delta}{|z-\zeta_k|}. \tag{4}$$

函数 $U(z)$显然是一个在区域 D 内的调和函数,处处都大于 M,并且除了那些点 ζ_k处外,在 $\bar{D}$ 内是处处连续的,当 z 接近于点 ζ_k时,它趋于 $+\infty$.我们以每一个 ζ_k为圆心,以足够小的 r 为半径作圆,再把由区域 D 中去掉了所有这样的圆而得到的那个区域,记作 D_r.

函数 $U(z)-u(z)$在 D 与D_r的边界的公共部分上是非负的,而且当 r 足够小时,在那些圆周$|z-\zeta_k|=r$ 上也是如此,因为 $u(z)$根据所给条件是有界的,而当 $r\to 0$时,$U(z)$在这些圆周上的值无限地增大.由此,根据通常的最大最小值原理(上一目中的定理 5),我们可以作出结论说:在 D_r 中的任何一个点处,函数 $U(z)-u(z)$都不为负,因而,在 D 内的任何一个点处**,函数 $U(z)-u(z)$也都不为负.但是,因为当 z 已经固定而$\varepsilon\to 0$ 时,函数 $U(z)\to M$,所以由此便得出:在 D 内任何一个点处都有$|u(z)|\leqslant M$.而且根据上一目中的定理 5,在 D 的内部函数$u(z)$不可能取等于它的最大值 M 的值,所以,在 D 内处处都有严格不等式$u(z)<M$.类似地可以证明:在 D 内处处都有$u(z)>m$,其中 $m=\inf\limits_{C} u(\zeta)$.

注 对于无界的函数 $u(z)$来说,这定理不能成立.例如函数

$$u(z)=\frac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=\operatorname{Re}\left(1-\frac{2}{z}\right) \tag{5}$$

在圆 $x^2+y^2<2x$ 内是调和函数,并且在这圆的圆周上除掉点 $z=0$ 处外处处等于

---

* 设函数 $u(z)$定义在区域 D 内.如果当 z 沿着D 内的点趋于这区域的一个边界点ζ 时,有极限$\lim\limits_{z\to\zeta}u(z)=u(\zeta)$存在,那么我们便说,函数 $u(z)$在边界点 ζ 处取值$u(\zeta)$.

** 实际上,区域 D 中的任何一个点z,只要 r 足够小,都属于某一个区域 D_r.

0. 但是在圆的内部,它却是异于 0 的.

现在容易来证明我们在上面所说过的那个**边界唯一性定理**:

定理 6 设在区域 D 的边界 C 上,给定了一个逐段连续而且仅有有限多个第一类间断点 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 的函数 $u(\zeta)$. 至多只能有一个在区域 D 内的有界调和函数 $u(z)$ 存在,它在边界 C 上的点 $\zeta \neq \zeta_k$ 处取值 $u(\zeta)$.

事实上,设有两个函数 $u_1(z)$ 与 $u_2(z)$ 存在,它们都满足定理的条件,它们的差

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z)$$

在区域 D 内是一个有界调和函数,并且在所有的边界点 $\zeta \neq \zeta_k$ 处都取等于 0 的值. 根据定理 5, $u(z)$ 在 D 内部的所有值,都要在它的那些边界点 $\zeta \neq \zeta_k$ 处的最大值与最小值之间,即,都等于 0. 定理已经得证.

我们要注意,在定理 6 中,区域 D 可能在它的内部或边界上含有无穷远点. 对于无界函数来说,这定理当然是不正确的. 例如,在区域 D 是圆 $x^2 + y^2 < 2x$,并且边界值(除 $z = 0$ 处外)处处都等于 0 的情形下,便有取所给边界值的两个调和函数存在——函数(5)与 $u \equiv 0$.

最后我们来弄清关于调和函数的解析延拓的问题. 连续延拓原理(第 25 目)不能移用到调和函数上来. 例如,设在上半单位圆内, $u_1(z) = y$,在下半单位圆内, $u_2(z) \equiv 0$,于是在线段 $(-1, 1)$ 上便有 $u_1 = u_2$. 但是,在上半单位圆内等于 u_1 而在下半单位圆内等于 u_2 的那个函数 $u(z)$,却不是一个调和函数,因为在直径 $y = 0$ 的点上它没有导数. 可是对称原理与解析延拓原理(第 35 目)对于调和函数仍然保持有效.

定理 7(对称原理) 设函数 $u_1(z)$ 在区域 D_1 内是调和函数, D_1 的边界含有实轴的一段线段 (α, β),并且 $u_1(z)$ 在这线段上等于 0. 那么函数

$$u_2(z) = -u_1(\bar{z}) \tag{6}$$

在关于实轴与 D_1 对称的那个区域 D_2 内是调和函数,并且给出函数 $u_1(z)$ 在 D_2 内的解析延拓.

实际上,显然 $u_2(z)$ 在区域 D_2 内是个调和函数. 这可以由条件(6)中直接推出,因为,把式(6)写成 $u_2(x, y) = -u_1(x, -y)$ 的形状,便有

$$\frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x, -y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x, -y)}{\partial y^2}.$$

余下还要证明:函数

$$u(z) = \begin{cases} u_1(z), & \text{在 } D_1 \text{ 内}, \\ 0, & \text{在} (\alpha, \beta) \text{上}, \\ u_2(z), & \text{在 } D_2 \text{ 内} \end{cases}$$

在区域 $D = D_1 + (\alpha, \beta) + D_2$ 内是个调和函数. 函数 $u(z)$ 在 D 内是连续的,并且在任何一个点 z 处,它的值都等于在一个以 z 为圆心而半径足够小的圆周上的那些值的算术平均值. 对于在区域 D_1 与 D_2 内的那些点来说,这可以由 $u_1(z)$ 与 $u_2(z)$ 是调

和函数而得出.对于在线段(α,β)上的那些点来说,$u(z)=0$,这可以从对称考虑得出.于是,根据上一目中的定理9,函数$u(z)$在区域D内是一个调和函数.

定理8(解析延拓原理) 如果函数$u(z)$在区域D内是调和函数,D的边界含有一段解析弧γ,并且$u(z)$在这段弧上的那些值,形成一个参变量的实解析函数,那么函数$u(z)$便可以经过弧γ解析延拓.

首先,设γ是实轴x上的一段线段(α,β).由于实函数$u(x)$依照条件在γ上是解析的,所以它可以被解析延拓到复数区域里去(参看第35目中解析延拓原理的证明).我们把这个延拓记作$f_1(z)$——这函数是一个在线段(α,β)的邻域Δ内的解析(复)函数,它的实数部分$u_1(z)$是在Δ内的调和函数,在线段γ上等于$u(x)$.根据定理7,差$u(z)-u_1(z)$可以解析延拓到这线段的外面去,也就是,延拓到关于线段γ与区域D同Δ的相交部分成对称的那个区域.由于$u_1(z)$在这区域内是已经被确定了的,这样的延拓便给出了$u(z)$向这个区域内的解析延拓.对于这个特殊情况来说,定理已经证明了.

要过渡到一般的情形上去,我们假定:弧γ是由参数方程$z=z(t)$所给出的,其中$z(t)$是一个在实轴的线段(α,β)上的解析函数,并且$z'(t)\neq 0$.按照所给条件,函数$u\{z(t)\}=U(t)$在这线段上也是解析的.我们把函数$z=z(t)$延拓到值t的一个包含线段(α,β)的复数区域内去,并且把t的复数值记作ζ,而把所得到的那个延拓记作$z=z(\zeta)$.函数$u\{z(\zeta)\}=U(\zeta)$在线段(α,β)的一边是调和函数(参看上一目中的定理11),并且在这线段上(这里$\zeta=t$)取解析值$U(t)$.因此,根据刚才所证明的特殊情形,$U(\zeta)$可以经过线段(α,β)来延拓,于是,回转到变量z上来*,我们便得出函数$u(z)$经过曲线γ的解析延拓.定理已经证明了.

最后我们还要指出:当给定了区域D_1与D_2,并且它们的边界的公共部分γ也已经给出时,调和函数$u_1(z)$经过γ到D_2内的解析延拓**便被唯一地确定了.这可以把定理4应用到区域$D_0=D_1$及$D=D_1+\gamma+D_2$而得出.

43. 狄利克雷问题 全体调和函数的总体,是拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

的所有解的总体,这方程是最简单的二阶偏微分方程之一.类似于常微分方程情形,为了可以区分出一个确定的解而给出了附加的条件.完全一样,为了要完全确定拉普拉斯方程的一个解,也需要一些附加的条件.对于拉普拉斯方程的这些条件,通常表述成称之谓**边值条件**的形状,即,表述成所求解在区域的边界上所应当满足的一些给定关系式的形状.这样的边值条件,可以由所给问题的解的那些物理条件本身,自然

---

* 为了要回到变量z上,需要用$\zeta=\zeta(z)$代入$U(\zeta)$内,其中$\zeta(z)$是$z(\zeta)$的反函数.函数$\zeta(z)$在γ的某一个邻域内是单值而且解析的,因为,按照所给的条件,在(α,β)上有$z'(t)\neq 0$.

** 对于调和函数的解析延拓来讲,第25目中的定义仍然保持不变,只要把“解析的”换成“调和的”就是了.

地得到.

这类条件中最简单的那一种,归结为在区域的边界的每一点上给定所求的调和函数的值.由此,产生了所谓第一边值问题,或者,狄利克雷(Dirichlet)问题*:

求出一个在区域 D 内调和并且在 $\bar{D}$ 内连续的函数 $u(z)$,使它在 D 的边界上取已经给定的连续值 $u(\zeta)$.

例如,在某一个区域内求热场的温度或静电场的势能,当在这区域的边界上的温度或势能已经知道时,便可化为狄利克雷问题.我们在下面将看到,其他类型的边值问题,也可以化成狄利克雷问题.

在应用中,边界值 $u(\zeta)$是连续的这个条件,是限制过严了,所以需要考虑广义狄利克雷问题:

*设已经在区域 D 的边界 C 上给出了一个函数 $u(\zeta)$,它除了在有限多个点 ζ_1, $\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 处有第一类间断点外,是处处连续的.要求找出一个在区域 D 内的有界调和函数 $u(z)$,使它在函数 $u(\zeta)$的所有连续点处都取值 $u(\zeta)$**.*

上一目中的定理 6,现在可以表述为广义狄利克雷问题的解的唯一性定理.

定理 1　*在给定的区域 D 内,当边界函数 $u(\zeta)$已知时,只能有广义狄利克雷问题的一个解存在.*

广义狄利克雷问题的解可以用一种方法来化成通常的狄利克雷问题的解.为了简单起见,我们只限于讨论单连通区域的情形.当 ζ 沿着 D 的边界 C 按正方向与按负方向趋于点 ζ_k时,边界函数 $u(\zeta)$的极限值,我们分别记作 $u^-(\zeta_k)$与 $u^+(\zeta_k)$.用

$$h_k = u^+(\zeta_k) - u^-(\zeta_k)$$

来表示 $u(\zeta)$在点 ζ_k处的跃距.为了一致起见,我们假设 ζ_k是周线 C 的角点.并用 φ_k^- 与 φ_k^+ 来表示路线 C 在点 ζ_k处的左切线与右切线同 x 轴之间所成的角度(图 97).再设

$$\alpha_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-$$

(如果 ζ_k不是一个角点,则 $\alpha_k = -\pi$).我们来考虑函数

$$u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z-\zeta_k),$$

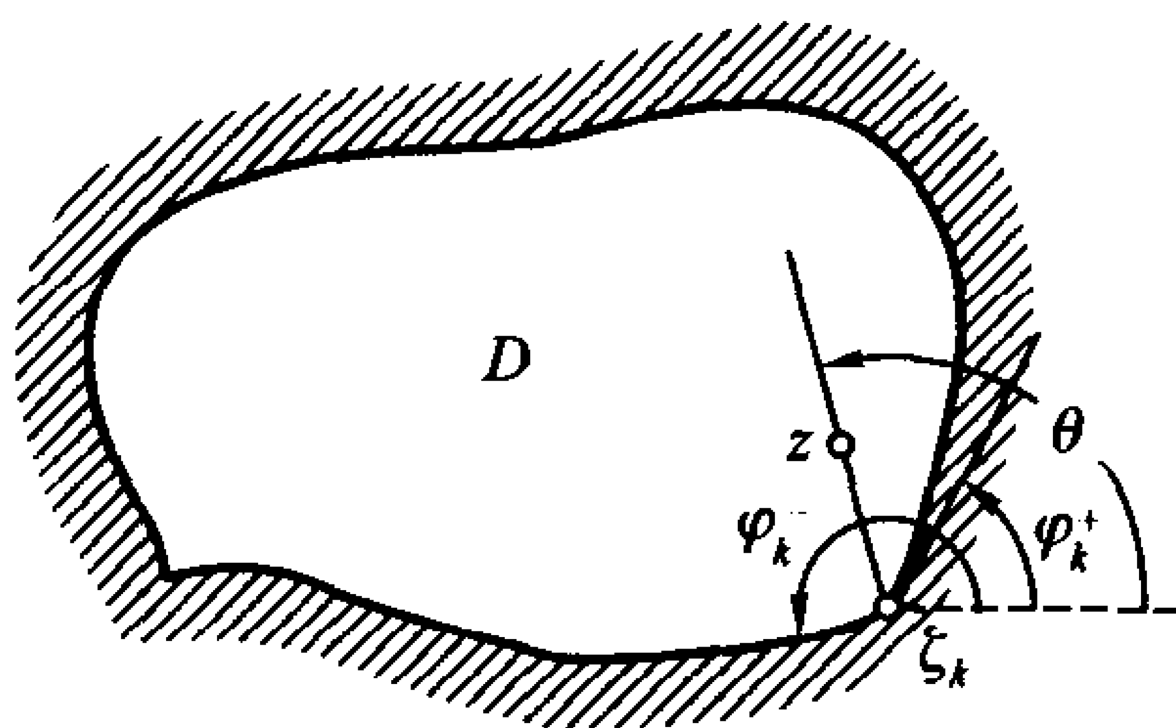


图 97

其中的 arg 表示辐角的一个适当选择出来的分支.显然,这函数是在 D 内的调和函数,并且在 $\bar{D}$ 内除了点 $\zeta=\zeta_k$处以外是处处连续的.如果 z 沿着一条其在点 ζ_k处的切线同 x 轴形成角 θ (θ 的值包含在 φ_k^- 与 φ_k^+ 之

---

* 狄利克雷(Dirichlet,1805—1859),德国数学家.

** 如果所给的函数 $u(\zeta)$是连续的,那么广义狄利克雷问题便同通常的狄利克雷问题相符合,因为,函数 $u(z)$是有界的这个条件,可以由 $u(z)$在 $\bar{D}$ 内是连续的这条件自动得出.

间)的路线趋于 ζ_k,那么这个函数 $u_k(z)$ 便趋于极限 $\frac{h_k}{\alpha_k}\theta$. 因此,当 ζ 沿着曲线 C 按正方向经过点 ζ_k 时,函数 $u_k(\zeta)$ 便经历一个跃距 $\frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^+ - \frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^- = h_k$.

现在设 $u(z)$ 是广义狄利克雷问题当边界值 $u(\zeta)$ 已知时的一个解. 我们来考虑函数

$$U(z) = u(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k), \tag{2}$$

它在区域 D 内是个调和函数,并且在 $\bar{D}$ 内是连续的. 事实上, $u(z)$ 和所有函数

$$u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k)$$

在 D 内都是调和函数. 从而,当 $z \to \zeta \neq \zeta_k$ 时, $U(z)$ 的极限值等于

$$U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta), \tag{3}$$

而且函数 $U(\zeta)$ 当经过每一个 ζ_k 点时也仍旧是连续的,因为在构成 $U(\zeta)$ 时,我们已经从在点 ζ_k 处有跃距 h_k 的那个函数 $u(\zeta)$ 中,减去了在这个点处有同一跃距的一个函数 $u_k(\zeta)$,而(3)的和式中其余的那些项在这个点处都是连续的.

因此,在实际上,广义狄利克雷问题的解 $u(z)$,可以表示成一个具有连续边界值 $U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta)$ 的狄利克雷问题的解 $U(z)$ 与函数 $\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ 的和:

$$u(z) = U(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k). \tag{4}$$

根据定理 1,所求得的解是唯一的.

由式(4)可以得出下面那个说明广义狄利克雷问题的解在点 ζ_k 的邻域内性状的定理:

定理 2 当 z 沿着各种不同的路线趋近边界函数 $u(\zeta)$ 的间断点 ζ_k 时,广义狄利克雷问题的解 $u(z)$,可以趋于在 $u^-(\zeta_k)$ 与 $u^+(\zeta_k)$ 之间的任何一个极限.

实际上,设 z 沿着一条路线趋于 ζ_k,而这条路线在点 ζ_k 处的切线同 x 轴形成角 θ,由公式(4)可以得出,这时 $u(z)$ 趋于极限

$$u_\theta(\zeta_k) = \tilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}\theta, \tag{5}$$

其中 $\tilde{u}(\zeta_k)$ 是当 $v \neq k$ 时所有函数 $u_v(z)$ 与 $U(z)$ 的和的极限值,这极限值同 z 趋于点 ζ_k 的方式无关. 特别是,当 z 沿着曲线 C 按负方向趋于点 ζ_k 时,我们有

$$u^+(\zeta_k) = \tilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^+,$$

所以(5)式可以改写成

$$u_0(\zeta_k)=u^+(\zeta_k)+\frac{h_k}{\alpha_k}(\theta-\varphi_k^+)$$

的形状. 由此便得出定理 2 的结论(参看图 97).

我们转到对于任意一个单连区域 D 的狄利克雷问题的解上来. 首先我们来考虑 D 是单位圆 $|z|<1$ 时的情形. 在这种情况下问题的解要以下面的引理为基础:

引理　设有实函数 $U(z,\zeta)$, 其中

$$z=re^{i\varphi},\ \zeta=e^{it},\ 0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\varphi,\ t<2\pi,$$

这实函数 $U(z,\zeta)$

1) 是非负连续函数,

2) 对于任何一个 z 都有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(z,\zeta)dt=1,\tag{6}$$

3) 当 $z\to\zeta_0=e^{it_0}$ (ζ_0 是单位圆周上的任意一个点)而且 $\zeta\neq\zeta_0$ 时, 函数 $U(z,\zeta)$ 趋于 0, 并且关于 ζ 是一致的*.

那么对于任何一个具有第一类间断点的逐段连续的实函数 $u(\zeta)$, 在它的每一个连续点 ζ_0 处, 都存在极限

$$\lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)U(z,\zeta)dt=u(\zeta_0).\tag{7}$$

要证明这个引理, 我们首先利用条件 2), 把(7)式左端中的积分同它的假定的极限之间的差, 表示成下列形状:

$$\Delta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{u(\zeta)-u(\zeta_0)\}U(z,\zeta)dt.$$

给定任意一个正数 $\varepsilon>0$, 利用 $u(\zeta)$ 在点 ζ_0 处的连续性, 总可以选取一个 $\delta>0$, 使得当 $|t-t_0|<2\delta$ 时, 都有

$$|u(\zeta)-u(\zeta_0)|<\varepsilon$$

(图 98). 于是我们有

$$\Delta=\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|<2\delta}+\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|\geqslant 2\delta},$$

式中的那两个积分是沿着单位圆周上的两段弧来取的, 在这两段弧上的点的辐角, 分别满足其所相应的不等式.

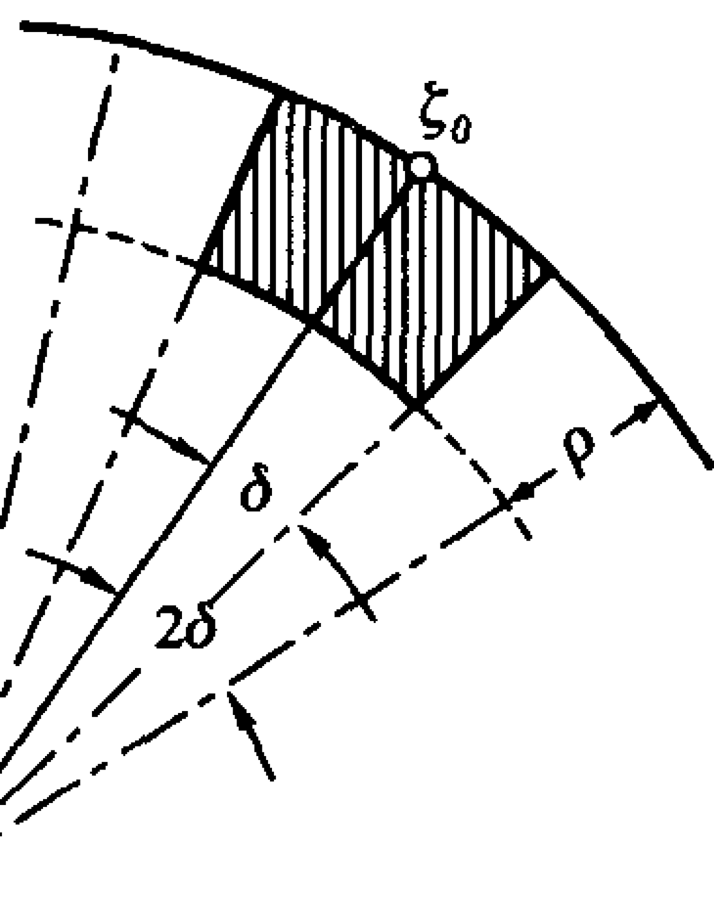


图 98

* 条件 3)的确切意义如下: 对于任何一个 $\varepsilon>0$, 我们总可以找到两个数 $\rho<1$ 及 $\delta>0$, 使得在 $r>1-\rho$ 和 $|\varphi-t_0|<\delta$ 时, 对于一切满足不等式 $|t-t_0|>2\delta$ 的 t 来说, 不等式

$$0\leqslant U(z,\zeta)<\varepsilon$$

都必定成立.

对于其中的第一个积分,应用数学分析中所熟知的中值定理*,然后再利用条件 1)与 2),我们便得出

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|<2\delta}|u(\zeta)-u(\zeta_0)|U(z,\zeta)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|t-t_0|<2\delta}U(z,\zeta)dt$$

$$<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(z,\zeta)dt=\varepsilon. \tag{8}$$

现在设 $|\varphi-t_0|<\delta$,于是对于区间 $|t-t_0|>2\delta$ 中所有的 t 值,我们有 $|\varphi-t|>\delta$,并且根据条件 3),总可以找到一个正数 $\rho<1$,使得对所有这样的 t 以及 $r>1-\rho$ 来说,不等式 $U(z,\zeta)<\varepsilon$ 都成立(参看上页脚注 *).因此,对于在图 98 中用斜线标出的那个区域(即,$|\varphi-t_0|<\delta, r>1-\rho$)内所有的 z 来说,都将有:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|>2\delta}|u(\zeta)-u(\zeta_0)|U(z,\zeta)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot 2M(2\pi-2\delta)<2\varepsilon M, \tag{9}$$

其中的 M 是 $|u(\zeta)|$ 在圆周上的最大值.把所得的这两个不等式(8)与(9)联合起来,我们便得出:对于图 98 中用斜线标出的那个区域内所有的 z 来说,都有 $|\Delta|\leqslant(1+2M)\varepsilon$,所以引理便已经证明了.

我们转到对于圆的狄利克雷问题的解上来,为此,我们注意,引理中的那个函数 $U(z,\zeta)$,可以由几何方法得到——将它看成是把圆 $|z|<1$ 映到右半平面 $\mathrm{Re}\, w>0$ 上去的共形映射的实数部分

$$U(z,\zeta)=\mathrm{Re}\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}. \tag{10}$$

事实上,对于这个函数来说,引理中的性质 1)与 3)显然成立,而性质 2)则可以由区分出等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}=1$$

的实数部分而得到,这等式很容易根据 23 目中的留数定理来证明(函数 $\frac{\zeta+z}{(\zeta-z)\zeta}$ 当 $z\neq 0$ 时在单位圆内有两个极点:具有留数 -1 的 $\zeta=0$ 与具有留数 2 的 $\zeta=z$;当 $z=0$ 时等式自然得出).

现在已经不难证明:泊松给出了对于单位圆的广义狄利克雷问题的解(泊松(Poisson)**,1823)

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}dt \quad (z=re^{i\varphi}) \tag{11}$$

事实上,由积分(11)所定出的那个函数 $u(z)$,是函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt+iC \quad (\zeta=e^{it}) \tag{12}$$

---

* 参看 Фихтенгольц,卷二,第 133 页;在这里可以应用这个定理,因为我们有 $U(z,\zeta)\geqslant 0$.

** 泊松(Poisson,1781—1840),法国物理学家和数学家.

的实数部分. 根据第 16 目中的定理 4, 函数 $f(z)$ 在单位圆内是解析的, 所以, $u(z)$ 在单位圆内是个调和函数. 它是有界的, 因为, 由(11)式可以得出

$$|u(z)| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}dt = M,$$

其中 M 是 $|u(\zeta)|$ 在单位圆周上的最大值(我们利用了函数(10)的性质 2)). 最后, 根据上面的引理, 当 z 趋于 $u(\zeta)$ 的任何一个连续点 ζ 时, 函数 $u(z)$ 趋于 $u(\zeta)$. 这便是我们所需要证明的.

现在不难证明, 对于任意的单连通区域, 广义狄利克雷问题也是可以解的.

定理 3 对于任何一个单连通区域 D, 与任何一个具有第一类间断点的逐段连续的边界函数 $u(\zeta)$, 广义狄利克雷问题的解都存在.

事实上, 根据第 28 目中的基本定理, 必定有一个把区域 D 映到单位圆 $|w|<1$ 上去的共形映射 $w=w(z)$ 存在. 在 D 的边界上给出逐段连续的那些值 $u(\zeta)$, 在这映射下被变换成在单位圆周上逐段连续的值

$$u[z(\omega)] = U(\omega),$$

其中函数 $z=z(w)$ 是 $w=w(z)$ 的反函数. 依据这些边界值, 可以借助泊松积分(11)来构成一个在圆 $|w|<1$ 内的调和函数 $U(w)$. 于是, 根据第 41 目中的定理 11, 函数

$$u(z) = U[w(z)] \tag{13}$$

是一个在区域 D 内的调和函数. 它同 $U(w)$ 一样是有界的, 并且, 当 z 趋于所给函数 $u(\zeta)$ 的一个连续点 ζ 时, 它趋于值 $u(\zeta)=U[w(\zeta)]$, 因为这时点 $w=w(z)$ 趋于函数 $U(\omega)$ 的连续点 $\omega=w(\zeta)$. 因此, 函数(13)给出了对于区域 D 的广义狄利克雷问题的解答. 定理 3 已经证明了.

如果区域 D 的边界 C 没有无穷远分支, 并且还具有连续的曲率的话, 那么广义狄利克雷来问题的解, 便可以用一个独自的公式来表达. 为了要得出这个公式, 我们固定区域 D 内的任意一个点 z_0, 并且用

$$w = f(z;z_0),\ f(z_0;z_0)=0 \tag{14}$$

来表示把 D 映射到单位圆 $|w|<1$ 上去的那个函数. 同在证明定理 3 时一样, 当变换到 w 平面上来之后, 我们便可以利用泊松积分来表达出狄利克雷问题的解. 就特例来讲, 仍旧沿用那个证明中所引入的那些记号, 在圆心 $w=0$ 处我们得到

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\omega)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|=1} U(\omega)d\sigma, \tag{15}$$

其中 $\omega=e^{i\tau}$, 又 $d\sigma=d\tau$ 是圆周 $|\omega|=1$ 的弧长单元.

根据第 29 目中的定理 1, 在我们的这些条件之下, 函数(14)在边界上具有连续导数, 因此

$$d\sigma = |f'(\zeta;z_0)|ds,$$

其中 ds 是 C 的对应于 $d\sigma$ 的弧长单元. 我们用 dn 来表示 C 的内法线的长度单元, 用

$-d\rho$ 来表示圆周$|\omega|=1$的半径的对应于 dn 的长度单元,于是有

$$|f'(\zeta;z_0)|dn=-d\rho.$$

因为在 C 上$\rho=|f(\zeta;z_0)|=1$,所以可以写成 $d\rho=\dfrac{d\rho}{\rho}=d\ln\rho$ 和

$$|f'(\zeta;z_0)|=-\frac{d\rho}{dn}=-\frac{d\ln\rho}{dn}=\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{\rho},$$

其中$\dfrac{\partial}{\partial n}$表示按照$C$的内法线方向所取的导数.把这式子代入前面所得到的 $d\sigma$ 的表达式中去,我们便得出

$$d\sigma=\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|f(\zeta;z_0)|}ds. \tag{16}$$

现在就剩下要在(15)式中返回到变量 z 上去了.考虑到(14)式的规定,对应于点 $w=0$ 的是点 z_0,再利用关系式(16),我们便得到

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|f(\zeta;z_0)|}ds. \tag{17}$$

函数

$$g(z;z_0)=\ln\frac{1}{|f(z;z_0)|} \tag{18}$$

称作对于区域 D 的格林(Green)函数,显然,这函数在 D 内除掉点 z_0处以外是处处调和的,在点 z_0处它有一个极点.把这个函数引入(17)式,并且把 z_0换成 z,我们便得出了所要找的广义狄利克雷问题的解的公式(G.格林(G.Green*),1928)

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta;z)}{\partial n}ds \tag{19}$$

$\left(\dfrac{\partial}{\partial n}\text{是沿着内法线方向所取的导数}\right)$.

格林公式把对某一个区域 D 的狄利克雷问题的解,通过把 D 共形映射到单位圆上去的一个函数的对数来表达,也就是说,它把解狄利克雷问题,化成共形映射的问题.反过来也可以证明:如果已经知道了对某一个区域 D 的狄利克雷问题的解,便可以构造一个把这区域映到单位圆上去的共形映射.

事实上,根据基本定理,这样的一个映射 $w=f(z;z_0)$,$f(z_0;z_0)=0$ 必定存在.先姑且假定我们已知道了这个映射,而考虑函数

$$F(z)=\frac{f(z;z_0)}{z-z_0},F(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z;z_0)}{z-z_0}=f'(z_0;z_0).$$

显然,这函数在区域 D 内是解析的,并且处处都不等于 0(函数 $f(z;z_0)$只有 $z=z_0$ 时方等于 0,但由于映射是共形的,$f'(z_0;z_0)\neq0$).所以,函数 $U(z)=\ln|F(z)|$在

* G.格林(George Green,1793—1841),英国数学家.

D 内是个调和函数. 它在区域 D 的边界 C 上的值

$$U(\zeta)=\ln\left|\frac{f(\zeta;z_0)}{\zeta-z_0}\right|=\ln\frac{1}{|\zeta-z_0|}$$

与函数 $f(z;z_0)$ 的形状无关, 因为在 C 上 $|f(\zeta;z_0)|=1$.

现在假设, 函数 $f(z;z_0)$ 是未知的. 根据已给出的调和函数的边界值 $U(\zeta)$, 我们可以唯一地重新恢复 $U(z)$ 在 D 的内部的值(狄利克雷问题). 然后, 我们再借助积分法来建立其共轭的调和函数 $V(z)$, 求出它可以精确到相差一个常数项 α. 这样, 我们便求得函数

$$\operatorname{Ln} G(z)=U(z)+iV(z)+i\alpha,$$

随后可以得出所求的共形映射

$$f(z;z_0)=(z-z_0)e^{G(z)}=e^{i\alpha}(z-z_0)e^{U(z)+iV(z)}. \tag{20}$$

这个映射的确定可以精确到作一次任意旋转, 这正与所取的规定条件相符.

因此, 把一个区域映到单位圆上去的共形映射的问题, 与对这同一区域的狄利克雷问题是等价的; 它们可以借助简单的微分和积分运算彼此转化.

把一个区域 D 映到带形 $0<v<1$ 上去的映射

$$w=f(z),\ f(z_1)=-\infty,\ f(z_2)=0,\ f(z_3)=\infty$$

的问题, 还可以更简单地化成广义狄利克雷问题. 我们先按照下述边值条件来求出一个调和函数 $v(z)$: 在 D 的边界 C 的弧 $z_1z_2z_3$ 上 $v(\zeta)=0$, 而在 C 的其他部分上 $v(\zeta)=1$. 然后求出一个与它共轭的调和函数 $u(z)$, 使其满足条件 $u(z_2)=0$. 函数

$$f(z)=u(z)+iv(z)$$

便是所求的那个映射.

44. 例题. 补充

(1) 施瓦茨积分　由上一目中的积分(12)所确定的函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt+iC\quad(\zeta=e^{it}), \tag{1}$$

其中 C 是一个实数常量, 解下述问题: 求出一个在圆 $|z|<1$ 内解析的函数 $f(z)$, 使得在圆周上它的实数部分在函数 $u(\zeta)$ 的每一个连续点 ζ 处所取的值, 是已知值 $u(\zeta)$ (H. 施瓦茨, 1869).

事实上, 根据狄利克雷问题的解的唯一性定理, 函数 $f(z)$ 的实数部分 $u(z)$ 可以由它本身的边界值完全确定, 由柯西 - 黎曼方程又可以得出, 这时它的虚数部分 $v(z)$, 在可以相差一个常数项的范围内也已经被确定. 因此, 当 C 取各种不同的值时, (1) 式便包含了所提问题的一切解.

在这式中令 $z=0$, 并利用中值定理, 这时得到带积分的那一项等于 $u(0)$, 因此我们能确信常数 $C=v(0)$.

在施瓦茨积分中区分出虚数部分, 我们便得到调和函数 $v(z)$ 的一个用它的共轭函数的边界值来表示的表达式

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{2r\sin(\varphi-t)}{1-2r\cos(\varphi-t)+r^2}dt+C. \tag{2}$$

如果使用第 41 目中按自己的实数部分来复原解析函数的方法(第 41 目中的(9)式),可以得出一个解这个问题的积分,也就是施瓦茨积分问题,但是与上面这个积分有些不同.与第 41 目中所说的相对应,我们令 $z_0=0$.于是有

$$r^2=x^2+y^2=\frac{z^2}{4}-\frac{z^2}{4}=0,$$

$$2r\cos(\varphi-t)=\frac{re^{i\varphi}}{e^{it}}+\frac{re^{it}}{e^{i\varphi}}=\frac{z}{\zeta}+\frac{r^2\zeta}{z}=\frac{z}{\zeta},\ dt=-i\frac{d\zeta}{\zeta}$$

(同前面一样,我们令 $z=re^{i\varphi},\zeta=e^{it}$),把这个代入泊松积分

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-t)}dt,$$

再根据第 41 目中的(9)式,我们便得出

$$f(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-\overline{f(0)}=\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=1} u(\zeta)\cdot\frac{-id\zeta}{\zeta\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)}-\overline{f(0)},$$

或者,最后化简得

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\overline{f(0)}. \tag{3}$$

(2) 对于半平面的狄利克雷问题 设在实轴上给定了一个仅具有有限多个间断点的有界函数 $u(t)$,设在 $t\to\pm\infty$时 $u(t)$的极限存在和有限.为了要想求出在实轴上取这些已知值而在上半平面内调和的那个函数 $u(z)$在点 z 处的值,我们作一个把半平面 $\operatorname{Im}\zeta>0$ 映到圆$|\omega|<1$ 上去的共形映射

$$\omega=\frac{\zeta-z}{\zeta-\bar{z}}.$$

因为这时点 z 被变换成$\omega=0$,所以根据中值定理有

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\omega)d\tau, \tag{4}$$

其中 $u[\zeta(\omega)]=U(\omega)$,而 τ 是在圆周上的点的辐角

$$e^{i\tau}=\frac{t-z}{t-\bar{z}}.$$

求最后这个等式的导数,我们得到

$$e^{i\tau}d\tau=\frac{2y}{(t-\bar{z})^2}dt,$$

由此便有

$$d\tau=\frac{2ydt}{(t-z)(t-\bar{z})}=\frac{2ydt}{(t-x)^2+y^2}.$$

在(4)中代回到原来的变量 z 和 t 上去,结果我们便得出了对于上半平面的泊松积分

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cdot\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}. \tag{5}$$

因为,显然

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2}=\mathrm{Re}\,\frac{1}{i(t-z)},$$

所以可以对把半平面的**施瓦茨积分**写成

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{dt}{t-z}+iC, \tag{6}$$

其中 C 为实常量.但是,必须指出:要想积分(6)收敛,单知道对于有界函数 $u(t)$ 积分(5)收敛还是不够的*.要这个积分收敛,只需要譬如,当 $|t|\to\infty$ 时,函数 $u(t)$ 趋于 0 的速度不比 $\frac{1}{|t|^{\alpha}}$ 慢便够了,其中 $\alpha>0$ 是任意一个常数.

我们来举一些例子.根据(5)式,我们直接得到一个在上半平面内的调和函数,这函数在实轴的一段线段 (α,β) 上等于 1,而在实轴的其余部分上等于 0:

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{\beta-x}{y}-\arctan\frac{\alpha-x}{y}\right).$$

如果引进由 $z-\alpha$ 与 $z-\beta$ 这两个向量与 x 实轴所形成的那两个角 φ_α 与 φ_β,便可以写成

$$u(z)=\frac{\varphi_\beta-\varphi_\alpha}{\pi}=\frac{\omega}{\pi} \tag{7}$$

(从图 99 中可以看出:$\varphi_\beta=\varphi_\alpha+\omega$).因此,函数 $u(z)$ 就等于由点 z 对线段 $\overline{\alpha\beta}$ 所作的那个角 ω 被 π 除后的值.在这里施瓦茨公式也可以适用,并由这公式得出

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{\pi i}\ln\frac{\beta-z}{\alpha-z}. \tag{8}$$

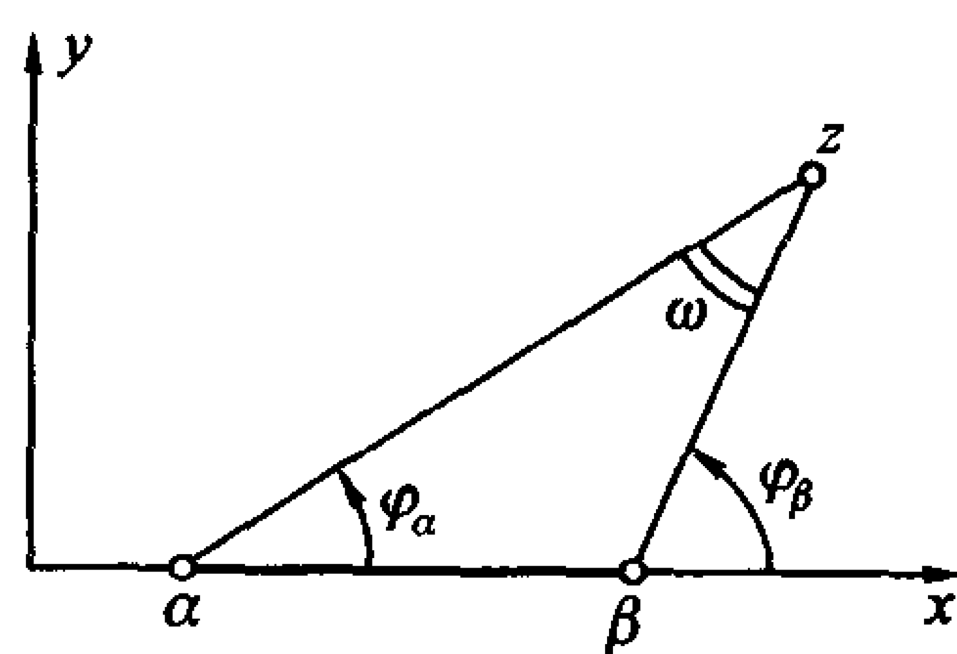


图 99

现在设已经在实轴上给定了 n 个点

$$a_1,a_2,\cdots,a_n \quad (-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<\infty),$$

要求得出一个在上半平面内的调和函数 $u(z)$,使它在那些线段 $(-\infty,a_1),(a_1,a_2),\cdots,(a_n,\infty)$ 上,分别取常数值 $u_0,u_1,\cdots,u_n$.这问题的解可以应用公式(7)来得出:

$$u(z)=\frac{\varphi_1u_0}{\pi}+\frac{u_1}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)+\cdots+\frac{u_n}{\pi}(\pi-\varphi_n),$$

或者,在重新集项之后,得到

$$u(z)=\frac{\varphi_1}{\pi}(u_0-u_1)+\frac{\varphi_2}{\pi}(u_1-u_2)+\cdots+\frac{\varphi_n}{\pi}(u_{n-1}-u_n)+u_n. \tag{9}$$

* 这解释如下,(6)中被积函数的虚数部分的积分收敛比积分(5)差.

(3) 施瓦茨－克利斯托弗积分的导出 作为应用所得到的公式的例子，我们用这公式来导出施瓦茨－克利斯托弗积分，这比在第 37 目中要简单得多．我们仍然沿用在第 37 目中所用的那些记号．考虑在上半平面内调和的函数

$$u(z)=\arg f'(z)=\operatorname{Im}\ln f'(z),$$

由共形映射的导数的几何意义，我们得出：这函数在线段$(-\infty,a_1),(a_1,-a_2),\cdots,(a_n,\infty)$上，分别取常数值 $u_0,u_1,\cdots,u_n$，因为，这些线段在映射下都变换成直线段——多角形的边．在线段$(-\infty,a_1)$与(a_n,∞)上，值 $u_0=u_n=\alpha-\pi=\theta$，这里的 α 是线段 A_nA_1 同 u 轴所成的角．当通过点 a_k 时，函数 $u(t)$ 的值增加$(1-\alpha_k)\pi$，因为线段 A_kA_{k+1} 是由线段 $A_{k-1}A_k$ 按逆时针方向旋转这一个角度而得到的（参看图 80）．因此，$u_{k-1}-u_k=(\alpha_k-1)\pi$．按照公式(9)，我们这时求得

$$u(z)=(\alpha_1-1)\varphi_1+(\alpha_2-1)\varphi_2+\cdots+(\alpha_n-1)\varphi_n+\theta=\theta+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\arg(z-a_k).$$

根据这已知的虚数部分，便容易复原那个解析函数

$$\ln f'(z)=\ln C_0+i\theta+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\ln(z-a_k),$$

再从这式子写成指数形式，然后积分，我们就得出了所求的共形映射

$$f(z)=C_0e^{i\theta}\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_1 \tag{10}$$

（C_0是一个正的常量，C_1是一个复数常量）．

(4) 对于带形 $-h<\operatorname{Im}z<h$ 的施瓦茨积分 对于圆$|w|<1$的施瓦茨积分的形状为

$$F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\omega)\cdot\frac{\omega+w}{\omega-w}d\tau+iC, \tag{11}$$

其中 $\omega=e^{i\tau}$（参看(1)式）．我们来考虑把圆$|w|<1$映到带形 $-h<\operatorname{Im}z<h$ 上去的那个共形映射

$$w=w(z)=\operatorname{th}\frac{\pi z}{4h},$$

这个映射把下半圆周与上半圆周分别变换成带形的下沿与上沿（参看第 33 目中的(5)式）．我们记 $F[w(z)]=f(z),U[w(z)]=u(z)$．在 $\zeta=t-hi$ 时带形的下沿上有

$$\omega=e^{i\tau}=\operatorname{th}\frac{\pi}{4h}(t-hi)=\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2h}-i}{\operatorname{ch}\frac{\pi i}{2h}}\quad(-\pi<\tau<0),$$

由此得出

$$\tau=\frac{1}{i}\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2h}-i}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}},\quad d\tau=\frac{\pi dt}{2h\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}}.$$

类似地,在带形的上沿上有

$$\omega = e^{i\tau} = \text{th}\,\frac{\pi}{4h}(t+hi) = \frac{\text{sh}\,\frac{\pi t}{2h} + i}{\text{ch}\,\frac{\pi t}{2h}} \quad (0<\tau<\pi),$$

由此得出

$$d\tau = -\frac{\pi dt}{2h\,\text{ch}\,\frac{\pi t}{2h}}.$$

把这代入(11)式中,我们有

$$f(z) = \frac{1}{4h}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u_-(t)\,\frac{s_t - i + t_z\cdot c_t}{s_t - i - t_z\cdot c_t}\cdot\frac{dt}{c_t} + \int_{-\infty}^{\infty} u_+(t)\,\frac{s_t + i + t_z\cdot c_t}{s_t + i - t_z\cdot c_t}\cdot\frac{dt}{c_t}\right\} + iC,$$

其中 $u_\pm(t)$表示 $u(\zeta)$在点 $\zeta = t\pm ih$ 处的值,s_t 与 c_t 表示$\frac{\pi t}{2h}$的双曲正弦与双曲余弦,$t_z = \text{th}\,\frac{\pi z}{4h}$.再作一些简单的变换之后,结果我们最终得出*

$$f(z) = \frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_+(t)+u_-(t)}{\text{ch}\,\frac{\pi}{2h}(t-z)}dt - \frac{i}{4h}\text{sh}\,\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_+(t)-u_-(t)}{\text{ch}\,\frac{\pi t}{2h}\text{ch}\,\frac{\pi(t-z)}{2h}}dt + iC. \tag{12}$$

对于带形 $0<y<1$,这公式也可以改写成

$$f(z) = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_0^{(t)}\,\text{cth}\,\frac{\pi(t-z)}{2}dt + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)\,\text{th}\,\frac{\pi(t-z)}{2}dt + C_1. \tag{13}$$

(5) 契硅蒂公式(1921年)　这公式给出了一个共形映射 $w=f(z)$的表达式,这个映射把圆$|z|<1$映到任意一个由周线 C 所围成的单连通区域D上去,只要在圆周的每一个点 $z=e^{it}$处,C 在对应于z 的点w 处的切线的那个倾斜角 $\vartheta=\vartheta(t)$已经知道.设 $dz = ie^{it}dt$ 与$dw = |dw|e^{i\vartheta}$是圆周与曲线C 的在这个共形映射下互相对应的单元,于是在圆周上

$$i\frac{dw}{dz} = e^{i(\vartheta - t)}\cdot\frac{|dw|}{dt}.$$

由于 $f(z)$实施一个共形映射,所以$\frac{dw}{dz}\neq 0$ 和函数 $-i\ln\left[i\frac{dw}{dz}\right]$在圆$|z|<1$ 内是正则的,并且按照上面的结果,它的实数部分在圆周$|z|=1$ 上等于 $\vartheta - t$.另一方面,由

* 这公式通常叫做帕拉丁尼公式.但是帕拉丁尼发表这公式在1915年,而当时这公式已经以稍加改变的形式包含在格拉维(Л. А. Граве)的著作"论在绘制地图的数学理论中的一些基本问题"(彼得堡,1896)中了.

初等几何学上的理由显然有：在这圆周上

$$\operatorname{Re}\{-i\ln[-(1-z)^2]\}=\pi+2\arg(1-z)=t$$

（见图 100，其中 $\arg(1-z)$ 被表示成 φ）. 所以，在圆 $|z|<1$ 内正则的函数

$$g(z)=-i\ln\left[-i(1-z)^2\frac{dw}{dz}\right] \tag{14}$$

的实数部分，在圆周 $|z|=1$ 上等于 ϑ. 如果函数 $\vartheta(t)$ 已经知道，那么函数 $g(z)$ 便可以借助施瓦茨积分而求得

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vartheta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt+iA, \tag{15}$$

其中 A 是一个实数常量. 知道了 $g(z)$ 之后，我们就可以由(14)式来得出所求的那个共形映射

$$w=f(z)=i\int_{z_0}^{z}\frac{e^{ig(z)}dz}{(1-z)^2}+w_0. \tag{16}$$

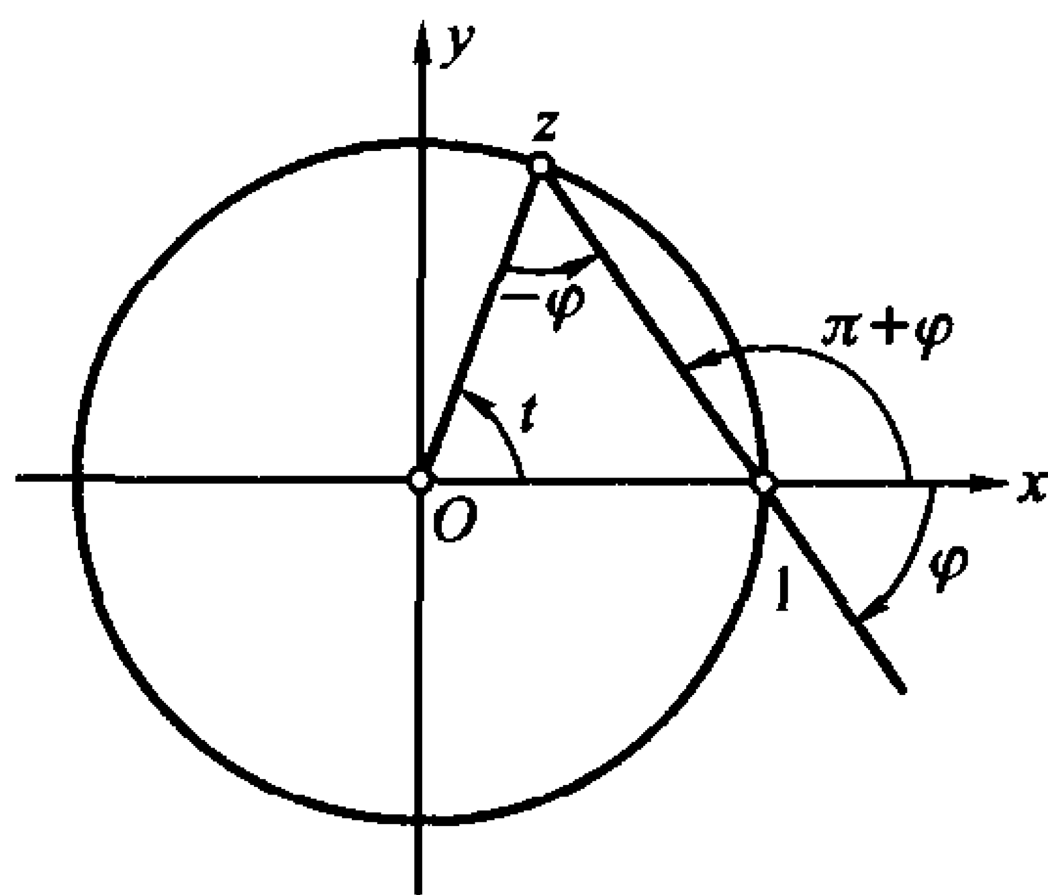


图 100

一般说来，函数 $\vartheta(t)$ 是未知的，所以契磋蒂公式(16)实际上并没有给出共形映射问题的一个有效的解. 但是，只要 $\vartheta(t)$ 可以从某一种考虑中求出，这个公式便显得非常有用. 例如，在把圆映射成多角形 $\vartheta(t)$ 的问题中，在圆周的每一段对应于多角形的一条边的弧上，$\vartheta(t)$ 都等于一个已知常量，所以施瓦茨－克利斯托弗公式可以很容易地从契磋蒂公式得出.

(6) 诺伊曼问题　同狄利克雷问题一样，在有些应用中，考虑所谓**第二边值问题**，也叫做**诺伊曼***(Neumann)**问题**它是很重要的.

求区域 D 内的一个调和函数 $u(z)$，已知在 D 的边界 C 上它的法线方向的导数的值

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha=g(\zeta), \tag{17}$$

以及 $u(z)$ 在区域 $\bar{D}$ 的某一个点 z_0 处的值 $u(z_0)$.

为了确定起见，我们假定：在(17)式中考虑的是外法线，α 表示这法线与 x 轴所成的角. 函数 $g(\zeta)$ 在 C 上可以有有限多个第一类间断点，函数 u 与它的一阶偏导数都假定是有界的.

由第 41 目中的定理 12 可以得出：要诺伊曼问题可解，必须关系式

$$\int_C g(\zeta)ds=0 \tag{18}$$

被满足. 我们来证明诺伊曼问题的解的唯一性. 首先注意，利用一个辅助的共形映射 $z=f(z_1)$，把上半平面 $\operatorname{Im} z_1>0$ 映到区域 D 上去，这就可以把对于 D 的诺伊曼问题，化成对于上半平面的诺伊曼问题. 事实上，设 $u(z)$ 是对于区域 D 具有已知边界

* 卡尔·诺伊曼(Karl Neumann, 1832—1925)，德国数学家.

函数$g(\zeta)$的诺伊曼问题的解.函数

$$u_1(z_1)=u[f(z_1)]$$

在上半平面内是调和的.由于在这个共形映射下,C 的内法线方向变换成轴 $y_1=\operatorname{Im} z_1$的正方向(除了曲线 C 的按我们一般假设为有限多个角点处外,处处都是如此),又由于法线的长度单元 dn 与它所对应的长度单元dy_1的比等于这映射的延伸系数,即,等于$|f'(x_1)|$,所以,在轴 $x_1=\operatorname{Re} z_1$上我们有

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{f(x_1)}\cdot|f'(x_1)|=g[f(x_1)]\cdot|f'(x_1)|=g_1(x_1).$$

函数 $g_1(x_1)$在 x_1轴上,除了对应于曲线 C 的角点的那些有限多个点和$g[f(x_1)]$的有限多个间断点处外,是处处连续的.并且,可以由这共形映射与那个已给边界函数来完全确定.现在如果不知道 $u(z)$,而对上半平面 $\operatorname{Im} z_1>0$ 以及边界函数 $g_1(x_1)$来解出诺伊曼问题,那么函数 $u_1[\varphi(z)]$——其中 $z_1=\varphi(z)$是 $z=f(z_1)$的逆映射——显然将是对于区域 D 的诺伊曼问题的解.

上面所作的讨论说明了,在证明诺伊曼问题的解的唯一性时,可以只限于考虑 D 是半平面时的情形.假设有诺伊曼问题的两个解 $u_1(z)$与 $u_2(z)$存在,那么,它们的差

$$u(z)=u_1(z)-u_2(z)$$

在上半平面内是一个调和函数,并且,在 x 轴上它的法线方向导数$\frac{\partial u}{\partial y}=0$,而且在某一个点 z_0处 $u(z_0)=0$.函数$\frac{\partial u}{\partial y}$在上半平面内是一个有界调和函数,并且在 x 轴上等于 0,这就是说,它是一个对于上半平面和具有等于 0 的边界值的狄利克雷问题的解.因为这个狄利克雷问题的解是一个恒等于 0 的函数,所以$\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$.而此时 $u(z)$应当是一个常数,并且按照条件 $u(z_0)=0$,它必定等于 0.诺伊曼问题的解的唯一性已经得证.

如果再加上一个补充的假定,设偏导数在 $\bar{D}$ 内是连续的,那么,*求诺伊曼问题的解,可以化成求共轭调和函数的狄利克雷问题的解.*

事实上,设 $v(z)$是一个与 $u(z)$共轭的调和函数.在曲线 C 的点处,根据对于方向 s 与 n 写出的柯西-黎曼条件(见第 5 目末),我们有

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial n}=g(\zeta).$$

知道了沿曲线 C 的$\frac{\partial v}{\partial s}$,我们便可以用直接求积分的方法来定出

$$v(\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\partial v}{\partial s}ds=\int_{\zeta_0}^{\zeta}g(\zeta)ds.$$

现在,在区域 D 内求 $v(z)$,便化成狄利克雷问题了.知道了 $v(z)$之后,我们只需用简单的求积分,便可以得出所求的函数 $u(z)$.

对于 D 是单位圆的情形,容易得到给出诺伊曼问题的解的公式.事实上,设 $f(z)=u+iv$ 将是该问题的解.令 $z=re^{it}$,显然,我们有

$$f'(z)=\frac{1}{e^{it}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right) \quad 或 \quad \frac{z}{r}f'(z)=\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}.$$

由此看出,在单位圆周上解析函数 $zf'(z)$的实数部分的值与给出的函数 $\frac{\partial u}{\partial r}=g(\zeta)$重合.因此 $zf'(z)$在借助于施瓦茨积分(3)下可以写成

$$zf'(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

(我们顾及到所考察的函数在坐标原点的值等于 0).通过积分我们得到

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{dz}{z}\int_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \tag{19}$$

改变积分次序,并且计算初等积分

$$\int\frac{dz}{z(\zeta-z)}=-\frac{1}{\zeta}\ln(\zeta-z)+\frac{1}{\zeta}\ln z+\text{const},$$

我们求出

$$f(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{\zeta}\ln(\zeta-z)d\zeta+\frac{\ln z}{\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{\zeta}d\zeta+\text{const},$$

或者,考虑到,根据式(18)

$$\int_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{\zeta}d\zeta=i\int_0^{2\pi}g(e^{it})dt=0,$$

我们得到函数 $f(z)$的表达式

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{it})\ln(e^{it}-z)dt+\text{const}. \tag{20}$$

分出实数部分,给出所求公式

$$u(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{it})\ln|e^{it}-z|dt+\text{const} \tag{21}$$

(迪尼(Dini)).

45. 网格法 我们在这里将介绍一种最常用的解狄利克雷问题的近似方法,称为**网格法**.网格法的基础是柳斯捷尔尼克在 1924 年给出的.这个方法也可以用来解许多别的数学物理问题.我们现在来说明这个方法的思想,至于细节方面,我们介绍读者去看专门的文献.

这个方法建立在用对应的有限差的比值,来代替拉普拉斯方程中的导数.对充分小的值 h 来说,函数 $u(x,y)$的偏导数可以用差的比值来近似地代替

$$u_x\approx\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h},\quad u_y\approx\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}. \tag{1}$$

对于二阶导数,也可以写成同样的近似表达式,例如

$$u_{xx}\approx\frac{1}{h}\left\{\frac{u(x+2h,y)-u(x+h,y)}{h}-\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}\right\}$$

$$=\frac{1}{h^2}\{u(x+2h,y)-2u(x+h,y)+u(x,y)\}.$$

为了更加对称起见,我们用 x 来代替 $x+h$,得到

$$u_{xx}\approx\frac{1}{h^2}[u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)],\tag{2}$$

类似地,

$$u_{yy}\approx\frac{1}{h^2}[u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)].\tag{3}$$

因此,拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

可以用差分方程

$$u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)-4u(x,y)=0\tag{4}$$

来近似地代替.方程(4)关联着所求函数在五个点处的值,这五个点的位置如图 101 中的白圆点所表示.

为了要用网格法来解狄利克雷问题,需要用格距为 h 的方格网把所给的区域 D 覆盖起来,如同在图 101 中所示的那样.网格区域的边界应该选择得使它与区域 D 的边界 C 接近得最密切,这时网格区域的界点,可以在 D 的外部,也可以在 D 的内部.函数 u 在曲线 C 上的那些已知值,可以借助插值法来转移到网格区域的边界点上去,因而,在这些边界点处可以认为 u 的值是已知的.

在网格内部的那些格点处,u 的值认为是未知的,要确定这些值,可利用线性方程组(4).解出这个方程组,我们便得到了狄利克雷问题的一个近似解,因为,Л. А. 柳斯捷尔尼克已经证明过,当 $h\to 0$ 时,差分方程式(4)的解收敛于一个调和函数 $u(x,y)$.这个命题的证明,读者可以在彼得罗夫斯基(И. Г. Петровскнй [1])书中找到.

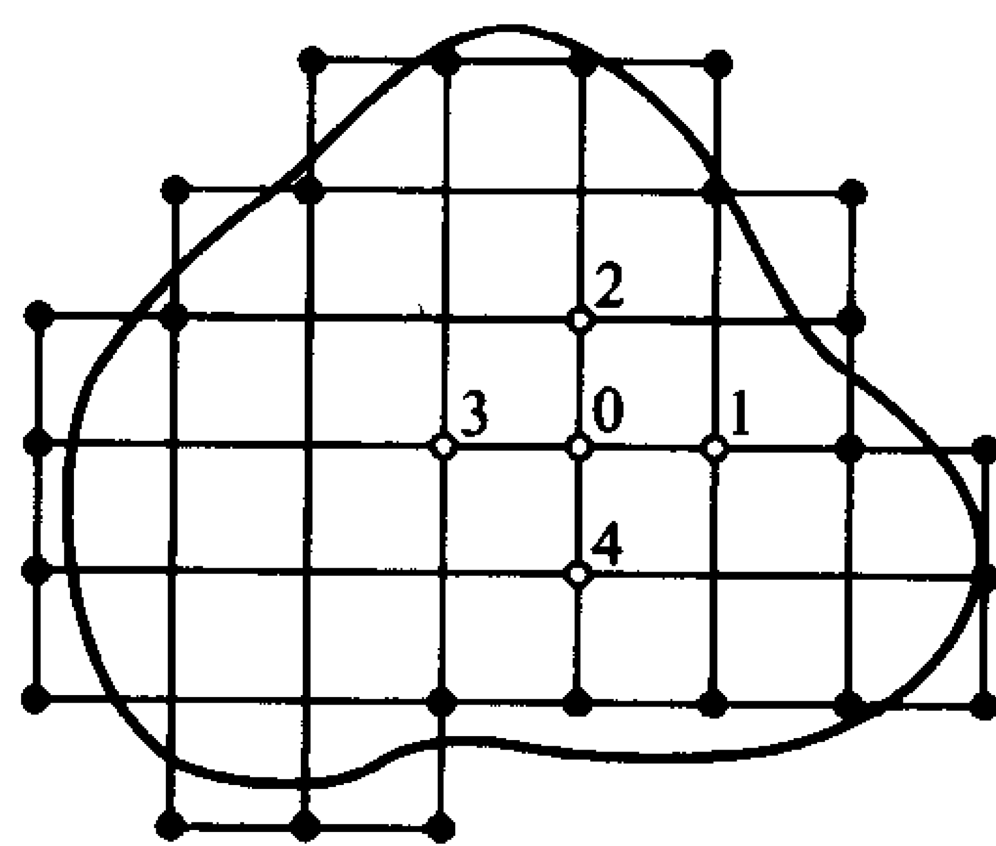


图 101

由于方程组(4)中的方程式个数很多,并且这方程组是对称的,所以它的解以利用迭代法来求为最方便.为此,我们首先把方程式(4)写成

$$u_0=\frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{4},\tag{5}$$

式中这些记号的意义从图 101 中可以明白地看出.于是,$u(x,y)$**在每一个格点处的值,总等于在其邻近的四个格点处的那四个值的算术平均值**.在此以后,任意给予我

们一组在网格的内部格点处的 u 的初始值(0 组),我们便可以求得这组值的那些算术平均值,这时,对于某一些格点,还必须利用到 u 的那些在边界格点处的已知值.所得到的这些算术平均值便给出了第一个近似解(1 组).然后再求这第一组值的那些算术平均值,对于有些格点还需要再利用 u 的已知边界值,这样我们便得到了第二个近似解(2 组),等等.把这个步骤继续进行下去,一直到从第 $n-1$ 组过渡到第 n 组时,在所需要的精确度的范围内已经不再有变动时为止.

按照迭代法实际进行计算依赖于所存在的计算工具的运用.最完美的工具是高速计算机,它们在十分短的时间内给出具有很高精度问题的解.

用手工或借助小机器(计算器型)来作计算,以准备足够多块的模板为较方便.零模板由与已知网格相似的一组网格构成,但是它的直线作在已知网格的那些直线的中间,它的格点位于已知网格的那些正方形的中心.模板上含有已知网格的边界点的那些正方形,都用粗线圈起来,并且在其中写上那些边界值.其余的那些模板,与零模板不同的地方,只是在其中切去了那些含有已知边界值的正方形.这些模板最好用蜡纸来制造.

计算按照下述的方式来进行:

(1) 把零模板上内部的那些方格,用 0-组的值来填上.要注意,这些值与真值越接近,迭代法过程便收敛得越快,所以,0-组的值的正确选择是有很大意义的.

(2) 把第一模板放在零模板的上面,使得相对应的方格彼此相叠,而把这模板上的方格,用 0-组的值的算术平均值来填上(那些留在外面,没有被第一模板所覆盖的边界值,也要计算在内).为了使进程加快,在计算算术平均值时,可以利用那些已经求得的 1-组的值.用蜡纸所做成的模板,对于这种步骤很适用,因为第一模板写好数字后,在其下面的那些在零模板上的数字几乎看不见了.

(3) 把第二模板放在零模板与第一模板的上面,第二模板上的方格,用 1-组的值的算术平均值来填上(考虑到边界值与那些已经求得的 2-组的值).对于第三模板,第四模板等等,也用同样的方式进行下去,一直到后面那块模板上的那些数字,在所给定的精确程度内,与在其前面的那块模板上的数字完全相同时为止.所得到的这组值,便是所求的.

我们已经说过,虽说从原则上看起来,对于任何一组的初始值,这迭代过程都能收敛*,可是毕竟它的收敛的速度是依赖于这组初始值与真值的接近程度的.如果问题的结果不要求很大的精确度(三位数字)的话,那么,要确定那组初始值,可以利用作图的方法.这方法是:把在曲线 C 上的那些已知值,利用轴测投影画成空圆(x,y,z)内的一条曲线 Γ 的形状,凭目测作一个经过这条曲线的曲面(最好把它想像作绷紧在 Γ 上的一层肥皂膜),然后从图形上来记下这曲面在网格的格点直上处的那些

* 这已经由 Л. Ю. Панов 在 Скарборо 的书"数学分析的数量方法(Чнсленцыс метолы математического анализа)"(ОНТИ,1934)的补充中证明了.

点的支距 z.

十分有效的是选择用某种更加简单的近似方法所得出的同一问题的解来作迭代法的初始值组.

这些方法中占据特殊地位的是所谓的*相似方法*，它建立在使用模拟装置基础上，在这些模拟装置中的物理过程由拉普拉斯方程描述.最常用的相似之一——电子相似，它建立在导体物质的很薄的平面层中的电场的势能满足这一方程的基础上.

为了实际施行这一方法，通常用某种绝缘物质制作区域的边界，应当对这边界解狄利克雷问题，并且把这边界固定在槽中，使得区域内部可以涂一层电介质.譬如，可以用蜡泥沿着区域边界的周线固定用厚度为 1～2 cm 的有伸缩性的绝缘纸构成的壁，并且给组成区域涂上一层弱盐水.现在剩下的是把与已知边界条件相适应的势能传递给边界点——做这件事可以借助于固定在壁上的用导纸或薄金属板组成的端子，向这些端子输送电压.区域内势能的分布可以在针形探测器帮助下加以研究.在好的模型制作下和保持特殊措施去减少误差下用这方法可以获得精度到 1%～2%.

取代电槽，可以利用导电纸(例如，盖上一层薄薄石墨的纸)，按给出的区域的形状切割下一块，并且向它的边界输入与给定值相对应的电势能.这方法比电槽方法更简单，但是精度减少——它给出精度 5%左右.相似方法的更详细的描述，读者可以在 П.Ф.Фильчаков 和 В.И.Панчишин 的书[5]中找到.

如果需要更高的精确度(4～5 位数)，并且网格包含较大量的结点，而计算是手工进行的，那么开始从较粗的网格进行迭代过程是更好的，这些粗网格由基础网格的方格组成，这些方格按象棋的惯例取出的(图 102 中标上斜线的).在这阶段可以进行迭代到 2～3 位数吻合.当这个达到时，需要返回到基础网格，并且计算图 102 中用×字表出的空格上的值，这是当作按对角线相邻的四个值的算术平均值计算的，然后，在余下的空格中的值是当作普通算术平均值来算出的.由此获得的一组值取作初始值，并且进一步对基本网格实施迭代过程就带有完整的位数了.

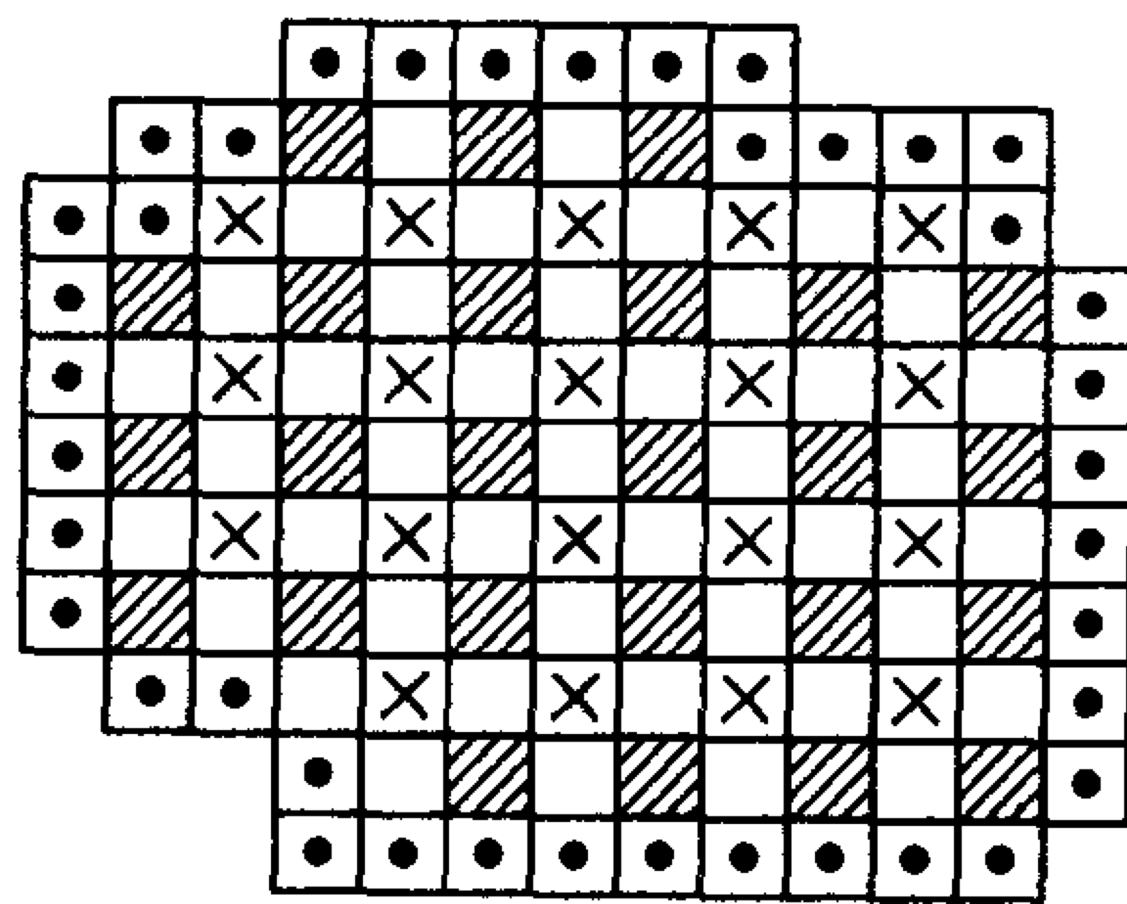


图 102

为了加速迭代过程，制定了大量形形色色的方式，选择何种方式决定于问题的特点和所应用的计算工具.在小机器上计算最有效的是所谓的张弛振荡方式或者应用按不同公式的修正方法.读者可以从譬如 В.Э.Милн 的书"Численное решение Дифферендиальных уравнений"(М:ИД,1955)或 Л.Коллатц 的书"Числендые методы решения дифференциальных уравнений"(М:ИЛ,1953)中了解到这些方式与方法.

§2　物理观念.边值问题的提法

在这里我们将考虑一些与复变函数论有关系的基本物理观念.这些观念是关于不同物理特性的各种平面向量场(第 46 目与第 47 目),以及关于具有较向量场更复杂特征的物体的平面应力状况(第 50 目)的.

自然,这些物理观念将导致函数论在物理学不同领域内的应用.在本节中我们基本上注意相应问题的提法(第 48 目,第 50 目),而将在以后的叙述中来给出这些应用的具体例子.只有在第 49 目中,我们举出了许多用共形映射方法来解的具体问题.

46. 平面场与复势能　在本目中我们将讨论*平面的平稳向量场*.这就是说,第一,这向量场中的向量是与时间无关的.第二,这向量场中的向量都平行于某一个平面 S_0,并且在垂直于 S_0 的任何一条直线上所有的点处,这个场中的向量(就大小与方向来说)都是相等的.显然,在所有的平行于 S_0 的平面内,这向量场的情形都完全一样,因此,这向量场可以由位于平面 S_0 内的向量所构成的一个*平面向量场*完全描述出来.这时,说到平面向量场中的一个点,我们在心中便要记起在那平行于平面的向量场中的一条无限直线,这直线通过所说的那个点,而垂直于平面 S_0.说到平面内的一条曲线,意味着是一个柱面,而一个区域则意味着是一个柱体.

我们在平面 S_0 内作一个笛卡儿坐标系 (x,y).于是,向量场中每一个具有分向量 $\{A_x, A_y\}$ 的向量 $\boldsymbol{A}$,便可以用复数来表示

$$\boldsymbol{A} = A_x + iA_y, \tag{1}$$

并且这两个分向量都是 x 与 y 的已知函数

$$A_x = A_x(x,y), \quad A_y = A_y(x,y), \tag{2}$$

或者,完全一样,都是复变量 $z = x + iy$ 的函数.

因此,平面的平稳向量场,可以借助复数与复变函数来描述,并且,在实际上最重要的向量场都满足的一些条件之下,来构造一个描述向量场的解析函数,就是所谓**向量场的复势能**,已经知道是可能的.由于应用了经过仔细研究的解析函数理论,便可以对与这种向量场有关联的那些问题作极深入的分析,并求出便于计算的解.

我们来更详尽地讨论复势能的构造.为此之故,要回忆一下平面向量场的向量分析中的一些基本概念*.我们以后将时常采用流体力学中的术语,虽说我们在下面所要讲的那些东西,都是属于各种不同物理特性的向量场的.

积分

$$N = \int_C (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n}^0)\, ds \tag{3}$$

叫做向量场 $\boldsymbol{A}$ 经过曲线 C 的**流量**,其中 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n}^0)$ 表示(以后也是同样)向量场 $\boldsymbol{A}$ 中的

---

* 向量分析的基本概念,我们假定是大家所已经知道的,可以参看,例如,Г. М. 菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》第 3 卷.

向量与曲线 C 的单位法线向量 $\boldsymbol{n}^0$ 的标量积. 如果用 dx 与 dy 来表示沿着 C 的微分,即,令 $\boldsymbol{s}^0 ds = dx + idy$,那么便有

$$\boldsymbol{n}^0 ds = -i\boldsymbol{s}^0 ds = dy - idx, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n}^0) ds = A_x dy - A_y dx,$$

所以(3)式可以写成

$$N = \int_C A_x dy - A_y dx. \tag{4}$$

流量的面密度,即,经过封闭曲线 C 的流量对这曲线所围面积 S 的比值,当区域 S 紧缩趋于点 z 时所取的极限值,称为向量场在点 z 处的**散度**,或**歧量**

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{C \to z} \frac{1}{S} \int_C (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n}^0) ds. \tag{5}$$

众所周知,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}. \tag{6}$$

向量场中使 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} \neq 0$ 的点,称为**源**(有时只对 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} > 0$ 的情形才称作源;而称使 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} < 0$ 的点称为**汇**). 如果在一个区域 D 内的每一个点处都有

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

那么便说,向量场在这区域内是一个**管量场**.

在这种场内,经过任何一条封闭曲线 c——它的内部 d 是属于上述场的——的流量都等于 0. 这是根据著名的奥斯特洛格拉茨基(Остроградский)定理:

$$\int_c (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n}^0) ds = \iint_d \operatorname{div} \boldsymbol{A} dS \tag{8}$$

推出的根据同一定理,通过流管(由两条流线——即,在其本身的每一个点处都与场中的对应向量相切的曲线——所围成的区域,叫做流管)的任何一个截面的流量,都是相同的(图 103).

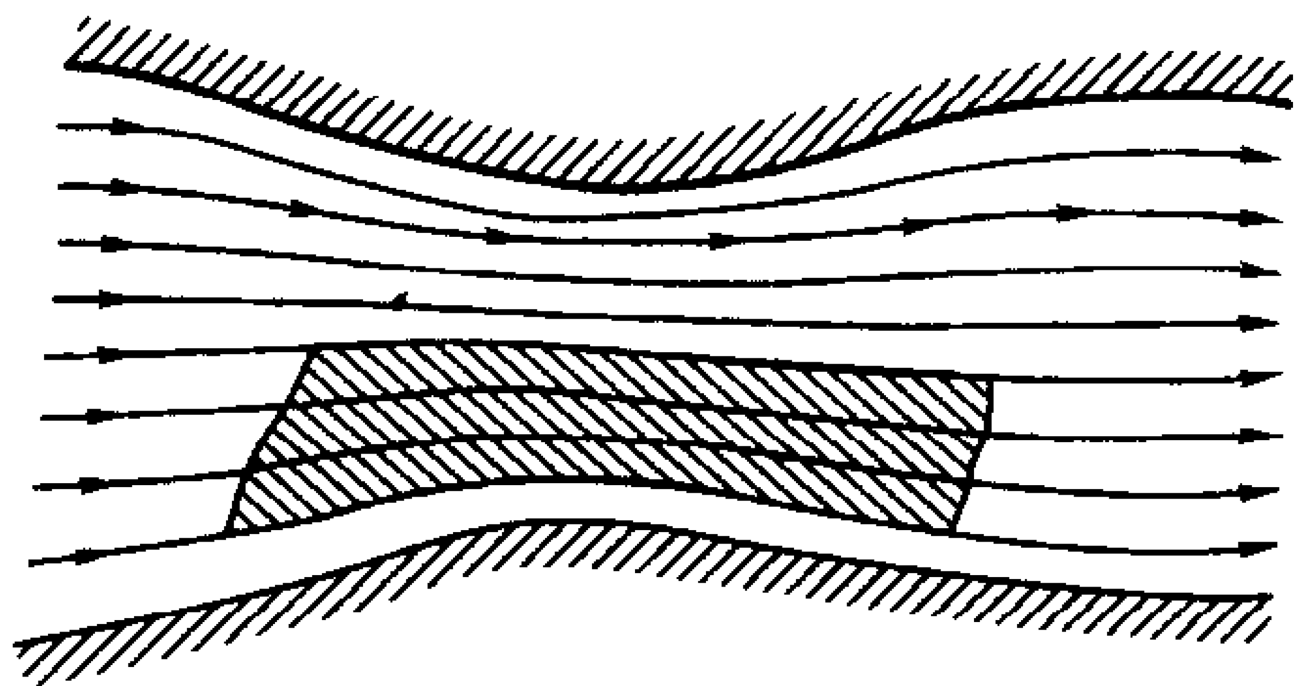


图 103

场的管量性条件(7)说明了,表达式 $-A_y dx + A_x dy$ 是某一个函数 $v(x, y)$ 的微分,这个函数叫做**流函数**. 这名称是由于:这函数 $v(x, y)$ 的等值线,就是那些流线. 实际上,沿着等值线有

$$dv = -A_y dx + A_x dy = 0,$$

所以$\frac{dy}{dx} = \frac{A_y}{A_x}$,这就表示了,等值线的切线方向是与向量 $\boldsymbol{A}$ 的方向相同的.

由函数 v 的微分的表达式中便得出:它的偏导数等于

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x. \tag{9}$$

函数 $v(x,y)$的本身,可以根据它的全微分 dv 通过积分来求得(精确到可以相差一个常数项)

$$v(x,y) = \int_{L\ z_0}^{z} -A_y dx + A_x dy + \text{const}. \tag{10}$$

根据条件(7),这积分在单连通区域 D 内是与积分路线无关的,因此它定出了一个单值函数;在多阶连通区域内,这积分具有周期常量,所以它定出一个多值函数*.

在一个管量场内,根据(4)式与(10)式,通过曲线 C 的流量,等于流函数在 C 的两个端点处的增量:

$$N = \int_{C\ z_1}^{z_2} -A_y dx + A_x dy = \int_{C\ z_1}^{z_2} dv = v(z_2) - v(z_1), \tag{11}$$

这时,如果区域 D 是多阶连通的,应该取 $v(z)$在曲线 C 上连续的那一个分支来考虑.

还有,形如

$$\Gamma = \int_C (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{s}^0) ds = \int_C A_x dx + A_y dy \tag{12}$$

(参看公式(4)的导出过程)的积分叫做沿着闭曲线 C 向量场的**环量**.

环量的面密度,即,沿曲线 C 的环量对这曲线所围面积S 的比值,当 S 紧缩趋于一个点 z 时所取的极限值,叫做这向量场在点 z 处的**旋度或涡量****:

$$\text{rot } \boldsymbol{A} = \lim_{C \to z} \frac{1}{S} \int_C (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{s}^0) ds. \tag{13}$$

正如已经知道的,

$$\text{rot } \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{14}$$

向量场中使 rot $\boldsymbol{A} \neq 0$ 的点,叫做这向量场的**涡旋点**,或者简称**涡点**.如果在一个区域 D 内的每一个点处都有

---

* 在条件(7)之下,关于第 41 目中积分(2)的那些讨论,可以完全应用到积分(10)上来.

** 就空间场来说,环量的密度仅给出了旋度在面积 S 的法线方向上的投影,至于旋度本身则是一个向量.可以认为:在平面场中的旋度,是一个其方向与场的平面相垂直的向量.这时,(13)的绝对值给出了这向量的模,而其符号表示这向量的序向.

$$\text{rot } \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \tag{15}$$

的话，那么便说，向量场在这区域内是一个**无旋场**，或者**势场**. 由著名的黎曼－格林公式

$$\int_c (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{s}^0) ds = \iint_d \text{rot } \boldsymbol{A} dS \tag{16}$$

(c 是区域 d 的边界)推出：沿着任何一条封闭曲线 c——它的内部 d 是属于上述场的——的环量，都等于 0.

使向量场是一个势场的条件(15)，说明了表达式 $A_x dx + A_y dy$ 是某一个函数 $u(x, y)$ 的微分，这个函数叫做向量场的**势函数**，或者**势能**. 这名称是由于：从关系式

$$A_x dx + A_y dy = du$$

中可以得出

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{17}$$

或者，完全一样，

$$\boldsymbol{A} = \text{grad } u$$

(一个数量函数 u，对于它本身的梯度来说，就称为势能). 势函数本身，可以根据它的微分利用积分法来求得：

$$u(x, y) = \int_{L\, z_0}^{z} A_x dx + A_y dy + \text{const}. \tag{18}$$

根据条件(15)，这积分在单连通区域 D 内是与积分路线无关的，而在多阶连通区域内则具有周期常量.

如果在区域 D 内，向量场同时既是管量场又是无旋场，这便是说，在 D 内条件(7)同(15)都满足，那么，比较(9)式与(17)式，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{19}$$

而这便是柯西－黎曼方程. 因此，我们证明了：

定理 1　*在没有源与旋度的平面向量场中，流函数与势函数是共轭的调和函数.*

特别是，由此可以得出：在这样的向量场中，流线与等势线形成正交曲线族. 这些正交曲线族的总和，有时称为场网格. 复变函数

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{20}$$

称为**向量场的复势能**——这便是我们想要构造的那个描述向量场的解析函数. 从上面所述可以知道，如果向量场是在多阶连通区域内的(例如，若场内有源与旋度的话，为了要使我们的函数能够构成，就必须把它们从区域中去掉)，那么，复势能也可能是个多值函数.

所有那些表征向量场的基本量，都可以借助复势能来表达. 例如，根据(17)、(19)

以及第 5 目中的解析函数导数公式,可以得出场内的向量

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}=\overline{f'(z)}. \tag{21}$$

由此还可以顺便得出,复势能的导数总是单值的.

此外,我们有

$$f'(z)dz=(A_x-iA_y)(dx+idy),$$

因此,(4)式与(12)式可以改写成

$$N=\mathrm{Im}\int_C f'(z)dz,\quad \Gamma=\mathrm{Re}\int_C f'(z)dz. \tag{22}$$

把这两个式子联合起来,便得到

$$\Gamma+iN=\int_C f'(z)dz. \tag{23}$$

我们来举几个最简单的平面向量场的例子:

(1) 源　设在向量场内只有一个点源,位于坐标原点处,没有涡点*.由于对称的缘故,显然,场内的向量具有形式

$$\boldsymbol{A}=\varphi(r)\boldsymbol{r}^0, \tag{24}$$

其中 $r=|z|$,是从坐标原点到点的距离,$\boldsymbol{r}^0=\frac{z}{|z|}$,是从原点指向点 z 的单位向量.通过任何一个圆心在原点的圆周 $|z|=r$ 的向量的流量等于

$$N=\int_{|z|=r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{r}^0)ds=\varphi(r)\cdot 2\pi r.$$

这流量不应当与半径有关,因为,把奥斯特洛格拉茨基公式(8)应用到环形 $r_1<|z|<r_2$ 上,由于其中没有源,因此 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$,我们得出

$$\int_{|z|=r_2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{r}^0)ds-\int_{|z|=r_1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{r}^0)ds=\iint_{r_1<|z|<r_2}\operatorname{div}\boldsymbol{A}dS=0.$$

由此可以推知量 N 是一个常量,也就是说

$$\varphi(r)=\frac{N}{2\pi r}. \tag{25}$$

数 N 叫做**源强度**.把这值代入(24)式中,便得出场内的向量

$$\boldsymbol{A}=\frac{N}{2\pi r}\boldsymbol{r}^0=\frac{N}{2\pi}\frac{z}{|z|^2}=\frac{N}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}}. \tag{26}$$

按照(21)式,我们可以得出复势能的导数

$$f'(z)=\frac{N}{2\pi}\frac{1}{z},$$

于是便可以求出复势能本身

---

* 这样的向量场必须想像为一个空间场,是由均匀地分布在于原点处与 z 平面相垂直的那条直线上的源的作用而发生的.在例题 2-4 中也类似.

$$f(z)=\frac{N}{2\pi}\mathrm{Ln}\ z+c. \tag{27}$$

再把实数部分与虚数部分分开,便得出势函数与流函数

$$u=\frac{N}{2\pi}\ln|z|+c_1,\quad v=\frac{N}{2\pi}\mathrm{Arg}\ z+c_2. \tag{28}$$

在图 104 中(以及后面的图),实线表示流线,而虚线表示等势线.

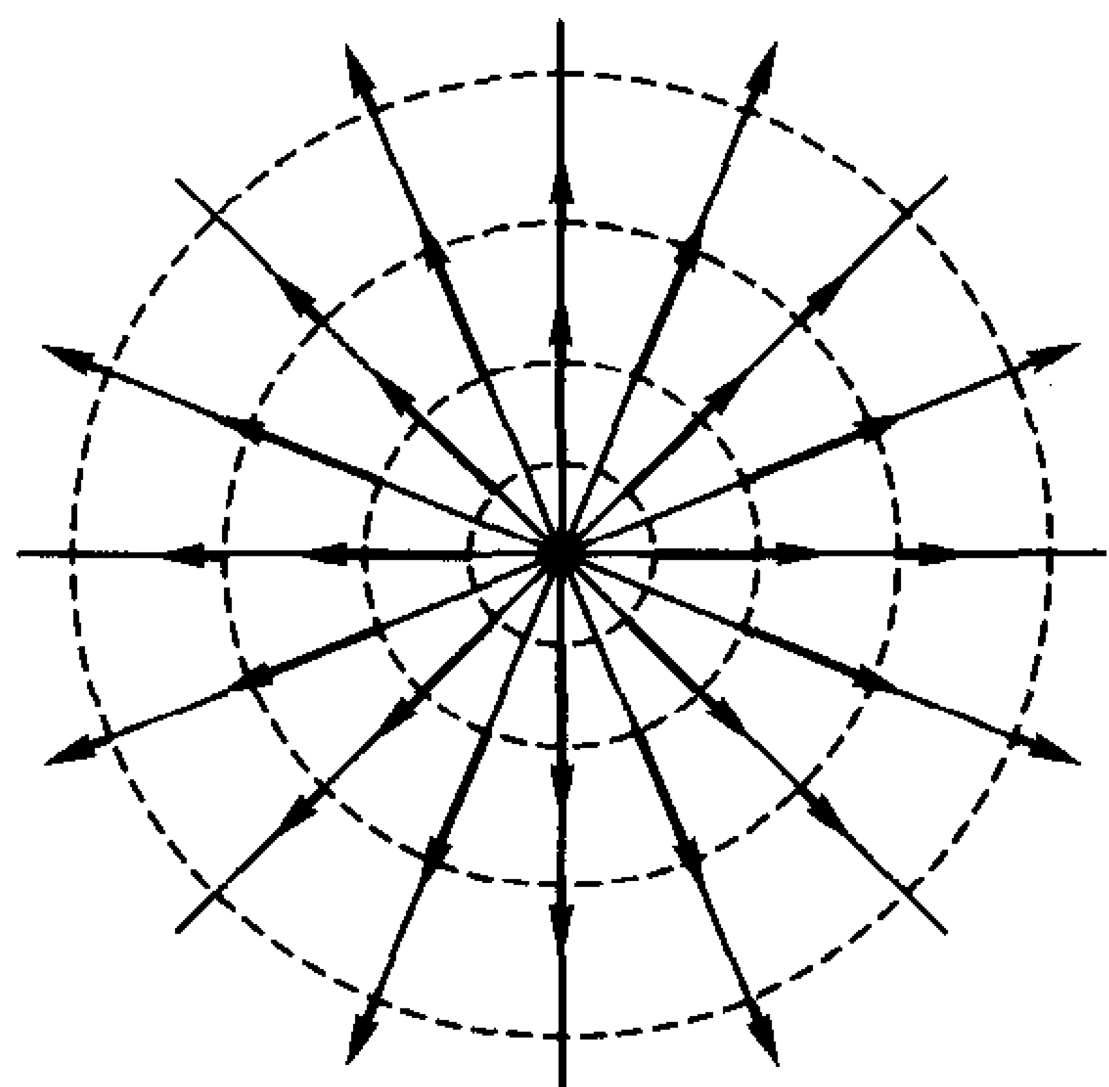


图 104

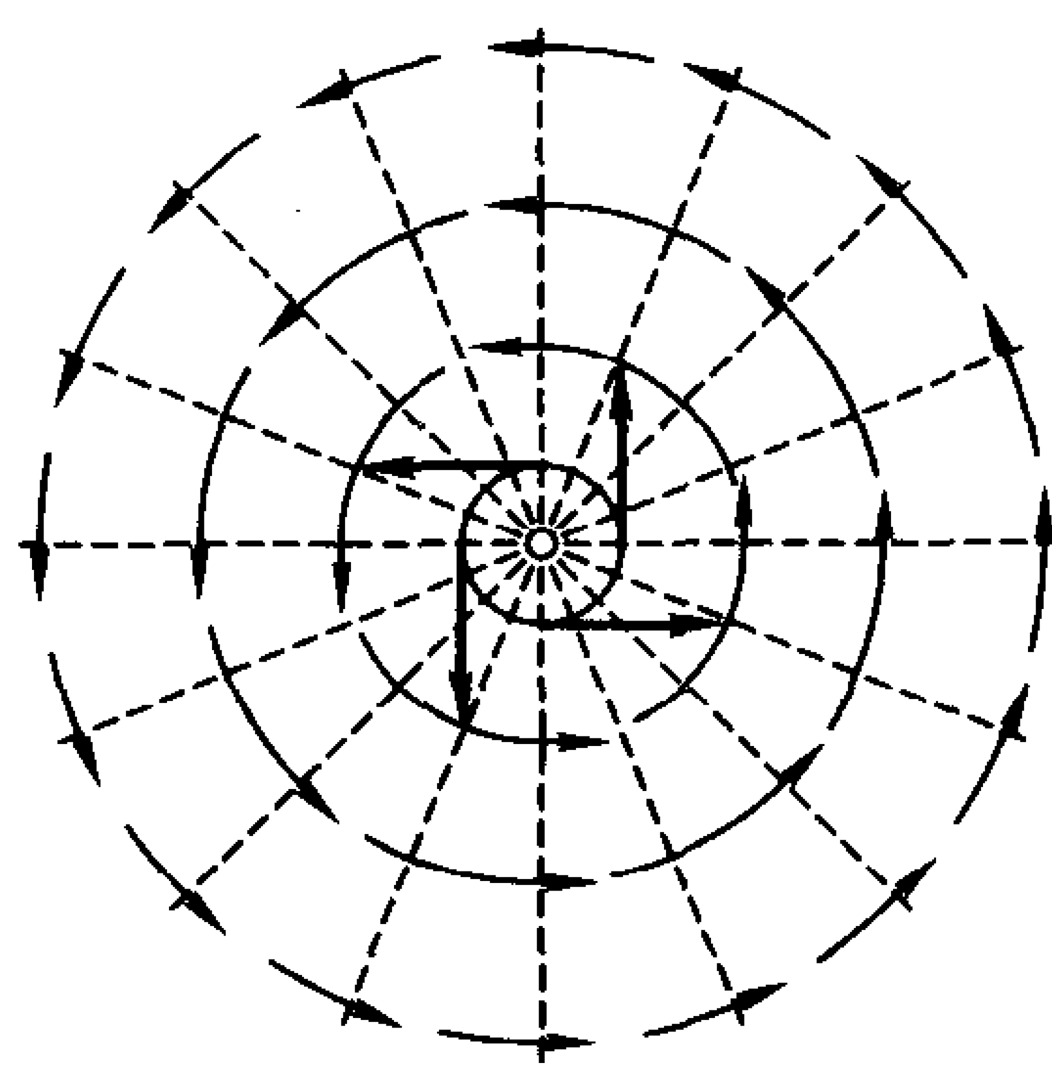


图 105

(2) 涡点 完全同样的考虑,可以得出:如果向量场仅具有一个涡点,位于坐标原点处,那么场中的向量便等于

$$\boldsymbol{A}=\frac{\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{i}{\bar{z}}, \tag{29}$$

其中常量 Γ 是**涡点强度**,即,向量 $\boldsymbol{A}$ 沿着任何一条围绕这涡点的封闭周线的环量(图 105).它的复势能同上例中的只相差一个因子 i,势函数与流函数,则是上例中的势函数与流函数彼此互换

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\mathrm{Ln}\ z+c;$$

$$u=\frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Arg}\ z+c_1,\quad v=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln|z|+c_2. \tag{30}$$

(3) 涡旋源 设在坐标原点处,有一个强度为 N 的源,与一个强度为 Γ 的涡点集中在一起.这向量场中的向量与复势能,分别可以由把(26)式与(29)式中的表达式相加,与把(27)式与(30)式中的表达式相加而得出

$$\boldsymbol{A}=\frac{N+i\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar{z}},\quad f(z)=\frac{N-i\Gamma}{2\pi}\mathrm{Ln}\ z+c. \tag{31}$$

流线与等势线,在极坐标 $z=re^{i\varphi}$ 下分别可以用方程

$$\begin{aligned}\Gamma\ln r-N\varphi&=c_1,\\ N\ln r+\Gamma\varphi&=c_2.\end{aligned} \tag{32}$$

来表示.这是正交的对数螺线族(见图 106).

(4) 偶极子 我们考虑由一个源与一个汇所组成的系统,这源与汇的强度等于 $\pm N$,分别位于点 $z_1=-h$, $z_2=0$ 处(图 107). 这系统的复势能,可以由把源与汇的复势能相加而求得

$$f_h(z)=\frac{N}{2\pi}\mathrm{Ln}(z+h)-\frac{N}{2\pi}\mathrm{Ln}\ z \qquad (33)$$

(我们使用了公式(27)以及当源不在坐标原点处时这公式的明显推广. 常数项我们没有计算在内).

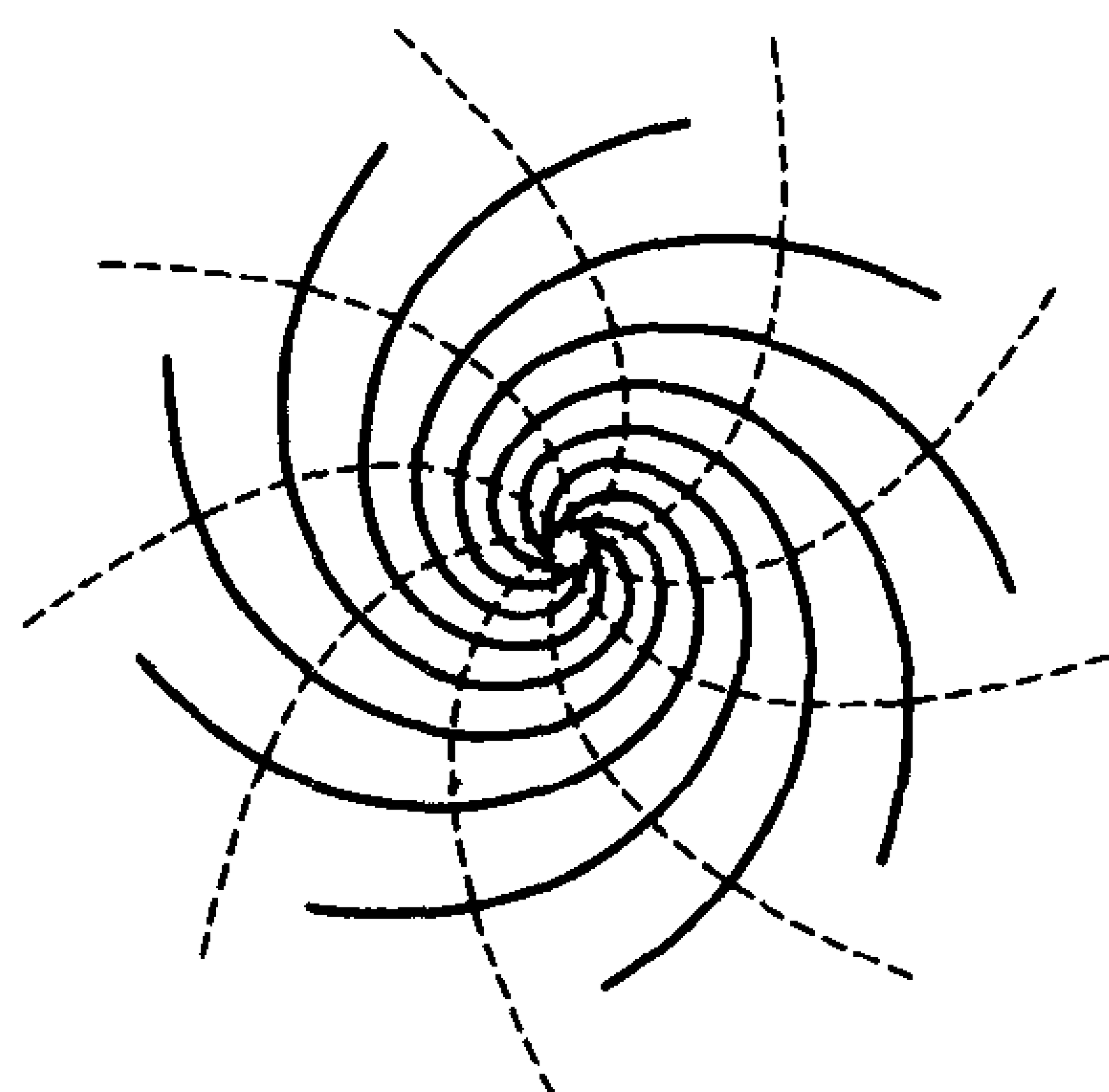


图 106

现在来考虑,当 $h\to0$ 并且同时 $N\to\infty$ 使得 $Nh\to p$ 时,由我们这系统中所得到的那个极限形式——这叫做具有矩 p 的偶极子(图 108). 偶极子的向量场的复势能,可以由(33)式中取 $h\to0$ 时的极限值而得出

$$f(z)=\lim_{h\to0}\frac{Nh}{2\pi}\frac{\mathrm{Ln}(z+h)-\mathrm{Ln}\ z}{h}=\frac{p}{2\pi}\frac{d}{dz}\mathrm{Ln}\ z=\frac{p}{2\pi z}. \qquad (34)$$

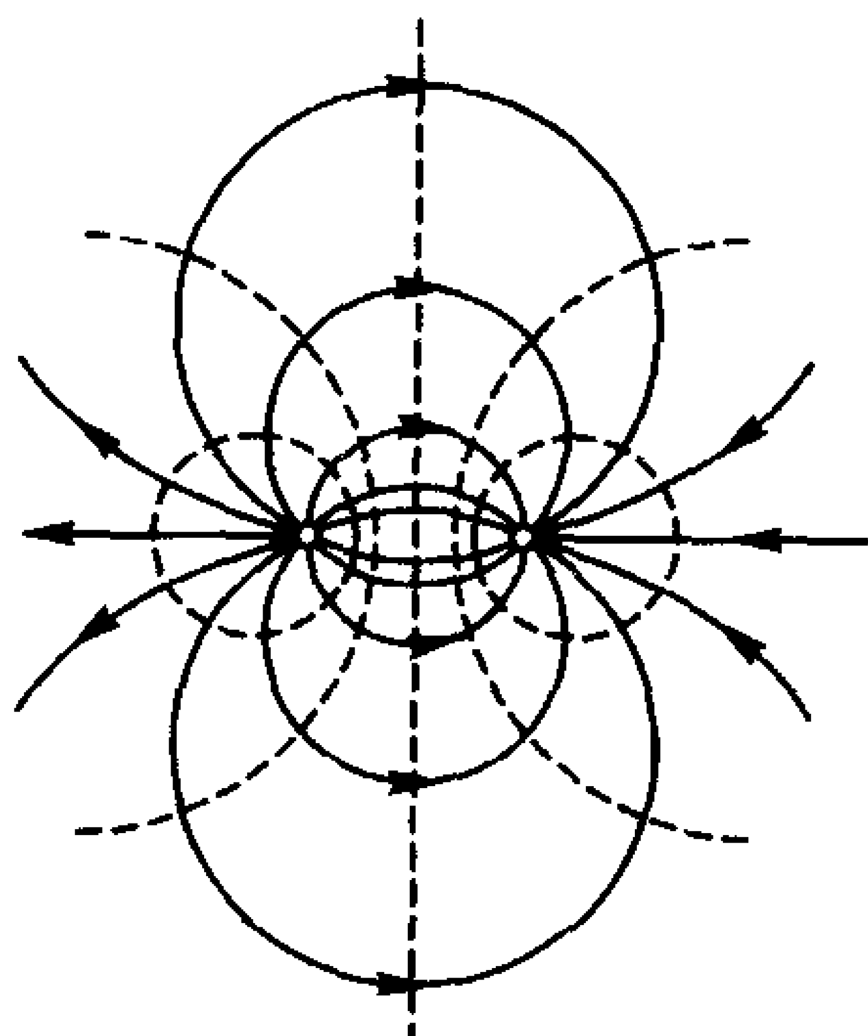


图 107

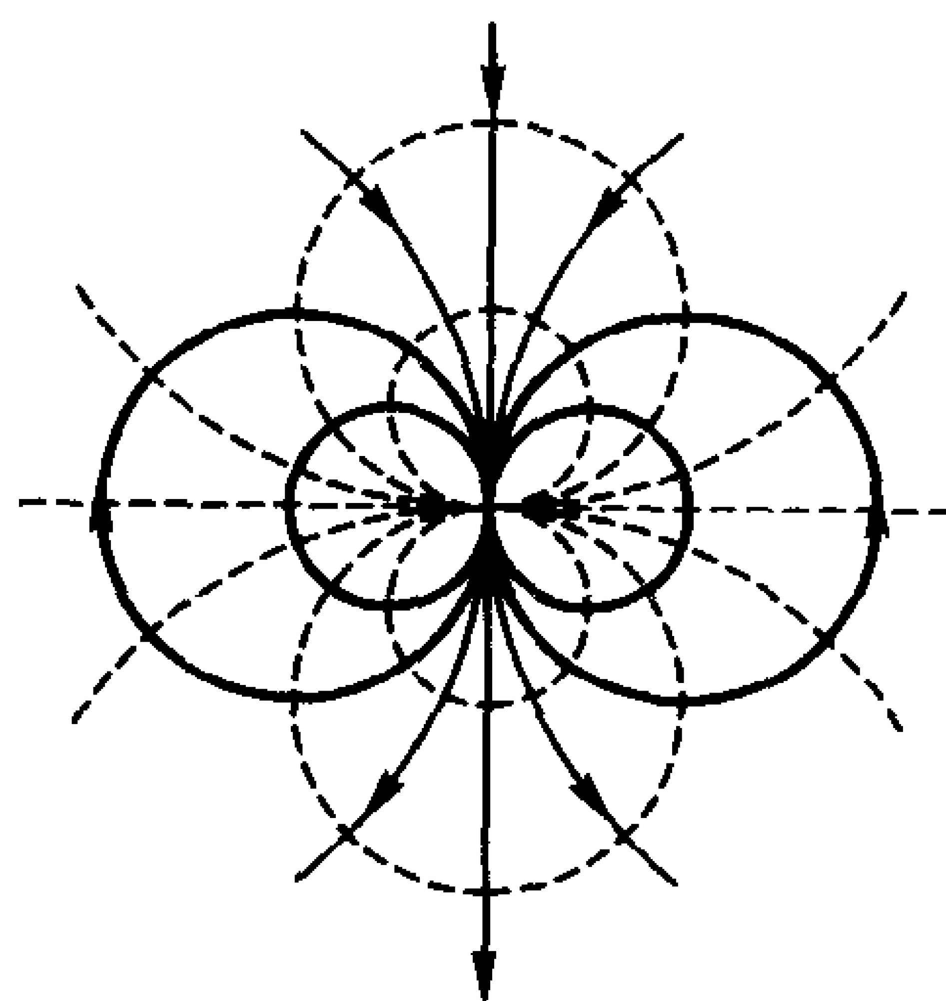


图 108

在图 108 中我们画出了流线与等势线——这是曲线 $\mathrm{Im}\ w=c_1$ 与 $\mathrm{Re}\ w=c_2$ 在映射 $w=\frac{p}{2\pi z}$ 的逆映射下的像,即,与坐标轴相切的一些圆周.

(5) 单源层 我们假设那些源是排列在具有线密度为 $\rho(\zeta)$ 的一条曲线 C 上*. 令 $r=|\zeta-z|$,按照公式(28),可以得出放置在点 ζ 处的单元源 $\rho(\zeta)ds$ 的势能,其形式为 $\frac{\rho(\zeta)}{2\pi}\ln r ds$. 再求积分,便得到了单源层的势能

* 在空间中,对应于这向量场的,是具有准线 C 而且其母线垂直于 z 平面的一个柱面的向量场. 在每一条母线上,柱面所带的源的面密度是个常数. 在(6)中也类似.

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C \rho(\zeta)\ln r ds. \tag{35}$$

(6) 双源层　我们假定,除了带着密度为 $\rho(\zeta)$ 的源的那条曲线 C 之外,还有一条曲线 C',是由在 C 的所有法线上,向确定的一边离开一小段固定长度 h 而得到的. 设在曲线 C' 上源的分布密度是:在它的长度单元 ds' 上,其所配置的源的量是 $\rho' ds' = -\rho ds$(这个等式的右端与左端,分别是在一对互相对应的点 ζ 与 ζ' 处取的单元源,参看图 109). 当 $h\to 0$ 并且 $\rho(\zeta)\to\infty$ 以致 $h\rho(\zeta)\to\mu(\zeta)$ 时,从我们这系统中所得到的极限形式,叫做具有矩密度 μ 的**双源层**.

我们来求双源层的势能. 当把 $h\neq 0$ 固定时,按照公式(35)可以求得

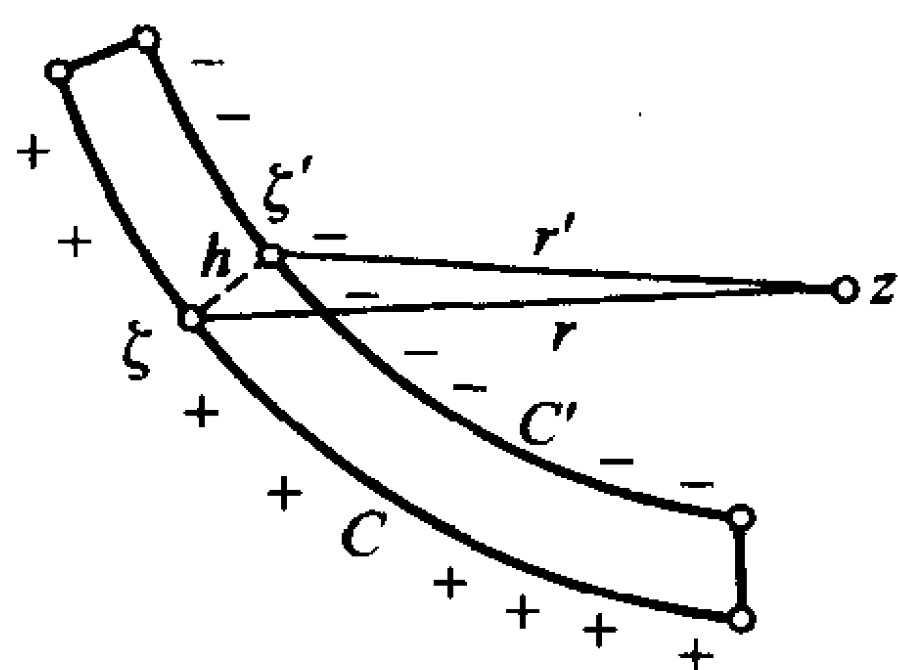


图 109

$$u_h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C \rho\ln r ds+\frac{1}{2\pi}\int_{C'}\rho'\ln r' ds',$$

其中 $r'=|z-\zeta'|$. 对于很小的 h,把较 h 高阶的无穷小略去,我们有

$$r'=r-h\frac{\partial r}{\partial n},$$

其中$\frac{\partial}{\partial n}$是按照在与 C' 相反的那一面的 C 的法线方向的导数. 由此有

$$\ln r'=\ln r+\ln\left(1-\frac{h}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)=\ln r-h\frac{\partial}{\partial n}\ln r.$$

再考虑到 $\rho' ds'=-\rho ds$,我们得到

$$u_h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C h\rho(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln r ds.$$

在这式中取 $h\to 0$ 时的极限值,便得出双源层的势能:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C \mu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln r ds, \tag{36}$$

其中法线是就那条带有密度为 $+\rho$ 的源的曲线的一面来取的(参看图 109).

最后,我们要证明:任何一个调和函数都可以看作是某一个平面场的势能. 为了简单起见,我们只就由一条封闭曲线 C 所围成的单连通区域的情形来讨论,尽管这个结论在一般情形下也仍是正确的. 设已知一个在这种区域 D 内的调和函数 $u(z)$,我们构成与它共轭的那个函数 $v(z)$,再应用第 14 目中的柯西积分公式* 于函数 $f(z)=u(z)+iv(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

令 $\zeta-z=re^{i\varphi}$,固定 z 不变,就 ζ 求导数,我们得到

---

* 在必要时,我们将稍微离开区域 D 的边界,以使柯西公式可以应用.

$$\frac{d\zeta}{\zeta - z} = d\ln(\zeta - z) = d\ln r + id\varphi.$$

把这代入柯西公式中,并区分出实数部分,便有

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(\zeta)d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_C v(\zeta)d\ln r. \tag{37}$$

在曲线 C 上,$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds$. 根据柯西-黎曼条件,对于那个在 C 上解析的函数 $\ln(\zeta - z)$,可以写成关系式 $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\frac{\partial\ln r}{\partial n}$,其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示沿着 C 的内法线来求导数. 所以,(37)式中的第一个积分

$$u_1(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_C u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln r ds$$

乃是一个双源层的势能,这个双源层的矩密度为 $-u(\zeta)$.

设 $v(\zeta)$ 有连续导数,按照分部积分法积出(37)式的第二项中的积分,我们得到

$$u_2(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial v}{\partial s}\ln r ds$$

(在积分号外面的那一项,由于 C 是一条封闭曲线,所以等于0),因此,它乃是一个密度为 $-\frac{\partial v}{\partial s}$ 的单源层的势能. 这样便证明了:

定理 2 *每一个在单连通区域 D 内调和的函数 $u(z)$,都可以被表示成分布在 D 的边界上的一个单源层与一个双源层的势能的和.*

如果区域 D 是多阶连通的,那么在这些相加的项之中,还必须再添上位于边界弧的端点或者边界的孤立点处的那些源的势能(比照 $u_2(z)$ 的表达式的导出过程).

47. 物理观念 在本目中我们将考虑对平面向量场的各种物理学上的解释.

(1) 流体的流速场 设向量场中的向量 $\mathbf{V}$ 代表不可压缩的理想流体在稳定平面流中的粒子的速度. 速度向量的流量

$$N = \int_C (\mathbf{V}, \boldsymbol{n}^0)ds \tag{1}$$

显然就表示在单位时间内经过曲线 C 的流体的量. 环量

$$\Gamma = \int_C (\mathbf{V}, \boldsymbol{s}^0)ds = \int_C V_s ds \tag{2}$$

表示沿封闭曲线 C 的速度向量 $\mathbf{V}$ 切向组成成分 V_s 的积分. 源与涡点,可以分别解释为这样的一些点:在它们的邻域内,沿着一条围有这种点的封闭曲线,流量与环量是异于零的(更确切地说,是这样的一些点:在这些点处,流量与环量的密度,即,div 与 rot 分别是不等于零的). 如果在某一个区域 D 内没有源与涡点,那么,在这区域内便可以构成一个解析函数 $f(z) = u(z) + iv(z)$——场的复势能——使得

$$\mathbf{V} = \overline{f'(z)}. \tag{3}$$

反过来讲,任何一个在区域 D 内解析的函数,也都可以被解释为某一个不可压缩的

理想流体的没有源与涡点的平面流的复势能.

我们来考虑解析函数的简单奇点的在流体力学上的解释. 由上一目中的例题 3 可以看到,设在一个对数支点 a 的邻域内, $f(z)$的形状是

$$f(z)=c\,\mathrm{Ln}(z-a)+g(z),$$

其中 $g(z)$是一个正则函数,我们可以把这个点 a 解释为一个强度为$N-i\Gamma=2\pi c$ 的涡旋源. 把上一目中的例题 4 稍加推广,我们便看到:若点 a 是$f(z)$的一个一阶极点,具有留数 c_{-1},在它的邻域内

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+g(z),$$

那么便可以把点 a 解释为由位于点 $z_1=a-h$ 及点 $z_2=a$ 处的两个强度为 $\pm(N-i\Gamma)$的涡旋源合并而成的偶极子,这时

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi}\lim_{h\to 0}(N-i\Gamma)h.$$

高阶的极点可以用完全同样的方式来解释. 我们来考虑位于点 $z_1=a-h$ 与点 $z_2=a$ 处而具有矩 $\mp 2\pi\frac{c_{-2}}{h}$的两个偶极子. 当 $h\to 0$ 时由这系统所得到的那个极限形式,叫做具有矩 $2\pi c_{-2}$的**电四极子**. 电四极子的向量场的复势能等于

$$\lim_{h\to 0}-\frac{c_{-2}}{h}\left\{\frac{1}{z-a+h}-\frac{1}{z-a}\right\}=-c_{-2}\frac{d}{dz}\frac{1}{z-a}=\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}.$$

因此,一个在其邻域内

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-1}}{z-a}+g(z)$$

的二阶极点,可以解释为一个偶极子与一个电四极子的总和,它们所具有的矩,依赖于系数 c_{-1}与 c_{-2}.

一般地讲,函数 $f(z)$的 n 阶极点,可以解释为 $2,4,\cdots,2n$ 阶电多极子的总和,这些电多极子所具有的矩,依赖于由 $f(z)$在这个极点的邻域内的展开式的主要部分中各项的系数. 这里的所谓 $2k$ 阶电多极子,我们理解为由两个位于点 $z_1=a-h$ 及 $z_2=a$ 处而具有矩 $\pm\frac{p_{2k-2}}{h}$的 $2k-2$ 阶电多极子所组成的系统,当 $h\to 0$ 时所取的极限形式(2 阶电多极子就是偶极子).

那些使复势能的导数在其处变成零的多重点,是流线与等势能线的支点(见第 41 目中的定理 8,在现在的情形中,定理内的 $n>1$). 这样的点叫做**流的临界点**. 在这些点处流速度等于零.

最后我们举 C. A. 恰普雷金的对于计算作用在平面平行流中的柱形物体上的浮力向量的著名公式的推导作为例子.

我们来考虑具有不变速度 $-\mathbf{V}_\infty$ 的飞机的机翼的运动. 在飞机的速度不接近音

速时,可以把空气看作不可压缩的理想流体,并且环绕机翼的旋涡状态可以略去不计.除此之外,我们并把机翼的形状表示成其母线与速度向量垂直的无穷长柱面.于是,空气的粒子速度场是与一个平面平行的,所以便可以只就任何一个垂直于这柱面母线的截面中的平面场来研究.最后,为了方便起见,我们想像机翼固定不动,而冲击在机翼上面的空气则具有在无穷远处不变的速度 $\boldsymbol{V}_\infty$(图 110).在稳定的无涡流中,压力的大小由著名的伯努利-欧拉公式* 来确定:

$$p = A - \frac{\rho}{2} V^2, \tag{4}$$

其中 A 是某一个常数,ρ 是密度,$V = |\boldsymbol{V}|$,是流速的大小(我们略去重力的影响).利用这个公式,我们就可以计算出作用在机翼截面的周界 C 上的全部的力(浮力).由于作用在 C 上的压力是沿着法线向内的,所以,作用在周界 C 的单元 $d\zeta$ 上的力(按向量)等于

$$pid\zeta = Aid\zeta - \frac{\rho}{2} V^2 id\zeta,$$

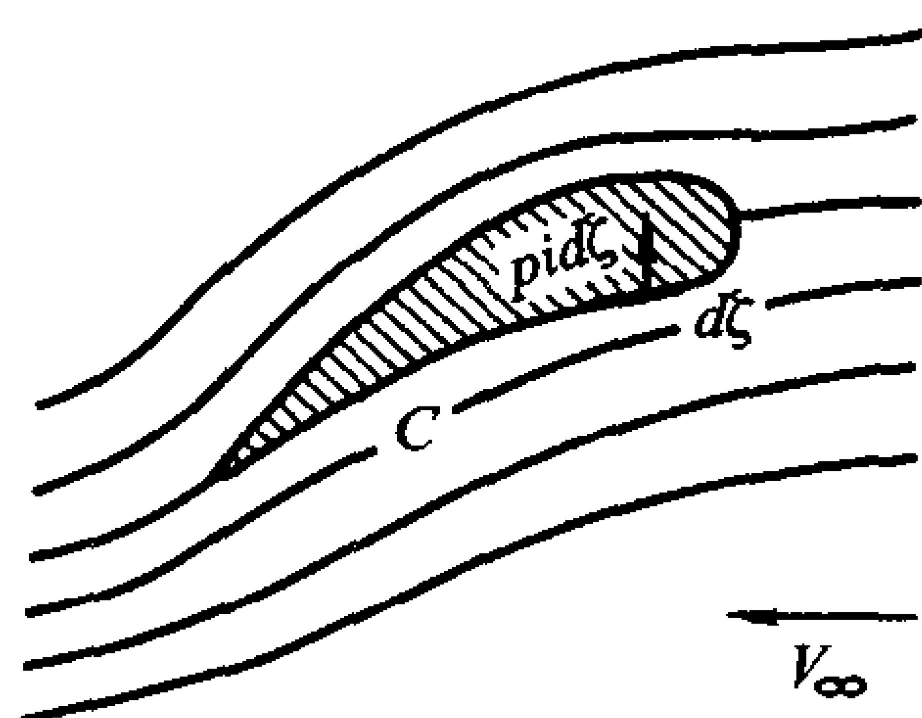


图 110

作用在 C 上的全部的力,等于 $pid\zeta$ 的向量和,即,

$$\boldsymbol{P} = X + iY = \int_C pid\zeta = -\frac{\rho i}{2}\int_C V^2 d\zeta \tag{5}$$

(常数项的沿封闭路线的积分等于 0).由于气流是绕着 C 流的,所以在 C 上的那些点处,气流速度的方向是沿切线的方向

$$\boldsymbol{V} = \overline{f'(\zeta)} = Ve^{i\varphi},$$

其中 $\varphi = \arg d\zeta$.由此可得速度的数值

$$V = \overline{f'(z)}e^{-i\varphi},$$

所以公式(5)具有形状

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\rho i}{2}\int_C \{\overline{f'(\zeta)}\}^2 e^{-2i\varphi} d\zeta = -\frac{\rho i}{2}\int_C \{\overline{f'(\zeta)}\}^2 \overline{d\zeta},$$

其中 $e^{-2i\varphi}d\zeta = e^{-i\varphi}|d\zeta| = \overline{d\zeta}$.把式中的那些量换成共轭的量,我们便得到了与浮力向量复共轭的那个向量

$$\overline{\boldsymbol{P}} = X - iY = \frac{\rho i}{2}\int_C \{f'(\zeta)\}^2 d\zeta. \tag{6}$$

这就是经典的 C. A. **恰普雷金公式**(1910).

(2) 热场 我们知道,在没有热源的平面热场** 内,温度满足微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{7}$$

---

* 见 H. E. Кочин, И. A. Кибель 和 H. B. розе[6],卷一.

** 这平面场在空间中对应着一个平行于平面的场,在每一个平行于 xy 平面的平面内,场中温度的分布都是同样的.

其中 t 是时间,a^2是某一个常系数.如果只限于考虑稳定状况的话,那么温度与时间无关,我们就得到拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{8}$$

也就是温度是一个调和函数.与它共轭的那个调和函数 $v(x,y)$,叫做**热流函数**,解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

称为**复势能**.我们来说明 $v(x,y)$的物理意义.

在热传导的理论中有:单位时间内流过长度单元 ds 的热量,与 ds 以及温度的法线方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$成正比,即,这热量等于

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}ds=(-k\operatorname{grad}u,\boldsymbol{n}^0)ds=(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{n}^0)ds. \tag{9}$$

在这里 k 是内部的热传导系数,式中取“-”号是为了热量是从高温度流向低温度的.向量

$$\boldsymbol{Q}=-k\operatorname{grad}u \tag{10}$$

叫做**热流向量**.由(9)式可以看出,向量 $\boldsymbol{Q}$ 的经过曲线 C 的流量,就表示在单位时间内流过 C 的热量.

根据梯度的性质,在向量场的每一个点处,热流向量 $\boldsymbol{Q}$ 的方向都是沿着通过这个点的曲线

$$u(x,y)=\text{const}$$

(等温线)的法线方向的.可是,这方向显然就是函数 $v(x,y)$的等值线的切线方向,所以,曲线

$$v(x,y)=\text{const}$$

是 $\boldsymbol{Q}$ 的向量线(即,“热量流动”所沿的曲线).并且,由公式(10)与柯西-黎曼方程,我们有

$$\boldsymbol{Q}=-k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-k\frac{\partial v}{\partial y}+ki\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此,在热流从左向右通过任意一条曲线(沿这条线运动),就有

$$\boldsymbol{n}^0ds=-id\zeta=dy-idx,$$

从而,热流的流量等于

$$\begin{aligned}\int_C(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{n}^0)ds&=-k\int_C\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial x}dx\\&=-k\int_C dv=k\{v(z_1)-v(z_2)\}\end{aligned} \tag{11}$$

(我们把 k 看作常数;z_1与 z_2是曲线 C 的端点).

我们还指出通过复势能 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的向量 $\boldsymbol{Q}$ 的一个表达式

$$Q=-k\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-k\overline{f'(z)}. \tag{12}$$

因此,在流体的流速场同热场之间,有着完全的类似性.其区别仅在于:在流速场的情形,复势能的两个成分都可能是多值函数,而在热场的情形,复势能的实数部分——温度——总是单值的(我们不考虑公式中那些非实质性的差异).

作为一个例子,我们来考虑由位于点 $\pm a$ 处而具有强度 $\pm q$ 的一个热源与一个热沟所组成的系统(图 111).这系统的复势能等于

$$f(z)=\frac{q}{2\pi}\mathrm{Ln}(z-a)-\frac{q}{2\pi}\mathrm{Ln}(z+a)=\frac{q}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{z-a}{z+a}. \tag{13}$$

等温线 $\left|\frac{z-a}{z+a}\right|=\mathrm{const}$ 是以 $\pm a$ 为其对称点的那些圆周(圆周 $|w|=\mathrm{const}$ 在分式线性映射 $w=\frac{z-a}{z+a}$ 下的原像),在图 111 中用虚线表示.热流的流线 $\arg\frac{z-a}{z+a}=\mathrm{const}$ 是通过点 $\pm a$ 的那些圆周(射线 $\arg w=\mathrm{const}$ 在映射 $w=\frac{z-a}{z+a}$ 下的原像),在图 111 中用实线表示.通过仅围有一个点 a 的任何一条封闭曲线的热流流量等于 $+q$,通过仅围有点 $-a$ 的任何一条封闭曲线的热流流量等于 $-q$,通过围有 $\pm a$ 两点的封闭曲线的热流流量等于 0.要证实这结论,简单的办法是跟踪函数

$$v(z)=\frac{q}{2\pi}\mathrm{Arg}(z-a)-\frac{q}{2\pi}\mathrm{Arg}(z+a)$$

的某一个分支的变化,来应用公式(11).

在处于加热到固定温度 $u=u_1$ 与 $u=u_2$ 的两个圆周之间的偏心环内,就发生那样的热场,所说的这两个圆周是我们热场中的两条等值线(在图 111 中用粗线来区别出).空间内,这热场对应着在由具有平行的轴的两个柱面所构成的管形中的一个热场.由对应的边值问题的解的唯一性(第 48 目),推出可以用固体的管壁来代替 u 的等值线(或,完全一样,来代替流体速度场中的流线)——这便是所谓*凝固原理*.

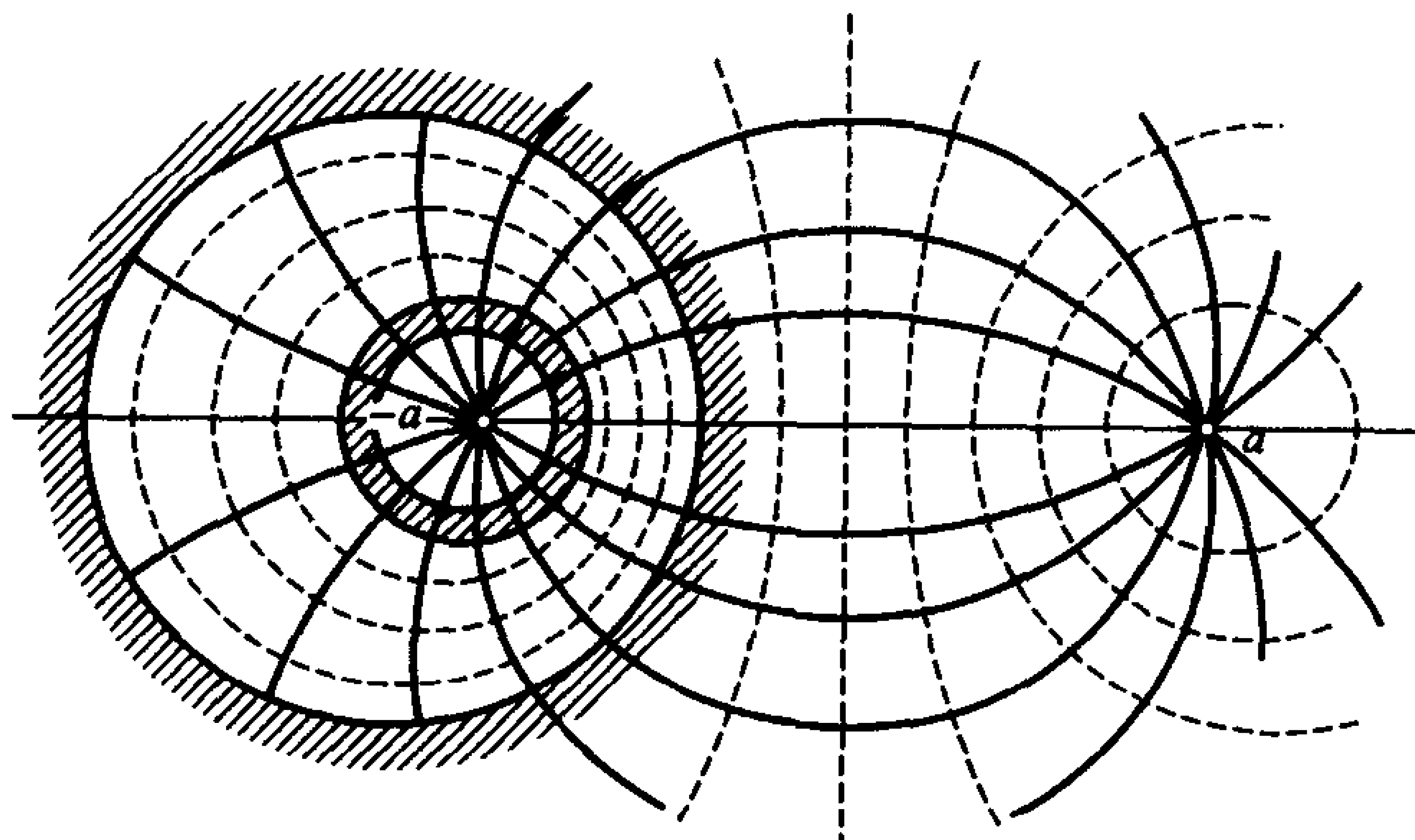


图 111

(3) 静电场 所谓静电场,是指一个区域,在这区域内的每一个点处都联系着一个场强向量

$$\boldsymbol{E}=E_x+iE_y,$$

即,作用在位于这个点处的单位电荷上的力的向量.我们考虑平面静电场,它们是对应于那些平行于一个平面的空间静电场的.从静电学中知道,经过任意一条闭曲线 C 的场强向量的流量等于

$$N=\int_C(\boldsymbol{E},\boldsymbol{n}^0)ds=4\pi e, \tag{14}$$

其中 e 是位于闭曲线 C 的内部的总电荷.因此,在任何一个点 z 处

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=\lim_{C\to z}\frac{N}{S}=4\pi\rho, \tag{15}$$

其中 ρ 是电荷在这个点 z 处的面密度,而 S 是曲线 C 所围的面积.线积分

$$A=\int_C(\boldsymbol{E},\boldsymbol{s}^0)ds=\int_C E_s ds \tag{16}$$

显然是表示静电场的力沿着路线 C 所作的功.向量 $\boldsymbol{E}$ 的沿着任何一条封闭路线的环量都等于0,因为静电场的维持并不需要耗费能量.事实上,假如沿着某一条封闭路线 C 的环量不等于0,那么,朝一定的方向绕行这路线无限多次,我们便会得到一个无限的能源(永动机)了.由此可知,在静电场内的任何一个点处都有

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0. \tag{17}$$

因此,静电场总是一个势场,这就是说,有一个单值函数 $v(x,y)$——**静电场的电势**——存在,使得

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}=-\operatorname{grad}v. \tag{18}$$

如果在区域 D 内没有电荷,那么在 D 内便处处有 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$.由此可以推出:有一个**力函数**

$$u(x,y)=\int_{L\ z_0}^{z}-E_y dx+E_x dy+\text{const} \tag{19}$$

存在(这函数在单连通区域内总是单值的,在多阶连通区域内则也许可以是个多值函数).同前面一样,容易证实:函数 $v(x,y)$ 的任何一条等值线,都在每一个点处与场中的对应向量相切,即,都是场中的一条向量曲线,换句话讲,都是场中的一条电场线.

比较公式(18)与(19),我们便看到,函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 满足柯西-黎曼条件,这就是说,它们是一对互相共轭的调和函数,而函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

是一个解析函数. $f(z)$叫做静电场的**复电势***. 场强向量可以用复电势来表达

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial x}=-i\overline{f'(z)}, \tag{20}$$

因之,所有那些表征静电场的量也都可以用复电势来表达. 例如,位于封闭路线 C 的内部的总电荷等于

$$e=\frac{1}{4\pi}\int_C f'(z)dz. \tag{21}$$

因此,我们看到,静电场也同流体的流速场完全类似——这两种向量场之间的区别(不考虑公式中那些非实质性的差异)仅是:在流速场的情形,复势能的两个组成部分都可能是多值的,而在静电场的情形,复电势的实数部分却总是单值的.

我们举一个简单的例子. 考虑由一个位于坐标原点 $z=0$ 处而其量为 e 的点电荷所产生的平面静电场. 它在空间内所对应的,是在点 $z=0$ 处垂直于 z 平面的一条无限直线 L 的静电场, L 上带着具有不变线密度的电荷 e (图 112). 我们来计算在点 $z=x+iy$ 处的静电场强度 $\boldsymbol{E}=E_x+iE_y$,即,作用在置于这个点处的单位电荷上的那个力. 为此,我们在 L 上引入坐标 h——从点 $z=0$ 量起的长度,并且注意到,由位于高度 h 处的电荷 edh 所产生的单元场强,在数量上等于

$$|d\boldsymbol{E}|=e\frac{dh}{r^2+h^2},$$

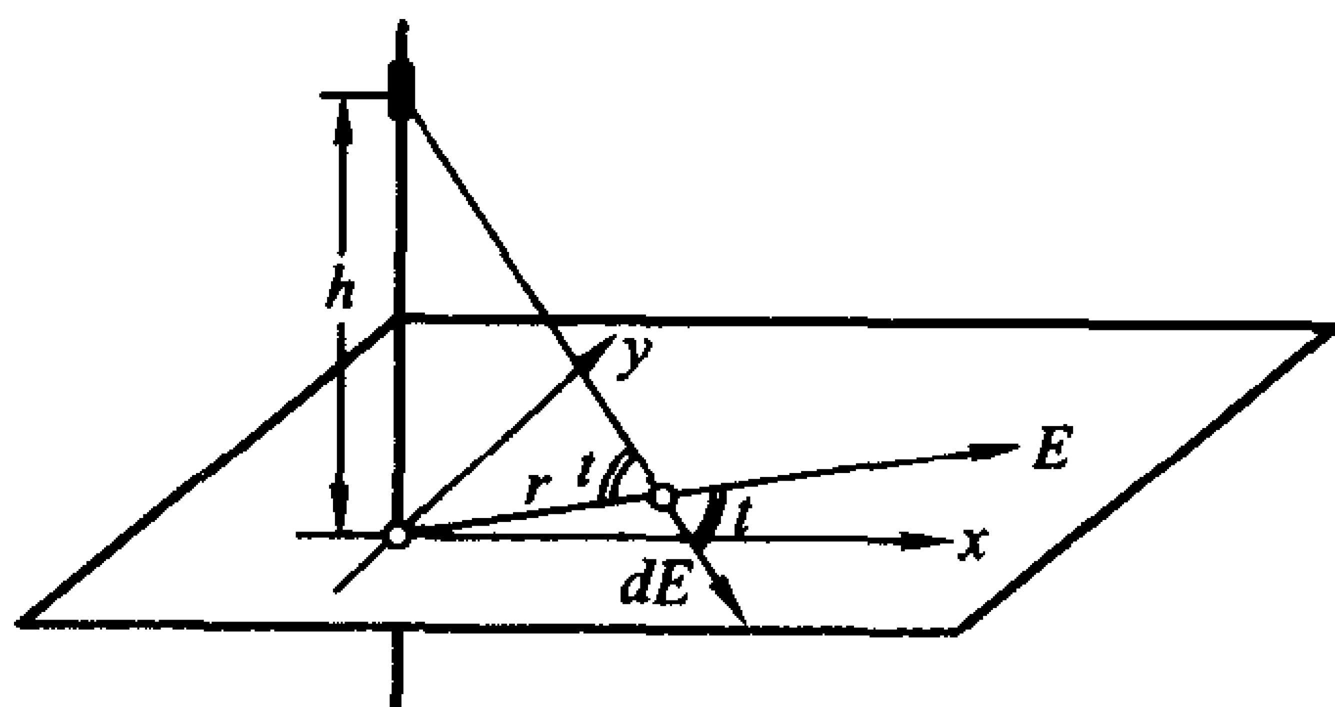


图 112

其中 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 由于向量 $\boldsymbol{E}$ 在 z 平面内,所以它的数量等于所有的单元场强 $d\boldsymbol{E}$ 在这平面上的投影的和,即,

$$|\boldsymbol{E}|=\int\cos t\,|d\boldsymbol{E}|=e\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos t}{r^2+h^2}dh=e\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{r}dt=\frac{2e}{r},$$

其中 t 是 $d\boldsymbol{E}$ 与 z 平面所成的角,

$$h=r\tan t,\quad dh=\frac{rdt}{\cos^2 t}=\frac{r^2+h^2}{r}dt$$

---

* 我们是按照电工学文献中所采用的那样来引入复电势的,显然,它与流体力学中所采用的复势能相差一个因子 i.

(图 112). 因此,在点电荷的平面静电场内,场强的大小是与点之间的距离成反比的,而不像在空间静电场内那样与距离的平方成反比.

考虑向量 $\boldsymbol{E}$ 的方向,我们得到

$$\boldsymbol{E}=\frac{2e}{r}\boldsymbol{r}^0=\frac{2e}{\bar{z}}. \tag{22}$$

由此可以看到,我们的静电场与一个具有强度 $N=4\pi e$ 的源的平面场完全相同(与上一目的例 1 相比较. 注意,公式(22)可以完全像在上一目例 1 中那样地来导出). 场的复电势可以按照公式(20)来求出

$$f(z)=-i\int_{z_0}^{z}\bar{\boldsymbol{E}}dz+c=2ei\,\mathrm{Ln}\frac{1}{z}+c. \tag{23}$$

(4) 电流的磁场 我们只限于讨论线电流组 I_k 的磁场. 根据电工学中的已知定律,直线电流 I 在与它的距离等于 r 处的场强向量 $\boldsymbol{H}$,是位于与电流垂直的平面内的,其数量等于 $\frac{2I}{r}$,其方向是沿着连接场中的点与电流线的最短线段的法线方向的,至于朝着法线的那一端则用右手螺旋定则来确定. 因此,在对应的平面场中,这向量就等于

$$\boldsymbol{H}=\frac{2Ii}{\bar{z}}. \tag{24}$$

这样的磁场中的复磁势,是函数

$$F(z)=U+iV=2I\ln z+c, \tag{25}$$

其中 U 是磁场的力函数, V 是磁势, c 是任意常数.

由 n 个分别与 z 平面相交于点 z_k 的线电流 $I_k(k=1,2,\cdots,n)$ 所构成的电流组的场强向量与复磁势,可以由表达式(24)与(25)相加而得到,分别等于

$$\boldsymbol{H}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2I_k i}{\overline{z-z_k}},\quad F(z)=\sum_{k=1}^{n}2I_k\ln(z-z_k)+c. \tag{26}$$

比较公式(25)与(23),我们便可以得出结论说:由交 z 平面于点 z_k 处的一些线电荷所产生的电场中的电场线与等电势线所构成的网格,与在同样那些点 z_k 处与 z 平面相交的一些线电流的磁场中磁感线与等磁势线所构成的网格是完全相同的. 在这时仅是磁感线与等磁势线互相交换了地位.

作为一个例子,我们来看由交 z 平面于点 $\pm a$ 处的两个方向相同而且强弱相等的线电流所产生的磁场. 这磁场的复磁势等于

$$F(z)=I\ln(z^2-a^2), \tag{27}$$

磁感线由方程

$$|z-a||z+a|=\mathrm{const} \tag{28}$$

来确定,这表示了它们是一些所谓双纽线(双纽线是那些与两个已知点——焦点——的距离的乘积是一个常数的点的几何轨迹,见图 113).

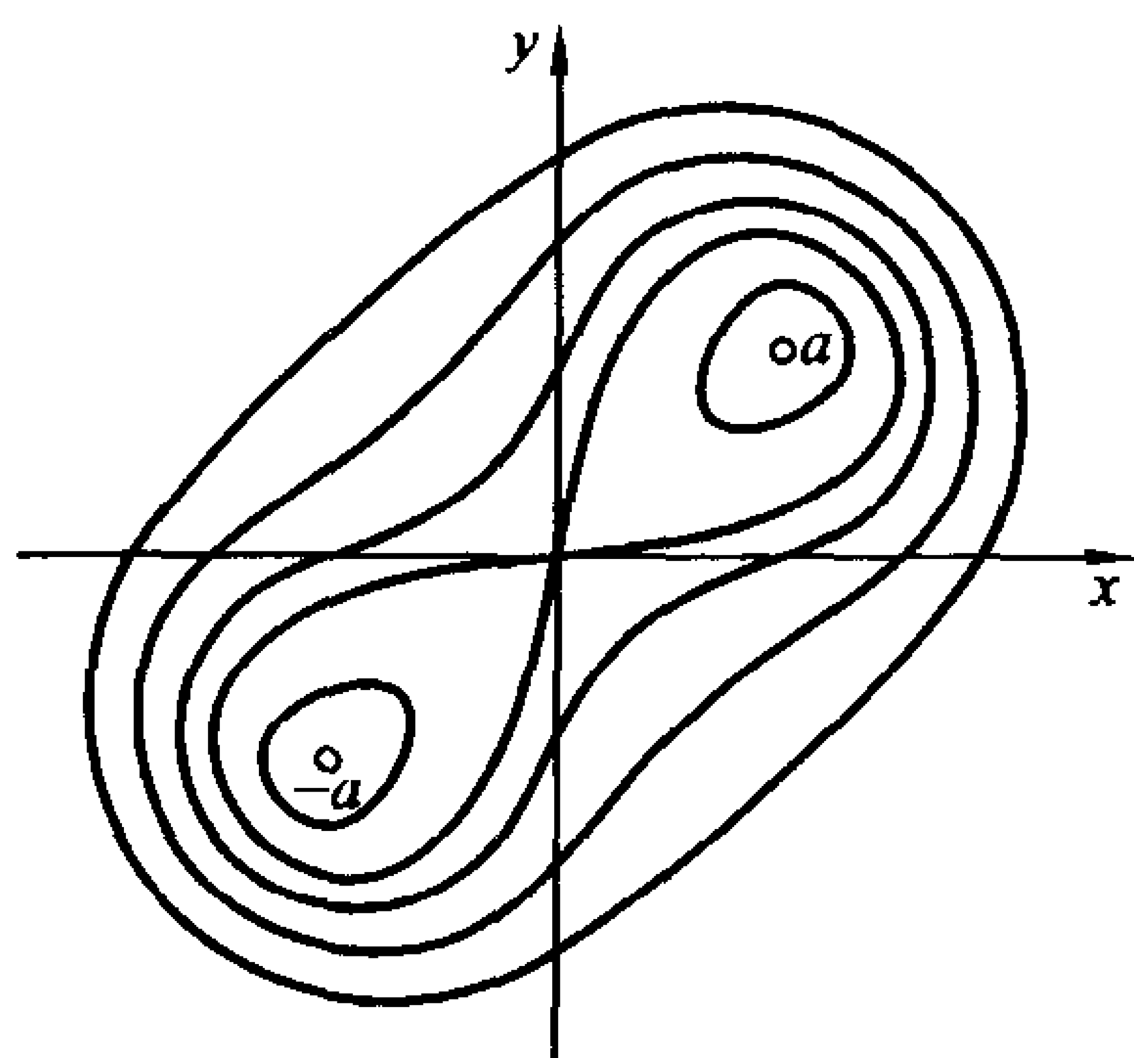


图 113

48. 边值问题 我们已经在上一目中看到,要研究平面向量场,只需知道它的复势能便够了.实用上的问题,通常可以归结到根据在这个场的边界上的一些已知条件(它们是由所给问题的本身物理条件来给出的)来确定这个场的复势能,或者,按照一般的说法,归结到解给定的边值或边界问题.这时,如果问题已经在物理学上正确设置了,那么,所给的条件便应当能够完全确定一个向量场,也就是说,复势能应当在可以相差一个常数项的范围内完全被确定.在这里,我们将举几个设置平面场理论的边值问题的最简单的例子,并且,为了确定起见,将使用流体力学中的术语.在例题中,我们也将考虑这些问题的解的其他解释.我们先从绕流上的三个问题开始.

(1) 闭曲线外部中的流体 我们假定,在向量场的区域 D 的内部含有无穷远点,区域 D 是由一条封闭曲线 C——浸没在流体内的一个物体的边界线——所围成的(D 是封闭曲线 C 的外部).设这物体以不变的速度 $-\mathbf{V}_\infty$ 向前运动,或者,完全一样,设物体固定不动而流体则以速度 $\mathbf{V}_\infty$ 向物体冲击.这时复势能的导数——与流体速度在复数意义上共轭的那个函数(见上一目中的(3)式)——应当是一个在无穷远处正则的在区域 D 内的单值解析函数.因此它在无穷远点的邻域内的洛朗展开式有形状

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)=\overline{\mathbf{V}}_\infty+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots. \tag{1}$$

于是从第 46 目中的公式(23)可以得出

$$c_{-1}\cdot 2\pi i=\Gamma+iN,$$

这里的 Γ 与 N 是沿着任何一条包围 C 的闭周线的环量与流量.但由于流体是绕着 C 流的,并且在 D 内没有源,所以 $N=0$.于是,对(1)求积分,我们便得出下面的复势能在无穷远点的邻域内的展开式

$$w=f(z)=\overline{\mathbf{V}}_\infty z+c+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z-\frac{c_{-2}}{z}-\cdots, \tag{2}$$

其中 c 是一个任意常数.环量 Γ 的大小应当是已知的——完全绕流问题的第一个边界条件就在于此.这个条件的物理意义我们将在下面说明(见第 49 目中的例(2)与例(3)).第二个边界条件是关于界线 C 的:根据绕流的条件,在周线 C 的任何一点处,流体速度的方向都应当是沿着 C 的切线方向的.换句话说,周线 C 应当是流线中的一条,即,在周线 C 上应当满足条件

$$v(x,y)=\text{const}. \tag{3}$$

我们要证明:当在无穷远处的速度 $\mathbf{V}_\infty$ 与环量 Γ 都已经给出时,这问题的解是唯

一的.设 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 是对应于问题的两个解的复势能,又

$$f(z)=f_1(z)-f_2(z).$$

显然,函数 $f(z)$ 在 D 内各处,包括无穷远点在内,都是单值而且解析的.它的虚数部分 $v(z)$ 在 C 上是个常数,在 D 内(包括无穷远点在内)处处都是个调和函数.按照狄利克雷问题的解的唯一性定理,应当有

$$v(z)\equiv \text{const},$$

而因之,

$$f(z)=\text{const}.$$

所以,我们的这两个复势能仅相差一个常数项,不影响速度的分布.

我们还要指出,在 $\Gamma=0$ 时的无环量的绕流的情形下,复势能

$$w=f(z)$$

实施一个把区域 D 映到某一段平行于 u 轴的线段的外部上去的双向单值映射.事实上,从 $f(z)$ 在无穷远点的邻域内的展开式

$$w=f(z)=\bar{\mathbf{V}}_\infty z+c-\frac{c_{-2}}{z}-\cdots$$

中可以看出:$f(z)$ 的展开式的主要部分具有形式 $\bar{\mathbf{V}}_\infty z$,所以,函数 $w=f(z)$ 实施在 z 平面与 w 平面的无穷远点的邻域之间的一个双向单值映射(这也可以由存在着

$$f'(\infty)=\bar{\mathbf{V}}_\infty\neq 0$$

而推知).因为 $f(z)$ 在区域 D 内有一个一阶极点(在无穷远点处),所以,根据辐角原理(第 23 目),对于足够大的 a 有

$$1-n(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)dz}{f(z)-a}=0,$$

其中 $n(a)$ 是 $f(z)$ 在区域 D 内的 a 值点的个数,曲线 C 是按照逆时针的方向来通过的.但是 $n(a)$ 是点 a 的只取整数值的连续函数,所以,对于函数 $f(z)$ 在周线 C 上所不取的所有的值 a 来说,它是常量,且

$$1-n(a)=0.$$

由此可见 $f(z)$ 在区域 D 内取了,并且只是一次取了它在界线 C 上没有取的值.界线 C 在映射 $w=f(z)$ 下的像是一段平行于 u 轴的直线段这事实,可以从边界条件(3)中得出.结论得证.

这问题可以推广到绕一组界线的绕流(复翼飞机)的情形中去.那时除掉在无穷远处的速度之外,还必须给出当绕行每一条界线时的环量的值.

(2) *在曲线带形内的流体* 设已给定两条曲线 C_0 与 C_1,它们只以它们在点 $z=\infty$ 处的端点为公共点,并设 D 是包含在这两条曲线之间的区域.要求在区域 D 内建立绕着 C_0 与 C_1 流的无涡流体,使其具有已知的通量 N,即,速度 $\mathbf{V}$ 通过任意一条连接曲线 C_0 与 C_1 的曲线 γ 的流量.

设 $w=f(z)$ 是所求的向量场的复势能.流体绕着 C_0 与 C_1 流这个条件可以归结为:在这两条曲线上函数 $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ 应当取某两个常数值,例如:

$$v(x,y)=\begin{cases}v_0, & \text{在 } C_0 \text{ 上},\\ v_1, & \text{在 } C_1 \text{ 上}.\end{cases} \tag{4}$$

按照第 46 目中的公式(11),通量

$$N=\int_\gamma (\boldsymbol{V},\boldsymbol{n}^0)ds=v_1-v_0, \tag{5}$$

因此,差 v_1-v_0是已知的.由于 $f(z)$仅是在可以相差一个常数项的程度内被确定的,所以,我们总可以取 $v_0=0, v_1=N$.

如果对 $f(z)$在无穷远处的性状不加以补充的限制,这问题仍是不确定的.事实上,例如考虑带形 $0<y<N$,其中 N 是已知的通量,那时函数

$$f_{n,\lambda}(z)=z+\lambda e^{\frac{\pi n z}{N}}$$

满足上面所提的一切条件,因为对于任何的整数 n 与实数λ,它的虚数部分

$$y+\lambda e^{\frac{\pi n x}{N}}\sin\frac{\pi n y}{N}$$

在带形的边界上取常数值 $v_0=0, v_1=N$.所以我们需要再补充假定:1) 曲线 C_0与C_1都具有光滑的曲率;2) 当 $z\to\infty$时,带形 D 的宽度、曲线 C_0与 C_1的曲率以及这两个曲率的导数,都保持为有界的;3) 只考虑在无穷远处具有有界速度的流体.

我们来证明:在这些假设下当通量 N 已给出时,在区域 D 内仅有唯一的绕C_0与C_1流的无涡流体存在.事实上,设 $f(z)$是任何一个满足问题中条件的流体的复势能,而 $z=\varphi(w)$是实施把带形 $0<\operatorname{Im} w<N$ 映到区域D 上去的共形映射的函数,并且 $\varphi(\pm\infty)=\pm\infty$*.显然,函数

$$F(w)=f[\varphi(w)]=U+iV \tag{6}$$

就是在带形 $0<v<N$ 内的一个绕着直线 $v=0$ 与 $v=N$ 流的而且具有已知通量N的流体的复势能.根据所给流体在无穷远处的速度是有界的这个条件,以及在第 29 目中在共形映射下的有关边界对应的定理 1.导数 $F'(w)=f'(z)\varphi'(w)$在无穷远处也是保持有界的.我们来考虑在带形 $0<v<N$ 内的调和函数$\frac{\partial V}{\partial u}=\operatorname{Im} F'(w)$.显然,它在这带形的边界上等于 0,而在封闭带形 $0\leqslant v\leqslant N$ 内是有界的.根据广义最大最小值原理(第 42 目中的定理 5),可以得出:在带形内处处有$\frac{\partial V}{\partial u}\equiv 0$,而这意味着$F'(w)=a$ 是一个实数的常数.由此得出 $F(w)=aw$ (我们舍去那个非本质的常数项),又由于函数 $V(w)=av$ 应当是在直线$v=0$ 上等于 0 而在直线 $v=N$ 上等于N的,所以 $a=1$,结果得出 $F(w)\equiv w$.于是从公式(6)我们得到 $f[\varphi(w)]=w$,即,$f(z)$应当是 $\varphi(w)$的反函数.问题的解的唯一性已经证明了.

* 点 $z=\infty$是区域 D 的边界的二重点,我们把这两个点中的一个记作 $-\infty$,另一个记作 $+\infty$.这时我们只关心一件事情:从绕行区域 D 的边界来看,要使得这两个点是像在水平的长方形带形中那样地放置着的.

同时也就证明了：所求的复势能 $w=f(z)$ 实施一个把区域 D 映到带形 $0<v<N$ 上去的双向单值的共形映射，并且具有对于无穷远点的对应关系：$f(\pm\infty)=\pm\infty$.

(3) 在曲线半平面内的流体　设已经给定了一条没有自己相交的点的曲线 C，它包含无穷远点，并且在复变量球面上是封闭的．让我们用 D 来表示由曲线 C 所围成的那两个区域中的一个．现在要求在区域 D 内，建立一个绕曲线 C 流而且具有数量已知的无穷远处速度 $|\boldsymbol{V}_\infty|$ 的流体．

如果再补充假定：在所有的点处，包括无穷远点在内，曲线 C 都具有连续可微的曲率，并且只考虑具有有界速度的流体，那么，解的唯一性便可以完全照上一个问题中那样地来证明（只需把带形换成半平面就行）．

所求的复势能 $w=f(z)$ 实施一个在条件

$$f(\infty)=\infty,\quad |f'(\infty)|=|\boldsymbol{V}_\infty|$$

下把区域 D 映到上半平面上去的共形映射．

作为一个例子，我们来说明当考虑静电场时，在问题(1)－(3)中所必须作的一些变形．在处处用术语“所绕流的界线”的地方，都要用术语“导体”（说得更精确一点，“垂直于 z 平面的导体柱面的截痕”）来代替，“速度”用“场强”来代替，“流函数”用“电势”来代替，“势函数”用“力函数”来代替，“通量”用“电势差”来代替，等等．在问题(1)中，给出环量 Γ 要用给出总电荷

$$e=\frac{1}{4\pi}\int_C f'(z)\,dz=\frac{ic_{-1}}{2}$$

（见第 47 目中的(21)式）来代替，因此，在公式(1)中 $c_{-1}=-2ei$，并且公式(2)中带着对数的那一项具有形式 $2ei\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{1}{z}$（参看第 47 目中的(23)式）．

最后，我们来举两个稍为复杂一点的边值问题的例子．

(4) 碰撞问题　这类问题的重要部分可以用下述图形来包括．在容器 A 内有静止的或流动着的流体，流体中浮着一些固体 B_k $(k=1,2,\cdots,n)$（图 114*）．在时间 $t=0$ 的瞬时，一些冲击力作用到这些物体上，使得物体 B_k 瞬间得到一个速度增量 $\boldsymbol{V}_k^{(i)}$（碰撞）．现在要想求出速度场 $\boldsymbol{V}^{(i)}$ 以及在紧接着碰撞后的那一瞬时，流体中冲击压力 $P^{(i)}$ 的分布．

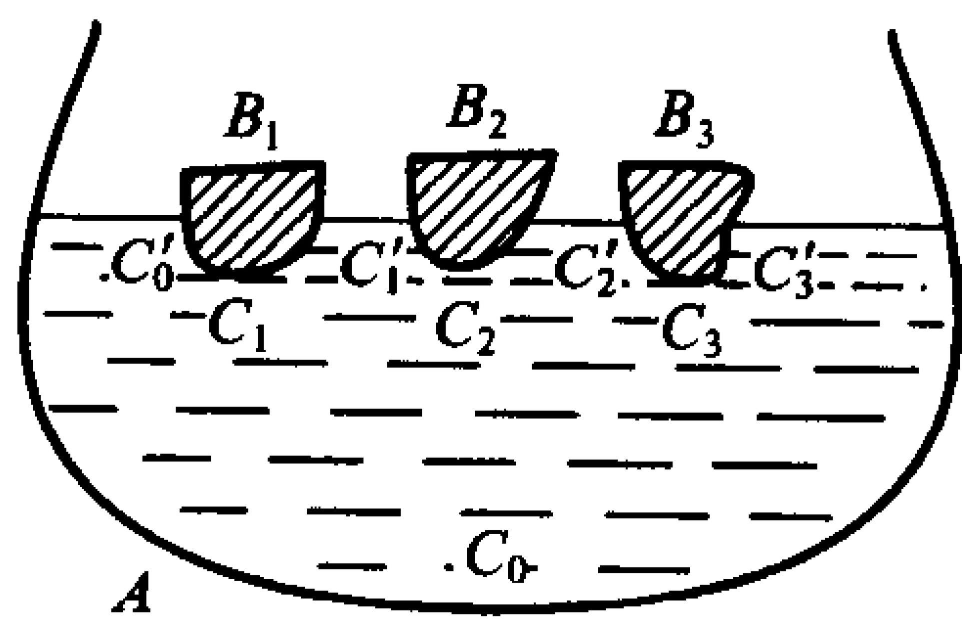


图 114

我们转到问题的数学提法上来，并且，为简单起见，只限于讨论在碰撞之前流体

* 当然，我们假定：容器与浮着的物体都是呈柱面的形状，流体的运动是平行于一个平面的．在图 114 中表示了垂直于柱面母线的一个截面．

是静止的那种情形. 我们知道,如果没有很大的冲击力,碰撞之后的运动便形成一个势场,并且,在紧接着碰撞后的那一瞬时,速度的势函数 $u(x,y)$满足条件

$$\rho u = P^{(i)}, \tag{7}$$

其中 ρ 是流体的密度,$P^{(i)}$是流体中的冲击压力. 我们把流体所占的区域记作 D,把它的边界记作 C. 曲线 C 是由下述那些弧所组成的:弧 C_0表示容器的内壁,弧 C_k表示物体B_k的表面,以及弧 C'_k表示在相继的两段弧C_k与C_{k+1}之间的那一段流体的自由面(图 114). 对于速度的势函数 $u(x,y)$,我们有下列的边界条件:

1) 沿着容器的内壁 C_0有

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0, \tag{8}$$

因为,从绕流的条件我们有

$$v(x,y)=\text{const},$$

于是由对于方向 $\boldsymbol{s}^0,\boldsymbol{n}^0$写出的柯西-黎曼条件,我们便得到

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}=0.$$

2) 沿着流体与物体接触面的弧 C_k有

$$\frac{\partial u}{\partial n}=(\boldsymbol{V}^{(i)},\boldsymbol{n}^0), \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{n}^0$是 C_k的内法线的单位向量. 这时我们认为不发生流体落在容器内壁外面的现象(空隙现象),式(9)可以由在 $u(x,y)$的梯度 $\text{grad}\ u=\boldsymbol{V}^{(i)}$与其沿一方向的导数之间的已知关系而得到. 物体 B_k的冲击速度看作已知的,所以在(9)式右端中的函数是已知的.

3) 沿着弧 C'_k (即,沿着流体的自由表面)有

$$u(x,y)=0, \tag{10}$$

因为,在自由表面上压力已经终止了,所以 $P^{(i)}=0$,于是(10)式便可以从(7)得出.

在区域 D 内求出了$u(x,y)$之后,我们便得到了速度 $\boldsymbol{V}=\text{grad}\ u$ 的分布,并且可以按照公式(7)来确定压力.

这个边值问题是调和函数理论中的混合边值问题的一个特例,这种问题的研究与求解我们将在第 55 目中陈述.(也可参阅第 49 目中的例 9).

(5) 带有流股障碍的绕流　所谓带有流股障碍的绕流,是在这流动中,流线中一条从无穷远处向所绕物体的某一个点 B 行进,在这个点 B 处这流线被分成两支,每一支都沿着所绕物体的外壁行进,以到某两个点 C_1与 C_2处,然后再离开这物体的外壁,重新流向无穷远(见图 115). 这时我们假定,自由流股 C_1A_1与 C_2A_2把运动地带

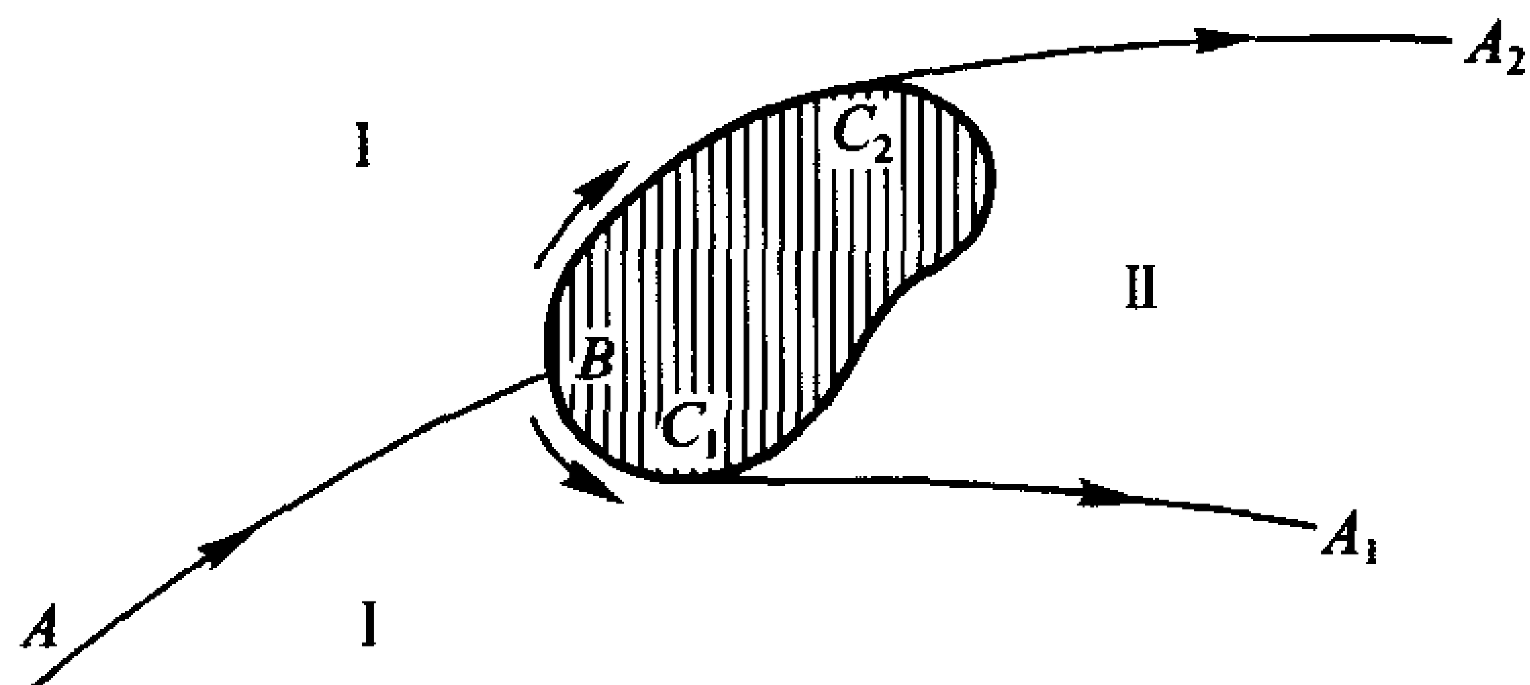


图 115

Ⅰ同静止地带Ⅱ区分开,使得沿着这两支流股发生了速度的间断* .我们假设在地带Ⅰ内运动形成一个势场,在静止地带Ⅱ内速度处处等于0,因此,压力是个常量(参看第47目中的伯努利-欧拉公式(4)),流股 C_1A_1 与 C_2A_2 可以看作是流体的自由边界.我们达到下述的边值问题:

1) 在物体外壁的 C_1BC_2 这一段(它的长度是未知的)上有绕流,这就是说,在这一段上

$$v(x,y)=\text{const}; \tag{11}$$

2) 在自由流股 C_1A_1 与 C_2A_2 (它们的形状是未知的)上,速度的大小是个常量:

$$|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{V}_\infty|, \tag{12}$$

这可以根据伯努利-欧拉公式,从静止地带的压力是个常量这性质而得出.

解这个边值问题的方法,我们将在第65目中进行.

在下面的叙述中,我们还不止一次地遇到各种类型的边值问题.

49. 例题.应用

(1) 茹科夫斯基公式 在第47目中,我们已经得出了关于被绕流的截面的浮力的C.A.恰普雷金公式

$$\overline{\boldsymbol{P}}=X-iY=\frac{\rho i}{2}\int_C[f'(z)]^2dz. \tag{1}$$

考虑到在上一目中所得出的,在封闭曲线的绕流问题中,复势能的导数在无穷远处的展开式

$$f'(z)=\overline{\boldsymbol{V}}_\infty+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}+\cdots,$$

并对于积分(1)应用留数定理,我们便得到

$$\overline{\boldsymbol{P}}=\frac{\rho i}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{\Gamma\overline{\boldsymbol{V}}_\infty}{\pi i}=i\rho\Gamma\overline{\boldsymbol{V}}_\infty.$$

转换成在复数意义中的共轭量,便得出著名的H.E.**茹科夫斯基定理**(1904年):

---

* 这样的图形在一定程度上反映了在实际流体中运动着的物体的可以观察到的速度间断.但是,在实际的流体中,地带Ⅱ并不静止,而是充满了涡旋运动的,而且并不延伸到无穷远处.

$$P = -i\rho\Gamma V_\infty. \tag{2}$$

也就是作用在被绕流的周线上的浮力，其大小等于环量、密度以及无穷远处速度的大小的乘积，其方向是把 V_∞ 的方向迎着环量转一个直角（当 $\Gamma>0$ 时，按照顺时针方向转；当 $\Gamma<0$ 时，按照逆时针方向转）.

（2）对圆柱面的绕流　首先我们来求绕圆周 $|z|=R$ 流的在无穷远处具有已知速度 $V_\infty=v_\infty e^{i\theta}$ 的无环量流体. 按照上一目中所证明的，这流体的复势能实施一个把圆的外部映到实轴的一段线段的外部上去的共形映射. 这样的共形映射可以由一个茹科夫斯基函数

$$w=k\left(\frac{z}{R}+\frac{R}{z}\right)$$

来实施，其中 k 是一个实常数. 但是对于这个函数说，以 $w'(\infty)=\dfrac{k}{R}$ 取代 $\bar{V}_\infty=v_\infty e^{-i\theta}$. 所以，为了得到具有已知的无穷远处速度 V_∞ 的流体的复势能，可以在最后的公式中用 $ze^{-i\theta}$ 取代 z，并且令 $k=Rv_\infty$，我们得到

$$w=\bar{V}_\infty z+\frac{V_\infty R^2}{z}. \tag{3}$$

所得到的无环量的流体，再加上一个也绕着圆周 $|z|=R$ 流的纯环量流体 $\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\mathrm{Ln}\,z$，我们便得出了这问题的最后的解

$$w=f(z)=\bar{V}_\infty z+\frac{V_\infty R^2}{z}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\mathrm{Ln}\,z. \tag{4}$$

流体的临界点，即，使流体速度等于 0 的点（参看第 47 目），由方程

$$z^2+\frac{\Gamma}{2\pi i\bar{V}_\infty}z-e^{2i\theta}R^2=0$$

来确定. 由此，令 $|V_\infty|=v_\infty$，我们得到

$$z_{\text{kp}}=\frac{1}{4\pi\bar{V}_\infty}\left(\Gamma i\pm\sqrt{16\pi^2v_\infty^2R^2-\Gamma^2}\right).$$

由此可见，当 $|\Gamma|\leqslant 4\pi v_\infty R$ 时，我们有 $|z_{\text{kp}}|=\dfrac{1}{4\pi v_\infty}\sqrt{16\pi^2v_\infty^2R^2}$，并且这两个临界点都在圆周 $|z|=R$ 上；当 $|\Gamma|>4\pi v_\infty R$ 时，我们有

$$|z_{\text{kp}}|=\frac{1}{4\pi v_\infty}\cdot\left|\Gamma\pm\sqrt{\Gamma^2-16\pi^2v_\infty^2R^2}\right|\neq R,$$

并且由于二次方程的根的模的乘积等于 R^2，所以其中一个临界点在圆 $|z|<R$ 内，另一个在圆外.

我们来更详细地考虑第一个情形. 在圆周上令 $z=Re^{i\varphi}$，我们有

$$|f'(z)|=\left|v_\infty(e^{-i\theta}-e^{i(\theta-2\varphi)})-\frac{\Gamma i}{2\pi R}e^{-i\varphi}\right|=\left|2v_\infty\sin(\varphi-\theta)-\frac{\Gamma}{2\pi R}\right|, \tag{5}$$

为简单起见,暂且令 $\theta=0$,由此便得到关于临界点的下述两个关系式

$$\varphi_1=\arcsin\frac{\Gamma}{4\pi Rv_\infty},\quad \varphi_2=\pi-\varphi_1. \tag{6}$$

在点 $Re^{i\varphi_2}$ 处,流体的流向这个点的那条流线被分成两条:一条沿着圆周的上半段弧流,另一条沿着圆周的下半段弧流. 在点 $Re^{i\varphi_1}$ 处,这两条流线重新会合起来(图 116(a)). 这两个点中,第一个点叫做流体的**分支点**,第二个点叫做流体的**会合点**.

对于无环量的流体,临界点是 $\pm R$. 环量有使这两个点互相接近的趋势——当 Γ 增加时,两个临界点都向上移动,当

$$\Gamma=4\pi v_\infty R$$

时,这两点合并成一个点(图 116(b)). Γ 的再进一步增大,就要导致形成封闭的流线(图 116(c))——我们已经得到第二种情形了.

如果在无穷远处的速度 $\boldsymbol{V}_\infty$ 有辐角 ϑ,那么不过是把流体的整个图形旋转一下而已,于是关于会合点的公式(6)将具有形状:

$$\Gamma=4\pi v_\infty R\sin(\varphi_1-\vartheta). \tag{7}$$

注意,在我们这个问题中,可以用给出流体的会合点 $Re^{i\varphi_1}$ 来代替给出环量 Γ,因为它们是用简单的公式(7)互相联系着的. 用会合点来表达,茹科夫斯基定理中浮力的大小可表为

$$|\boldsymbol{P}|=4\pi\rho Rv_\infty^2|\sin(\varphi_1-\vartheta)|, \tag{8}$$

流体的速度可表为(参看(5)式)

$$|\boldsymbol{V}|=2v_\infty|\sin(\varphi-\vartheta)-\sin(\varphi_1-\vartheta)|. \tag{9}$$

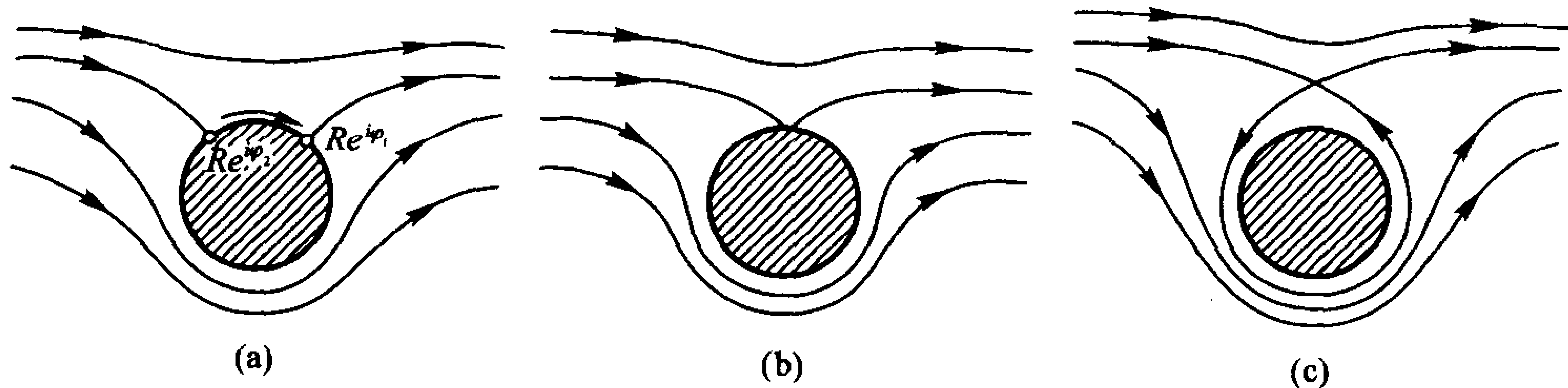


图 116

(3) *对任意截面的绕流. 恰普雷金条件*　设给定任何一个由封闭曲线 C 所围成的截面,又函数

$$\zeta=g(z),\quad g(\infty)=\infty,\quad g'(\infty)=1 \tag{10}$$

实施一个把 C 的外部映到圆的外部 $|\zeta|>R$ 上去的共形映射. 于是,若绕这个具有已知会合点 z_1 与已知无穷远处速度 $\boldsymbol{V}_\infty$ 的截面流的流体的复势能显然将是函数

$$w=\boldsymbol{V}_\infty g(z)+\frac{\boldsymbol{V}_\infty R^2}{g(z)}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\mathrm{Ln}\,g(z), \tag{11}$$

其中 R 可由规定条件(10)来完全确定,Γ 可以用流体的会合点的像 $\zeta_1=Re^{i\varphi_1}$ 根据公

式(7)来求出.

设被绕流的柱面具有尖锐的边缘,使得它的截痕 C 在某一个点 z_0 处有一个尖端,在这尖端处左右切线之间的角度等于 $\alpha\pi$ $(0\leqslant\alpha<1)$.那么,从共形映射在角点处的性状(见第 37 目)可以知道,在这个点的邻域内

$$\zeta=g(z)\approx A(z-z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}}+\zeta_0, \tag{12}$$

因此,导数

$$\frac{d\zeta}{dz}\approx B(z-z_0)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} \tag{13}$$

在点 z_0 处变成无限大*(A 与 B 是某两个异于 0 的常数,$\zeta_0=g(z_0)$).

C.A.恰普雷金曾提出了一个想法:在对于带有尖端点 z_0 的截面的绕流中,流体的会合点在黏性与涡旋状态的影响之下,将转移到这个尖端点 z_0 处(恰普雷金条件).于是,按照前面的例题,映射(4)的导数$\frac{dw}{d\zeta}$(用 ζ 代换 z)在点 $\zeta_0=g(z_0)$ 处有一个一阶零点,这就表示了,在点 z_0 的邻域内我们有

$$\frac{dw}{d\zeta}\approx C(\zeta-\zeta_0)=D(z-z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}} \tag{14}$$

(我们利用了表达式(12),C 与 D 都是常数).

把(13)与(14)两式联合起来,我们便有:在 z_0 的邻域内

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}\approx BD(z-z_0)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}},$$

这就是说,由恰普雷金条件可以得出,在截面的尖端边缘附近,速度是有界的.

对于带有一个尖端边缘的那些界线,恰普雷金条件单值地确定了环量的值(参看公式(7)).

(4) 对于茹科夫斯基断面的绕流 在第 34 目(例题 1)中已经证明过,函数

$$\omega=z+\sqrt{z^2-a^2} \tag{15}$$

把具有参数 h 与 d 的茹科夫斯基断面的外部映到一个圆心在点 $\omega_0=ih-de^{-\frac{\alpha}{2}i}$ 处而半径为 $R_0=\sqrt{a^2+h^2}+d$ 的圆心 C' 的外部,其中 $\frac{\alpha}{2}=\arctan\frac{h}{a}$(参看图 117 与图 63).函数(15)在无穷远处的导数等于 2,因此,对于茹科夫斯基断面,函数 $\zeta=g(z)$ 的形状是

$$\zeta=\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)=\frac{1}{2}(z-\omega_0+\sqrt{z^2-a^2}),$$

而由这断面所映射成的圆周的半径,即等于

$$R=\frac{R_0}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+h^2}+d).$$

---

* 严格说来,在公式(12)和(13)中可能还有对数乘因子,这因子不改变所作的推导.

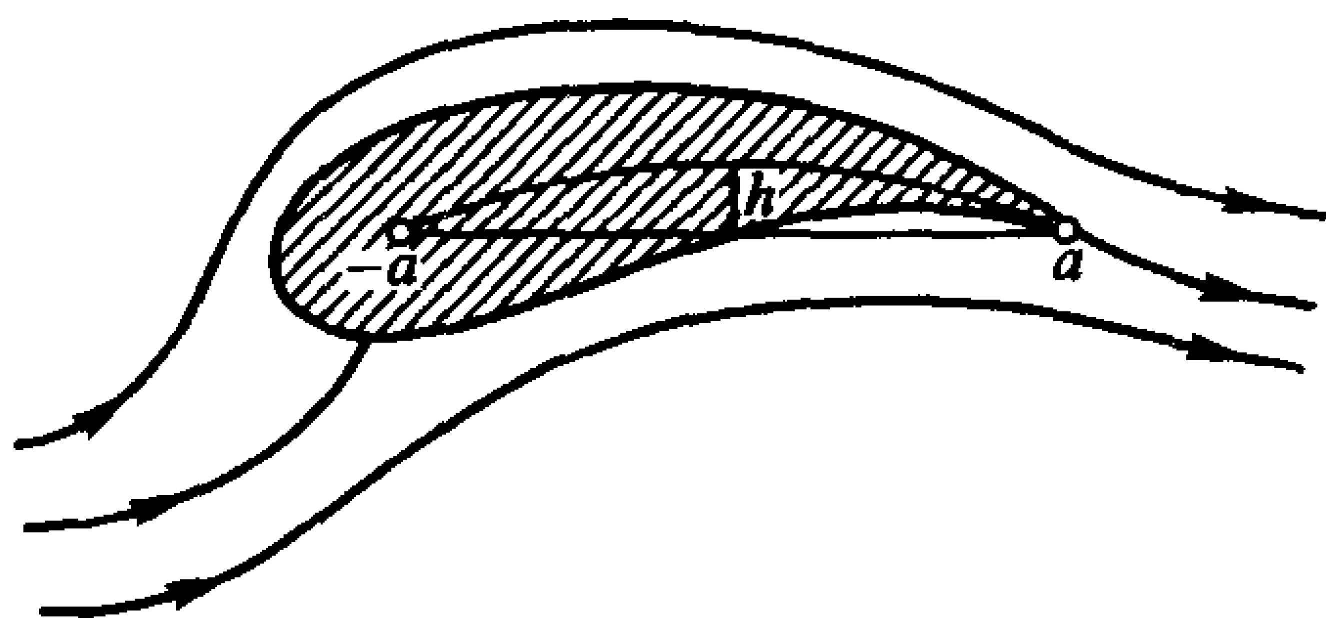


图 117

把这个值代入(11)式,我们便得出了对于茹科夫斯基断面的绕流的复势能.

从图 62 中可以看到,这断面的尖端点在 ζ 平面内的像的辐角等于 $-\frac{\alpha}{2}$ ($\zeta_1 = Re^{-i\frac{\alpha}{2}}$),所以根据恰普雷金条件以及公式(7),环量

$$\Gamma = -2\pi v_\infty(\sqrt{a^2+h^2}+d)\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right), \tag{16}$$

于是根据茹科夫斯基定理,浮力的大小等于

$$|\boldsymbol{P}| = 2\pi\rho v_\infty^2(\sqrt{a^2+h^2}+d)\left|\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)\right|. \tag{17}$$

(5) 平行板电容器端缘附近的静电场 如果在研究平行板电容器内部的静电场时,在实际上可以把这个静电场看作均匀的,那么在两端附近,这均匀性便遭到严重破坏,而必须作专门的计算了.在考虑接近电容器一端的静电场时,为了简单起见,我们将略去第二端的影响,并且把电容器表示成两个半平面的形状,一个位于另一个的上方.我们把电容器两板之间的距离记作 $2h$,把它们的电势分别记作 $\pm V$.

问题可以归结到计算在两条平行的半直线(电容器的两板在垂直于两板边缘的平面内的截痕)的外部的平面场,即,可以归结到第 48 目中的边值问题 2.复电势

$$w = f(z)$$

实施一个把静电场的区域映到带形 $-V<\mathrm{Im}\,w<V$ 上去的映射,这映射使下述点的对应关系成立:

$$f(A) = -\infty, \quad f(C) = \infty.$$

它的逆映射我们已经在第 39 目的例题 3 中得出过:

$$z = \frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}w}+\frac{\pi}{V}w\right) \tag{18}$$

(见第 39 目中的公式(13),不过我们已互换了 z 与 w 的地位,对带形作了一个相似变换,并舍去了非实质性的常数项).

在图 118 中表示了静电场的等电势线与电场线.它们的参数方程,可以分别在 $v=\mathrm{const}$ 或 $u=\mathrm{const}$ 时把公式(18)中的实数部分与虚数部分分开而得出的那两个关系式

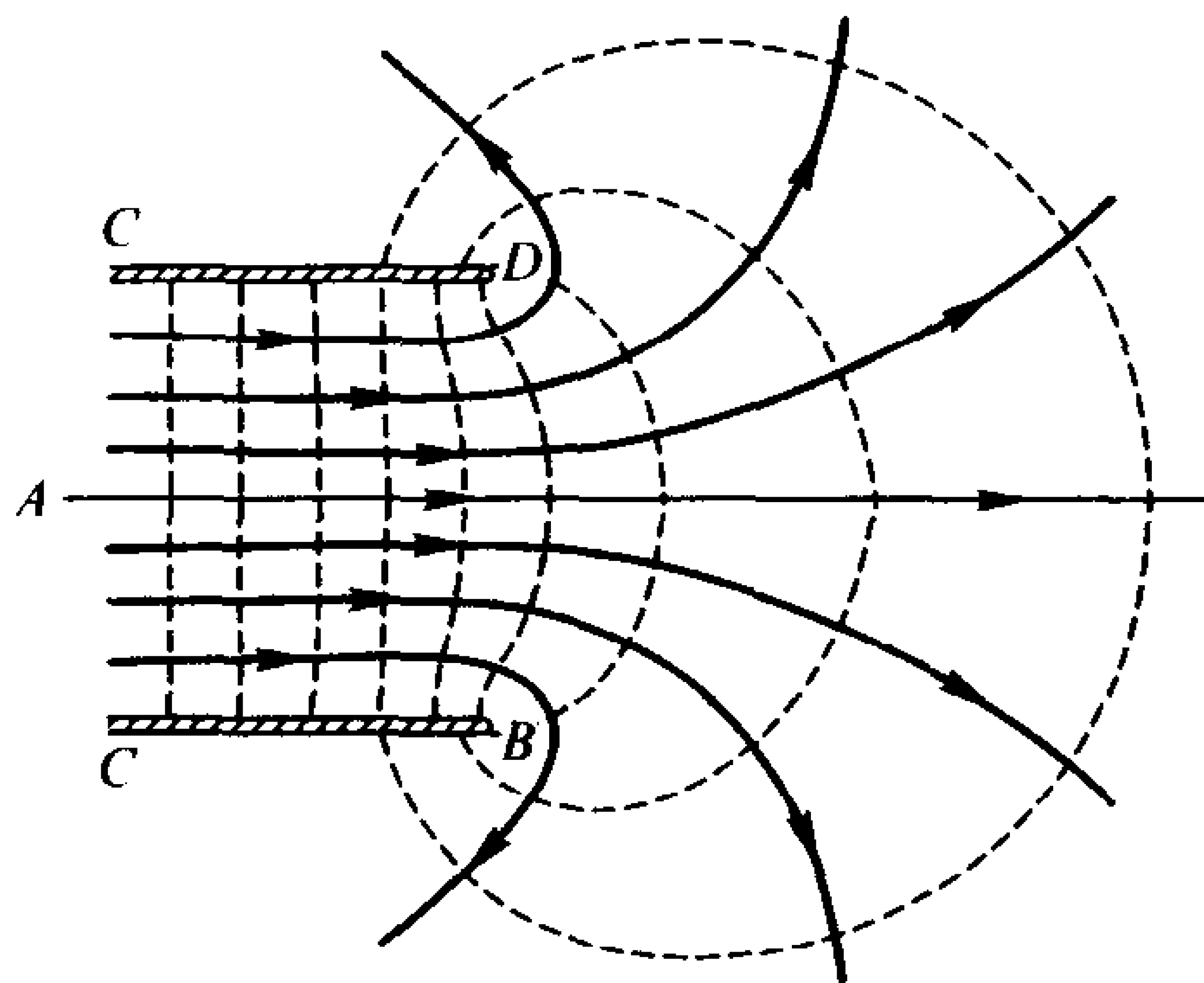


图 118

$$x=\frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v+\frac{\pi}{V}u\right),$$
$$y=\frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}u}\sin\frac{\pi}{V}v+\frac{\pi}{V}v\right) \tag{19}$$

(我们令 $z=x+iy, w=u+iv$). 根据第 47 目中的公式(20),场强等于

$$\boldsymbol{E}=-i\overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)}=-\frac{i}{\overline{\left(\frac{dz}{dw}\right)}}=-i\frac{V}{h}\frac{1}{1+e^{\frac{\pi}{V}\bar{w}}}. \tag{20}$$

在电容器的内部,即,在 z 接近于点 A 时,$\bar{w}$ 接近于 $-\infty$,所以,场强 $\boldsymbol{E}\approx -i\dfrac{V}{h}$接近于均匀静电场的场强. 当 z 接近电容器的边缘时,$\bar{w}\to\pm Vi$,所以场强无限制增大.

我们来跟踪场强的大小 $|\boldsymbol{E}|=\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ 沿着等电势线的变化. 由于解析函数的导数的值同计算导数时所取的方向无关,所以我们可以按照电力线 $u=\text{const}$ 的方向来计算它. 于是 $|dw|=|dv|$, $|dz|=ds$,这里的 ds 是电场线的弧的微分,可以在公式(19)中令 $u=\text{const}$ 来得出

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\frac{h}{V}\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u}+2e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v+1}\,dv,$$

因此,

$$|\boldsymbol{E}|=\frac{dv}{ds}=\frac{V}{h}\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u}+2e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v+1}}. \tag{21}$$

要求出 $|\boldsymbol{E}|$ 沿着等电势线的极大值,只须固定 v 的值,求根号下的表达式对于 u 的极小值便够了. 当 $\cos\dfrac{\pi}{V}v$ 是正数时,即,当 $\dfrac{\pi}{V}|v|<\dfrac{\pi}{2}$,亦即 $|v|<\dfrac{V}{2}$ 时,极大极小值存在的必要条件 $e^{\frac{\pi}{V}u}+\cos\dfrac{\pi}{V}v=0$ (这是使(21)式中根号下的表达式对于 u 的导

数等于 0 而得到的)显然不能满足.沿着这样的等电势线,场强 $|\boldsymbol{E}|$ 是单调地变化的,既没有极大值,也没有极小值.对于 $v=\pm\frac{V}{2}$,场强

$$|\boldsymbol{E}|=\frac{V}{h}\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u}+1}}$$

在 $u=-\infty$ 时,即,在电容器的左端处,达到极大值.如果构造一个电容器,使它的两板恰具等电势线 $v=\pm\frac{V}{2}$ 的形状*(图 118 中的粗线),那么对于这样的电容器来说,当接近端边缘时场强将减小,而不会像对于平行板电容器那样地无限增大.这种电容器叫做罗果夫斯基电容器.

(6) 在电机间隙内的磁场 考虑在电机的转子与定子之间的间隙内,邻近转子的凹槽处的磁场.我们将把转子与定子的半径及间距认为是非常大的,使得这个磁场与平行于平面的场相差很微(在图 119(a)内,表示了机器在垂直于转动轴的平面中的截面).我们用 $2H$ 来记转子的凹槽的宽度,由于在实际上那些透入凹槽的场线仅有极小部分能够达到它的底部,所以这凹槽的深度可以当作无限大.我们用 h 来记在铁之间的空隙的大小,即,在定子与转子之间的距离,略去其他凹槽的影响,我们假定:这空隙是一条两端都无限的带形.作了这些简化之后,我们所关心的这个磁场的区域,便呈在图 119(b)中所画出的那个五角形的形状.我们假设,转子边界的截痕 $A_1A_6A_5A_4A_3$ 上带着势能 V,而定子边界的截痕 $A_1A_2A_3$ 上的势能则为 0 (假定铁的磁导率是无限大).

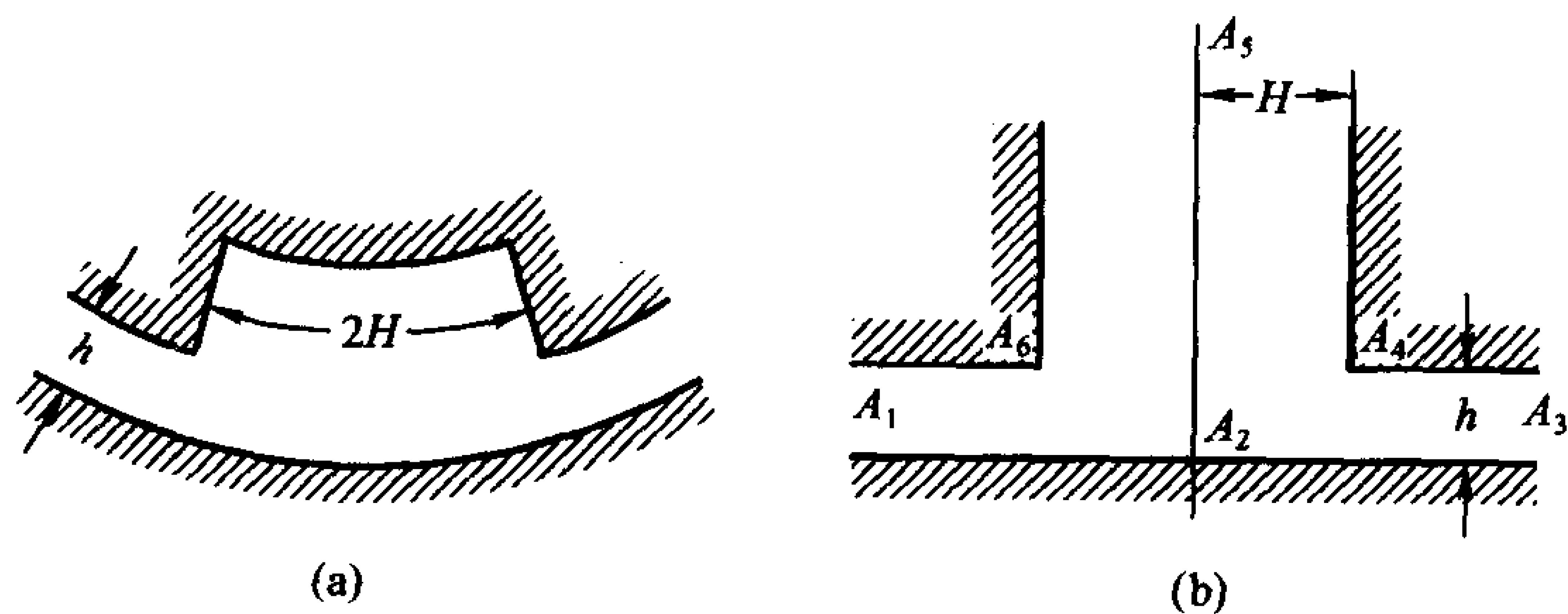


图 119

这问题属于第 48 目中的边界问题 2 的类型,可以归结到一个把这磁场区域映到带形 $0<\operatorname{Im} w<V$ 上去的共形映射

---

* 由表达式(19),对于这样的曲线有

$$x=\frac{h}{V}u,\quad y=\pm\frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}u}+\frac{\pi}{2}\right),$$

因此

$$y=\pm\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{\pi}e^{\frac{\pi}{h}x}\right).$$

$$w=f(z),\quad f(A_1)=-\infty,\quad f(A_3)=\infty.$$

在第 39 目中,我们已经得到过把上半平面映到这磁场的区域上的映射

$$z=z(\omega)=\frac{2i}{\pi}\left(h\arctan\frac{h\omega}{H\sqrt{\omega^2-a^2}}+H\operatorname{arth}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-a^2}}\right),\tag{22}$$

其中 $a^2=\dfrac{H^2+h^2}{H^2}$,这时 ω 平面中实轴上的线段$(-1,1)$变换成直线 $A_1A_2A_3$,实轴的其余部分变换成 $A_3A_4A_5A_6A_1$ (见第 39 目中的公式(23),不过我们改变了变量的记号).然后,先应用一个把上半 ω 平面映到带形 $0<\operatorname{Im} w<V$ 上去的辅助的具有必须的边界对应关系的映射

$$w=\frac{V}{\pi}\ln\frac{1+\omega}{1-\omega}=\frac{2V}{\pi}\operatorname{arth}\omega,\tag{23}$$

再从方程(22)与(23)中消去 ω,我们便得出所求复势能的反函数.

我们来求磁感应强度向量 $\boldsymbol{B}$ 的大小,在我们这个情形中磁感应强度与 $\boldsymbol{H}$ 相同:

$$|\boldsymbol{B}|=\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{\left|\dfrac{dw}{d\omega}\right|}{\left|\dfrac{dz}{d\omega}\right|}=\frac{2V}{\pi}\frac{1}{|1-\omega^2|}\cdot\frac{1}{\dfrac{2H}{\pi}\left|\dfrac{\sqrt{\omega^2-a^2}}{\omega^2-1}\right|}$$

$$=\frac{V}{H}\frac{1}{|\sqrt{\omega^2-a^2}|}\tag{24}$$

(在计算导数时,我们利用了表达式(23)与(22)).

要描述电机的特征,最重要的是知道磁流的脉动,即,在定子上的最小磁感应强度与最大磁感应强度的比.由物理学上的考虑显然可以知道:最小的磁感应强度 $B_{\min}$ 在与转子的凹槽相对处,即点 A_2 处被达到;而最大的磁感应强度 $B_{\max}$,则在与凸出部分的中点相对处,即点 A_1 处被达到.因为点 A_2 对应于 $\omega=0$,点 A_1 对应于 $\omega=-1$,因此,所求的比等于*

$$\frac{B_{\min}}{B_{\max}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{h}{\sqrt{H^2+h^2}}.\tag{25}$$

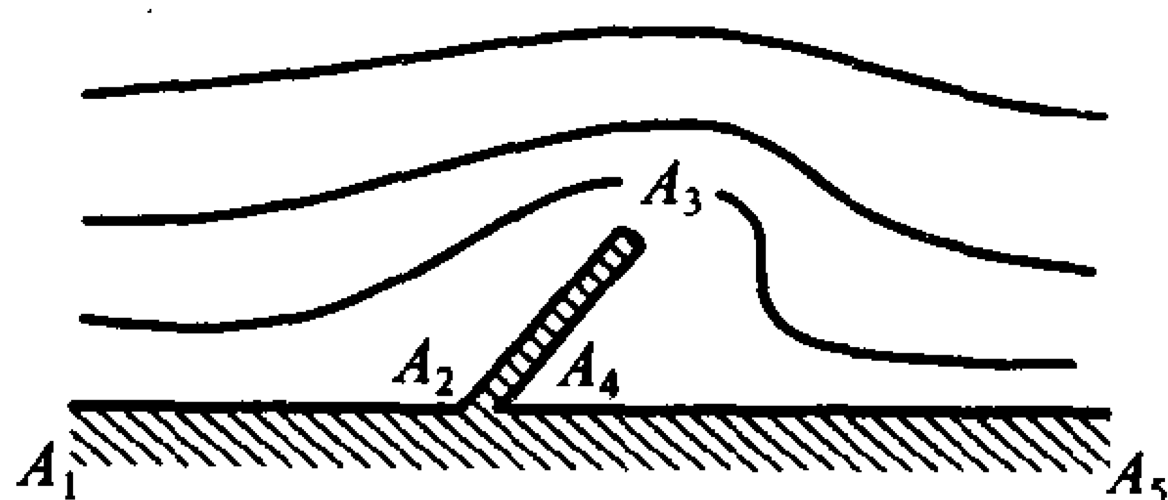


图 120

(7) 对于倾斜直线段的绕流 求绕一段倾斜直线段$(0,he^{i\alpha\pi})$流的无限深的平面流体,它在无穷远处的速度的数量 v_∞ 已经知道(图 120).这问题属于第 48 目中边值问题 3 的类型,可以归结到一

---

* 这个结果还可以由数学考虑得出.定子的边界 $A_1A_2A_3$ 对应于 ω 平面中实轴上的线段$(-1,1)$,因此由(24)可以知道:

$$B_{\min}=\frac{V}{Ha},\quad B_{\max}=\frac{V}{H}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.$$

个把流体的区域映到上半平面上的共形映射. 这个映射的逆映射已经在第 39 目中得出过:

$$z = z(w) = h(w-1)^{\alpha}(\beta w+1)^{1-\alpha}, \tag{26}$$

其中 $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ (见第 39 目中公式(10)),在这里我们已经互换了 z 与 w 的地位,并且为了要得到长度为 h 的线段,已经把 z 平面加以延伸. 显然 $z(\infty)=\infty$,而且在无穷远处的导数等于

$$\left.\frac{dz}{dw}\right|_{w=\infty} = \alpha h\left[\left(\frac{\beta w+1}{w-1}\right)^{1-\alpha}+\left(\frac{w-1}{\beta w+1}\right)^{\alpha}\right]_{w=\infty} = \frac{\alpha h}{\beta^{\alpha}}(1+\beta) = \frac{h}{\beta^{\alpha-1}} = \frac{1}{\gamma}.$$

把公式(26)中的 w 换成$\frac{\gamma w}{v_\infty}$,我们便得出复势能的反函数,因为,它在无穷远处的导数就等于$\frac{1}{v_\infty}$,而这正是所需要的. 在图 120 中画出了流线. 注意,由导数$\frac{dz}{dw}$的表达式中可以知道,流体的速度$|\mathbf{V}| = \left|\frac{dw}{dz}\right|$在对应于$w=0$的那个点 A_3处变成无限大*,而在对应于 $w=-\frac{1}{\beta}$与$w=1$的那两个点 A_2与 A_4处变成 0.

(8) 在渠道内温度的分布 设渠底保持在温度 $t°$,而渠壁保持在温度 0°的状况,在渠底与渠壁之间是热绝缘的. 在图 121 中画出了用一个垂直于渠底的平面来截得的渠道截面. 这个问题可以化为对于半带形的广义狄利克雷问题. 先借助函数 $\zeta = \sin\frac{\pi z}{a}$ 把这个半带形映到上半平面上. 在这时渠底 BC 被变换成线段$(-1,1)$,渠壁被变换成射线$(-\infty,-1)$,$(1,\infty)$. 余下来只需要再利用第 44 目中的公式(9):

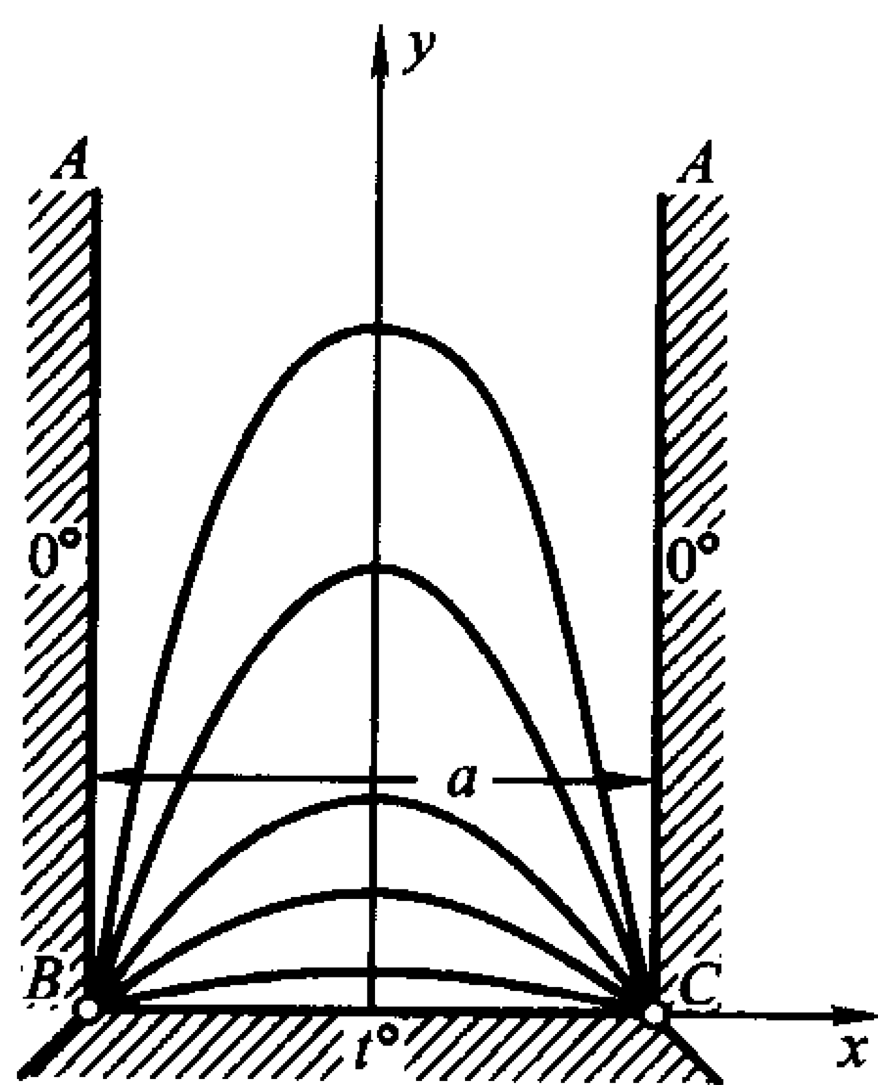


图 121

$$u(\zeta) = -\frac{\varphi_1}{\pi}t + \frac{\varphi_2}{\pi}t = \frac{t}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1) = \frac{t}{\pi}\arg\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

(这里我们有 $n=2, u_0=u_2=0, u_1=t, \varphi_{1,2}=\arg(\zeta\pm 1)$),并作代换

$$\zeta = \sin\frac{\pi z}{a} = \sin\frac{\pi x}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a} + i\cos\frac{\pi x}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{a}.$$

我们得到

---

* 在这里应该指出一种情况:如果认为,当 $w\to 0$ 时分数$\frac{\beta w+1}{w-1}\to -1 = e^{i\pi}$,那么第二个分数$\frac{w-1}{\beta w+1}\to e^{-i\pi}$,所以,当 $w\to 0$ 时,$\frac{dz}{dw}\to e^{i\pi(1-\alpha)}+e^{-i\pi\alpha}=0$.

$$u(z)=\frac{t}{\pi}\arg\frac{(\sin\cdot\mathrm{ch}-1)+i\cos\cdot\mathrm{sh}}{(\sin\cdot\mathrm{ch}+1)+i\cos\cdot\mathrm{sh}}=\frac{t}{\pi}\arctan\frac{2\cos\cdot\mathrm{sh}}{\sin^2\cdot\mathrm{ch}^2-1+\cos^2\mathrm{sh}^2}$$

(我们化去了分母中的虚数.为了书写简便起见,那些三角函数和双曲函数的变元我们在式中都略去未写出).在分母中用 $\mathrm{ch}^2=1+\mathrm{sh}^2$ 代入后,便把分母化成了 $\mathrm{sh}^2-\cos^2$ 的形式.如果记 $\arctan\frac{2\cos\cdot\mathrm{sh}}{\mathrm{sh}^2-\cos^2}=\alpha$,那么便有 $\frac{\mathrm{sh}^2-\cos^2}{\mathrm{sh}^2+\cos^2}=\cos\alpha$,因此

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\cos}{\mathrm{sh}},$$

所以温度的公式最后便具有形状

$$u(z)=\frac{2t}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{2t}{\pi}\arctan\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi y}{a}}.\tag{27}$$

在半平面上利用施瓦茨积分,还可以求出热流的复势能.

(9) 薄板撞击水　最后我们举一个撞击问题的最简单的例子.假设液体填满下半空间,而固体是宽度为 $2a$ 的带形薄板,它在撞击时刻 $t=0$ 时触及自由表面,并且瞬时获得垂直向下方向的速度 V_0 (图 122).设 $(-a,a)$ 将是垂直于薄板侧棱的平面中薄板的痕迹,$f(z)=u(z)+iv(z)$ 是描述撞击后液体速度的平面场的复势能.

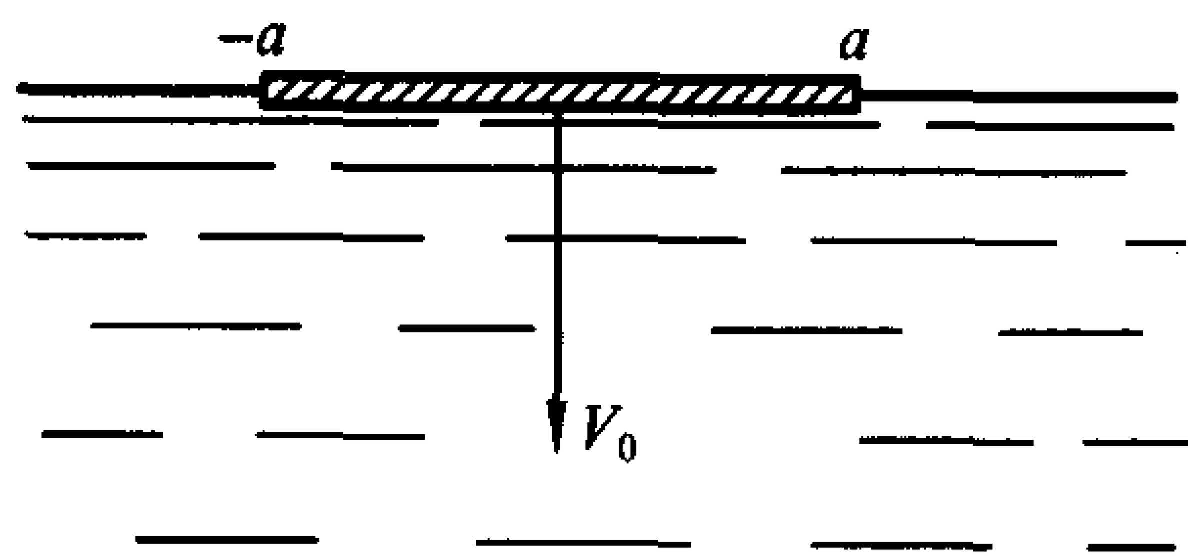


图 122

问题的边界条件由如下方式陈述出:在线段 $(-a,a)$ 上我们有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-V_0,\tag{28}$$

而在 x 轴的其余部分上,对应自由空间的

$$u=0\tag{29}$$

根据对称原理,经过射线 $(-\infty,-a)$ 和 (a,∞) 把调和函数 u 延拓到上半平面(根据条件(29)这是可能的,见第 42 目),那时在上沿代替条件(28)式的是我们得到了条件 $\frac{\partial u}{\partial y}=V_0$.由此可见,问题化为第 44 目的诺伊曼问题:根据边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=V_0$ 求在线段 $(-a,a)$ 外部的调和函数 $u(z)$ ($\frac{\partial}{\partial n}$ 是沿着指向区域内部的法线的导数).

为了解这个问题,我们利用把线段 $(-a,a)$ 的外部映射到平面 $\zeta=\xi+i\eta$ 的单位圆外部的共形映射

$$z=\frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right).\tag{30}$$

此时,边界条件变换成如下形状:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial u}{\partial n}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|=V_0\cdot\frac{a}{2}|1-e^{-2i\varphi}|$$

$$=\frac{V_0 a}{2}\sqrt{(1-\cos 2\varphi)^2+\sin^2 2\varphi}=-V_0 a\sin\varphi,$$

其中 $\rho=|\zeta|$ 和 $\varphi=\arg\zeta$ (负号解释如下,在我们这里,下半圆周 $\pi<\varphi<2\pi$ 上,应当是$\frac{\partial u}{\partial\rho}>0$). 根据极坐标中的柯西-黎曼条件(参见第 5 目)在圆周 $\rho=1$ 上我们得到 $\frac{\partial v}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial\rho}=-V_0 a\sin\varphi$,因而,$v=V_0 a\cos\varphi=V_0 a\mathrm{Re}\,\zeta$. 由此可见,我们找到 ζ 平面中的复势能:

$$w=iV_0 a\zeta.$$

把(30)式中 ζ 通过 z 的表达式代入上式,我们求出所要寻找的 z 平面中的复势能

$$f(z)=iV_0\{z-\sqrt{z^2-a^2}\}. \tag{31}$$

按照第 48 目中的公式(7),我们找出在线段$(-a,a)$的任意点 x 上冲击压力

$$P^{(i)}=\rho\mathrm{Re}\,f(z)=\rho V_0\sqrt{a^2-x^2}, \tag{32}$$

在撞击后的瞬间在自由表面$(|x|>a)$分子的速度是沿这一表面的法线方向,并且大小等于

$$V=\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|=V_0\left|1-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right|. \tag{33}$$

公式(32)能够解如下问题:质量为 m 的物体在沿着宽 $2a$ 的平面带自由落下时撞击水. 如果在撞击前速度等于 V_1,求撞击后物体的速度 V_2. 按照公式(32),在撞击时刻作用于物体的冲击力

$$P=\rho V_2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi\rho V_2 a^2. \tag{34}$$

从另一方面,根据动量定理 $P=m(V_1-V_2)$,把这表达式与上面(34)式作比较,我们求得:

$$V_2=\frac{mV_1}{m+\frac{\pi\rho a^2}{2}}. \tag{35}$$

V_2也是在无弹性地撞击具有质量 $\pi\rho a^2/2$ 的物体时,物体所获得的速度. 与此相应,$\pi\rho a^2/2$ 称为撞击液体的薄板的*附加质量*.

解应用问题的进一步的例子将引入在本章 §4 中.

50. 弹性理论的平面问题 复变函数论对于弹性理论平面问题的应用有点独特. 我们在这里将仅简略地指出这些应用所凭以建立的一些原理,至于详细的说明,读者可以在一本良好的书 Н. И. Мусхелишвили[10]中找到.

弹性理论的平面问题可用于下述的两种情形:(1) 长柱形遭受到施在它的侧面上的应力,这些应力位于垂直于长柱形母线的一些平面内,并且在所有的这样平面内,这些应力都是同样的(图 123(a));(2) 薄板片遭受到施在它的周围上的应力,这

些应力都位于薄板片所在的平面内(图 123(b)).在这两种情形中,问题都可以用平面的受力状态来描述.我们将更详细讲述这方面.

在弹性理论的一般问题中,要考虑两种力——*质量力*,作用于体积单元或物体质量上(例如,重力便是这种力);与*表面力*,作用于物体的在想像上可以区分开的那些单元的表面上(例如,压力便是这种力).在平面问题中,对应于这两种情形的是:作用于单元面积上的质量力,与作用于各单元的边界上的边线力.

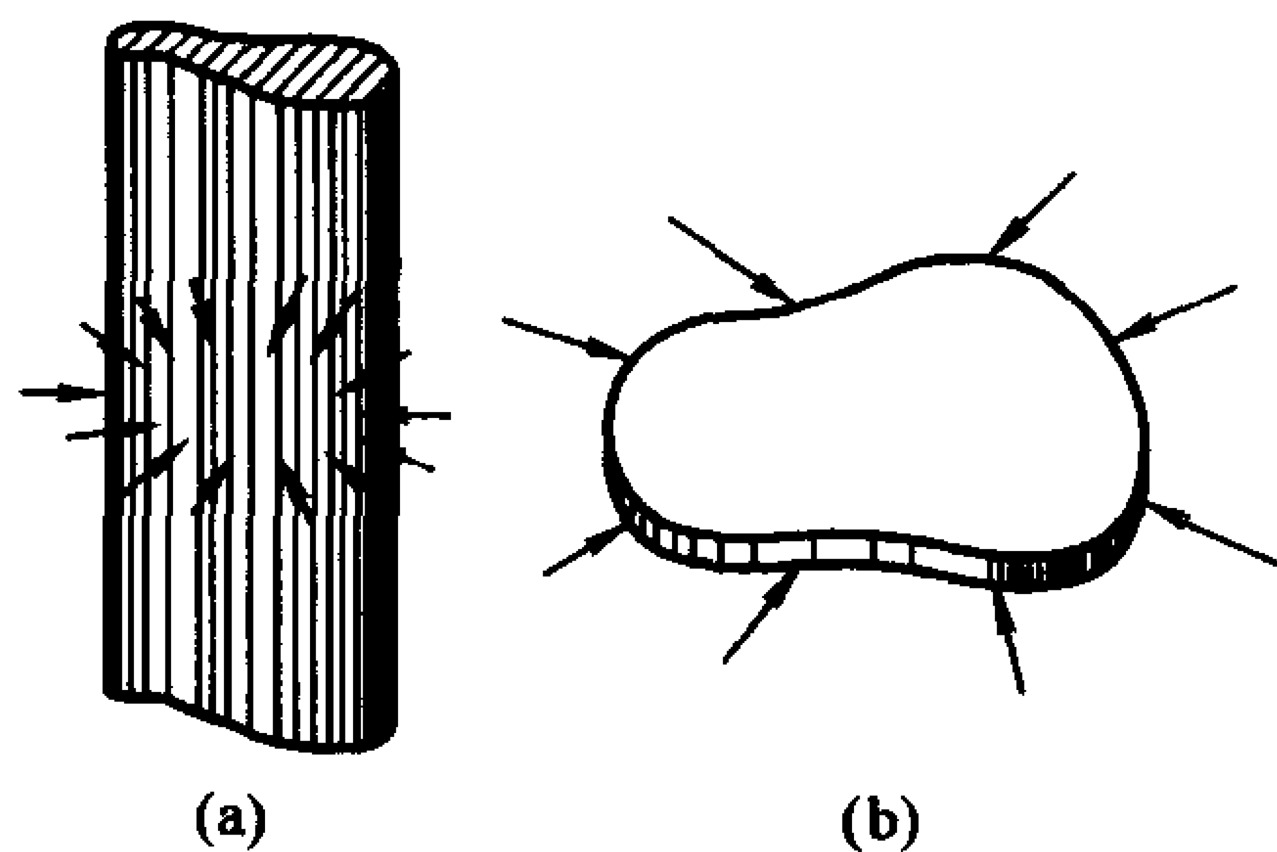


图 123

我们假定质量力不存在.作用于线单元 ds 上的边线力,我们记作 $\boldsymbol{F}ds$,这里 $\boldsymbol{F}$ 是关于单位长度的力,我们称之为*应力*.在一个给定点处的应力 $\boldsymbol{F}$,与线单元的方向有关,它带有张量的特性.特别是,其中关于垂直于 x 轴的线单元与垂直于 y 轴的线单元的那两个应力,我们分别记作 $\boldsymbol{F}_x$ 与 $\boldsymbol{F}_y$.量 $\boldsymbol{F}_x$ 与 $\boldsymbol{F}_y$ 都是有向的,它们的分量我们用 X_x, Y_x 与 X_y, Y_y 来表示,于是

$$\boldsymbol{F}_x = X_x + iY_x, \quad \boldsymbol{F}_y = X_y + iY_y, \tag{1}$$

这时我们称 X_x 与 Y_y 为*法线应力*,称 Y_x 与 X_y 为*切线应力*.在平面问题中,应力的分力是两个实变量 x 与 y 的函数.可以证明:如果线单元的法线 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴形成角度 α,则作用于这线单元上的应力

$$\boldsymbol{F}_n = X_n + iY_n$$

通过应力(1)由公式

$$\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_x \cos\alpha + \boldsymbol{F}_y \sin\alpha \tag{2}$$

表达出来(可看[10],31 页).

在弹性理论中,导出了下述联系着应力分力的所谓物体的*平衡方程*

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

并且证明了

$$X_y = Y_x \tag{4}$$

(见[10],第 20 页).

在弹性力的作用下,物体遭受*形变*,即,改变物体的点之间的相互距离.我们用

$$x^* = f_1(x, y), \quad y^* = f_2(x, y)$$

来表示物体的点(x, y)在形变之后的新坐标,并且称差数

$$u = x^* - x, \quad v = y^* - y \tag{5}$$

为*位移分量*.在平面问题内,位移分量是两个实变量 x 与 y 的函数.*在以后,位移分量以及它们的对于 x 与 y 的导数,都将假定是非常地小,因而它们的乘积与平方可*

以略去不计(微小形变).

此外,量

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{6}$$

叫做**形变分量**. 量

$$\theta=e_{xx}+e_{yy}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{7}$$

是在形变时的面膨胀(见[10],第 47 页). 根据弹性理论的基本定律(胡克定律),应力的分力是形变分量的线性齐次函数.

对于各向同性物体* 来说(我们只限于考虑这样的物体),这函数关系的形式是

$$X_x=\lambda\theta+2\mu e_{xx},\quad Y_y=\lambda\theta+2\mu e_{yy},\quad X_y=Y_x=2\mu e_{xy}, \tag{8}$$

其中 λ 与 μ 是两个非负常系数(见[10],第 64 页). 公式(3)与(8)是弹性理论的平面问题中的基本方程. 这是与两个独立变量 x 和 y 的五个未知函数 X_x, Y_y, X_y, u 和 v 的一阶偏导数有关的五个方程的方程组**.

由这个方程组容易得到只包含一些位移分量的方程. 为此只要把(8)式中 X_x, Y_y 和 X_y 的表达式代入方程(3),此时考虑到(6)式和(7)式我们得到一组有关两个未知函数 u 和 v 的两个二阶方程:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u=0,\quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v=0, \tag{9}$$

其中 Δ 表示拉普拉斯算子. 在解出偏微分方程组(9)后,应力便可以用简单的微分法按照(8)式来求得.

也容易求出仅含有应力的分力的方程组. 为此,我们把方程组(9)中的第一个方程按 x 来微分,第二个方程按 y 来微分,然后把所得到的两个方程加起来. 再考虑到表达式(7),我们便有

$$(\lambda+\mu)\Delta\theta+\mu\Delta\theta=0,$$

由此得出 $\Delta\theta=0$. 注意,由方程组(8)中的前二个方程以及公式(7),可以导出关系式

$$\theta=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y), \tag{10}$$

把这代入上面的方程中,我们得到

---

* 即,其弹性就所有的方向来说都是同样的那种物体.

** 在长柱形的情形中,作用于物体的各部分上的还有应力的分力 Z_z,它也同别的分力那样是仅依赖于 x 及 y 的. 我们不把含有它的方程包括在基本方程组内,因为它等于

$$Z_z=\lambda\theta,$$

可以在解出基本方程组后来求得(见[10],第 90 页). 在平面薄板片的情形中,常数 λ 应当用常数

$$\lambda^*=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$$

来代替(见[10],第 95 页). 这样的代替不致改变方程组(8)的性质,所以我们也不在主要的正文中指出.

$$\Delta(X_x + Y_y) = 0. \tag{11}$$

方程(11)与方程组(3)合在一起,便给出了所求的仅含有应力分力的方程组(含有三个未知函数的三个方程).

我们将引入所谓应力函数,用它来描述平面问题的解,特别方便.按照公式(3),表达式

$$-X_y dx + X_x dy = dB, \quad Y_y dx - Y_x dy = dA \tag{12}$$

是某两个函数的全微分.同时由切线应力 X_y 与 Y_x 彼此相等,导出等式

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y},$$

由此推出,表达式

$$A dx + B dy = dU \tag{13}$$

也是某一个函数 $U(x,y)$ 的全微分,这个函数 $U(x,y)$ 便叫做**应力函数**.这个函数是英国天文学家爱利(Ally)于1862年引入的.由(12)式与(13)式,我们得出下述的用函数 $U(x,y)$ 来表示应力分量的表达式

$$X_x = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad X_y = Y_x = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \tag{14}$$

函数 $U(x,y)$ 也可以用来表达位移分量.以 X_x, Y_y 与 X_y 的表达式(14),e_{xx}, e_{yy} 与 e_{xy} 的表达式(6),以及表达式

$$\theta = \frac{1}{2(\lambda+\mu)} \Delta U$$

(这可以由把(14)的诸值代入(10)而得到)代入公式(8)中,我们得到

$$\begin{gathered} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \Delta U, \quad 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \Delta U, \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \end{gathered} \tag{15}$$

由关系式(14)可以得到

$$X_x + Y_y = \Delta U,$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子.现在从方程(11)可以看出,应力函数 $U(x,y)$ 满足方程

$$\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \tag{16}$$

即,照通常的说法,是一个**重调和函数**.

我们现在可以证明,任何一个重调和函数都可以用解析的复变函数来表示.另一方面,因为应力分量与位移分量都可以用重调和函数来表达,所以我们便因而获得了弹性理论平面问题的解的复数表示法.由 Г.В.科洛索夫与 Н.И.穆斯海利什维里所发展的把复变函数应用到弹性理论上去的那些方法,便是以此为基础的.

设 U 是任意一个重调和函数.函数 ΔU 显然是一个调和函数.我们记 $\Delta U = P$,把 ΔU 的共轭函数记作 Q,并且令

$$f(z)=P+iQ.$$

可是,更方便一点的是考虑函数

$$\varphi(z)=\frac{1}{4}\int f(z)dz=p+iq, \tag{17}$$

于是

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{1}{4}P,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{1}{4}Q. \tag{18}$$

用简单的计算便可表明,函数

$$p_1=U-px-qy$$

是一个调和函数*.

我们把以 p_1 作为其实数部分的那个解析函数记作 $\chi(z)$,于是显然有

$$U=px+qy+p_1=\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)\}.$$

把此式改写成稍有不同的形状,我们得到所要找的重调和函数的复数表示(Э Гурса, 1898)

$$U=\frac{1}{2}(\bar{z}\varphi+z\bar{\varphi}+\chi+\bar{\chi}). \tag{19}$$

我们也来求出函数 U 的偏导数的表示式,这对于以后将有用处.对(19)式求对于 x 的与对于 y 的偏导数(这时我们把 z 与 $\bar{z}$ 看作中间变量,并利用等式

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{\varphi}=\overline{\frac{\partial}{\partial x}\varphi}=\overline{\varphi'}\text{和}\frac{\partial}{\partial y}\bar{\varphi}=\overline{\frac{\partial}{\partial y}\varphi}=-i\,\overline{\varphi'}),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}&=\frac{1}{2}(\varphi+\bar{z}\varphi'+\bar{\varphi}+z\,\overline{\varphi'}+\chi'+\bar{\chi}'),\\ \frac{\partial U}{\partial y}&=\frac{1}{2}(-\varphi+\bar{z}\varphi'+\bar{\varphi}-z\,\overline{\varphi'}+\chi'-\bar{\chi}'),\end{aligned} \tag{20}$$

由此得出

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\,\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}, \tag{21}$$

其中令

$$\psi(z)=\chi'(z).$$

微分(20),我们得到

---

* 实际上,利用关系式(18)与对于函数 $f(z)$ 的柯西-黎曼条件,我们便得出

$$\Delta(px)=\Delta(qy)=\frac{1}{2}P,$$

所以,

$$\Delta p_1=\Delta U-P_1=0.$$

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=2(\varphi'+\overline{\varphi'})=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]^*. \tag{22}$$

转到位移分量与应力分量的复数表示法上来.以

$$\Delta U=P,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=P-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=P-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

代入(15)的前两个式子中.因为由(18)我们有

$$P=4\frac{\partial p}{\partial x}=4\frac{\partial q}{\partial y},$$

所以

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+k\frac{\partial p}{\partial x},\quad 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+k\frac{\partial q}{\partial y},$$

其中 $k=2\cdot\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$.把所得到的这两个关系式求积分,我们得出

$$2\mu u=-\frac{\partial U}{\partial x}+kp+f_1(y),\quad 2\mu v=-\frac{\partial U}{\partial y}+kq+f_2(x). \tag{23}$$

为了要确定函数 $f_1(y)$ 与 $f_2(x)$,我们利用公式(15)中的第三个式子.由(23)式我们得出

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}[f'_1(y)+f'_2(x)],$$

把这与(15)中的第三个式子相比较,我们得到 $f'_1(y)+f'_2(x)=0$,或者 $f'_1(y)=-f'_2(x)$.因为在这里左端仅是 y 的函数,而右端仅是 x 的函数,所以两端都等于同一个常数.把这个常数记作 α,我们便有

$$f_1(y)=\alpha y+\beta,\quad f_2(x)=-\alpha x+\gamma.$$

不难看出,由公式(23)中这两项所引起的物体的位移,是"刚性位移",即,物体整个的位移.(实际上,这样的位移向量是 $f_1+if_2=-\alpha iz+\beta+i\gamma$).因为它们不影响物体的受力状态,所以我们在公式(23)中把这两项看作是不重要的而舍去,于是得到

$$u+iv=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{k}{2\mu}\varphi(z),$$

或者,再利用关系式(21),我们得出位移的复数表示最终形式

$$u+iv=\frac{1}{2\mu}\{\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\}, \tag{24}$$

其中

$$\kappa=k-1=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}.$$

这表示式是Г.В.科洛索夫在1909年所得到的.

---

* 顺便指出,由表达式(22)可以推出,对于任何一个按公式(19)来表示的函数 U 来说,ΔU 总是一个调和函数,因此,这样的函数 U 是重调和函数.

转到应力的表示式上来. 根据公式(14), 我们得出

$$\begin{aligned} F_x &= X_x + iY_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right), \\ F_y &= X_y + iY_y = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{25}$$

再利用(21), 我们得到

$$\begin{aligned} F_x &= X_x + iY_x = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - \overline{z\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)}, \\ -iF_y &= Y_y - iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + \overline{z\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \end{aligned} \tag{26}$$

把(26)中的两个方程相加, 以及从第二个式子中减去第一个式子, 我们得到也是属于 Г. В. 科洛索夫的公式和给出了*应力的复数表示*

$$\begin{aligned} X_x + Y_y &= 2\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\} = 4\mathrm{Re}\,\varphi'(z), \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\}. \end{aligned} \tag{27}$$

(在第二个公式中, 我们已经把式中的量都换成了就复数意义说的共轭量).

因此, 我们知道: *在弹性理论的平面问题中, 应力与位移都可以用两个解析的复变函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 来表达.*

最后我们来说明, 由已知的受力状态与位移, 可以把这两个函数确定到什么程度. 当受力状态已经知道时, 由(27)中的第一个公式, 函数 $\varphi'(z)$ 的确定可以精确到相差一个纯虚数的常数项, 因为这个函数的实数部分已经给出了. 由此知道, 所有的那些可以起函数 $\varphi(z)$ 作用的函数, 都可以用其中的某一个以公式

$$\varphi(z) + \alpha iz + b \tag{28}$$

来表达, 其中 αi 是一个纯虚数, $b = \beta + i\gamma$ 是一个复数的常数. 于是, 由(27)中的第二个公式, 便可以确定 $\psi'(z)$ 了, 所以, 函数 ψ 的全体可以用公式

$$\psi(z) + b_1 \tag{29}$$

来描述, 其中

$$b_1 = \beta_1 + i\gamma_1$$

也是一个复数常量.

显然. 倒过来说, 如果用

$$\varphi + \alpha iz + b, \quad \psi + b_1$$

来分别取代 φ 与 ψ, 受力状态也不会有改变.

现在设位移分量已经知道. 从公式(6) - (8)可以看到, 这时应力的分力也已经被确定. 所以只可以用公式(28)与(29)来代替函数 φ 与 ψ. 但是, 正如公式(24)所表明的, 在这样的代替下, $u + iv$ 所改变的量是

$$\delta u + i\delta v = \frac{\kappa + 1}{2\mu}\alpha iz + \frac{\kappa b - b_1}{2\mu}, \tag{30}$$

所以, 这样的代换仅给予了整个物体的刚性位移, 我们已经约定对这种情形可以不考虑.

公式(30)指出,在函数 φ 与 ψ 的形如(28)与(29)的代换中,只有那些使

$$\alpha=0,\quad \kappa b-b_1=0 \tag{31}$$

的代换,方能使位移不改变.

因此,当位移已给定时,常数 α 便完全被确定了,在 b 与 b_1 这两个常数中也只有一个可以任意给出.

51. 弹性理论的边值问题 上一目中的科洛索夫公式(24)与(27),提供了弹性理论的平面问题中的基本方程组(3)与(8)的通解*.可是,正是由于其本身的一般性,公式(24)与(27)没有给出实用上重要问题的直接解答.这些实用上的重要问题,时常可以化为加在所考虑的量在区域边界上的值的某些条件,即,可以化到**边值问题**.

平面弹性理论的基本的边值问题,可以表述成如下的形式:

Ⅰ. 第一边值问题 当加在区域 D 的边界 C 上的外应力 X_n, Y_n 已知时,求区域 D 的弹性平衡.

Ⅱ. 第二边值问题 当区域 D 的边界 C 上的点的位移 u 与 v 已知时,求区域 D 的弹性平衡.

也可考虑混合的边值问题,在这种问题中,在区域边界的有些部分是应力已经知道,而在另外一些部分则是位移已经知道的.

我们来证明问题Ⅰ与Ⅱ的解的唯一性.为简单起见,只就区域 D 是有界的单连通区域时的情形来加以讨论.我们考虑沿区域 D 的边界 C 所取的积分

$$I=\int_C (X_n u+Y_n v)ds. \tag{1}$$

(在物理上它表示作用于边界线的弹性力的功)按照上一目中的公式(2)来代换应力分力 X_n 与 Y_n,我们便可以把这个积分写成

$$I=\int_C \{(X_x u+Y_x v)\cos\alpha-(X_y u+Y_y v)\sin\alpha\}ds$$

的形状.但是按照奥斯特洛格拉茨基的二维公式**,我们可以把所得积分变换成在区域 D 上的二重积分

$$I=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial y}(X_y u+Y_y v)+\frac{\partial}{\partial x}(X_x u+Y_x v)\right\}dxdy$$

$$=\iint_D\left\{u\left(\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_x}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_x}{\partial x}\right)+X_x\frac{\partial u}{\partial x}+\right.$$

---

* 可以证明,对任意的两个解析函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 来说,由(27)与(24)所确定的那些函数 X_x, Y_y, X_y 与 u, v,都必定满足基本方程组(3)与(8).

** 二维奥斯特洛格拉茨基公式有形状

$$\int_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中 α 是 C 的法线和 x 轴组成的角.

$$+X_y\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}\bigg\}dxdy. \tag{2}$$

根据第 50 目中的公式(3),积分(2)中被积函数的前两项等于 0.再按照第 50 目中的公式(8)来代换 X_x, X_y, Y_y,按照公式(6)来代换$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$,并利用第 50 目(7)式中的记号,我们得到

$$I=\iint_D\{\lambda\theta^2+2\mu(e_{xx}^2+2e_{xy}^2+e_{yy}^2)\}dxdy. \tag{3}$$

现在设在区域 D 内对于同一个边值问题 I 可以建立两组解 $X'_x,\cdots,v'$ 与 $X''_x,\cdots,v''$.由于第 50 目中的基本方程组(3)与(8)是线性的,所以这两组解的差 $X_x=X'_x-X''_x,\cdots,v=v'-v''$也将给出弹性理论平面问题的一组解,并且,根据边值条件,在曲线 C 上要有 $X_n=Y_n=0$.所以积分(1)等于 0,因而积分(3)也等于 0.但是积分(3)的积分号下是一个不为负的函数,因此,只有当在区域 D 内恒等地有 $\theta=e_{xx}=e_{xy}=e_{yy}=0$ 时,这积分才可能等于 0.于是由第 50 目中的公式(8),我们便得出结论说,在区域 D 内恒等地有 $X_x=X_y=Y_y=0$,而这就表示了,两种受力状态 X'_x, Y'_y, X'_y 与 X''_x, Y''_y, X''_y是同一的*.边值问题 I 的解的唯一性已经证明了.

边值问题 II 的解的唯一性的证明,可以完全类似地导出**,只有一点不同:积分(1)的等于 0,是由位移 u 与 v 在曲线C 上等于 0 来说明的.

现在我们要来说明,如何把解问题 I 与 II 化成求解析函数理论中边值问题的解.由于按照上一目中的证明,受力状态可以用两个解析函数 $\varphi(z)$与 $\psi(z)$来完全确定,所以,我们的问题的解也应当可以用这两个函数来表达.与前面一样,我们仍旧设区域 D 是一个单连通区域,并且把 D 的边界记作C.

在问题 II 中,边值条件可以直接用第 50 目中的公式(24)来表述:

$$\kappa\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=2\mu g(\zeta) \tag{4}$$

其中 κ 与 μ 都是常系数,而 $g(\zeta)=u+iv$ 则是在边界C 上的已知位移.

因此,对于区域 D 来解平面弹性理论中的问题 II,可化成在这个区域内求两个解析函数 $\varphi(z)$与 $\psi(z)$的问题,这两个函数是在 D 的边界C 上以边值条件(4)联系着的.

对于问题 I,我们首先注意:由上一目中的公式(2)与(25)可以知道,如果线单元的法线与实轴形成角度 α,那么作用在这线单元上的应力向量的公式是

$$\boldsymbol{F}_n=-i\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}-\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

---

* 我们应当回想起,在同样的受力状态下,位移 u, v 只可能有一个"刚性位移"的差异,而这是我们已经说过当作非实质性的(见上一目).

** 如果在边界上的位移已经给出,那么在上面这脚注中所说的那个"刚性位移"便没有了,u, v 完全被确定.

$$= -i\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{5}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial s}=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

是表示在线单元的方向求导数的记号.由这个式子中可以知道,在界线 C 上

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=i\int_0^s \boldsymbol{F}_n ds + A, \tag{6}$$

其中 s 表示弧 C 的长度,是由某一个固定点起按曲线的正方向来计算的,A 是一个任意常数.在问题Ⅰ中,$\boldsymbol{F}_n$ 在曲线 C 上的值已经给出,所以函数

$$i\int_0^s \boldsymbol{F}_n ds = f(\zeta)=f_1(\zeta)+if_2(\zeta) \tag{7}$$

是已知的.把这个代入关系式(6)中,再利用上一目中的公式(21),我们得到问题Ⅰ的如下形状的边值条件:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=f(\zeta)+A, \tag{8}$$

其中 $f(\zeta)$ 是已知的函数,A 是一个任意常数.

因此,解平面弹性理论中的问题Ⅰ,可化成在区域 D 内求两个解析函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的问题,这两个函数在 D 的边界 C 上是以边值条件(8)联系着的.

我们来弄清楚关于在所讨论的边值问题中始终是自由的参数的个数问题.如我们在上一目末所看到的,在给出应力(问题Ⅰ)时 φ 的确定精确到一个形如 $\alpha iz+b$ 的加项,而 ψ 的确定精确到一个常数加项 b_1 (α 为实数,b 和 b_1 为复数),而在给出位移(问题Ⅱ)时,φ 和 ψ 的确定精确到由关系式 $\kappa b=\bar{b}_1$ 联系着的常数项 b 和 b_1.

由此推出,在问题Ⅱ中在区域的某一点上给定它们中的一个,譬如,条件

$$\varphi(0)=0 \tag{9}$$

(假定点 $z=0$ 在 D 内部)这些函数就完全确定.在问题Ⅰ中,当容许 φ 和 ψ 改变时函数 $\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}$,像在(8)式中看到的,改变 $b+\bar{b}_1$,所以给定常数 A 就把一种联系加到 b 和 b_1 上.因此在问题Ⅰ中给定量 A 时留下一个复数参数和一个实数参数,因而可以,譬如说,给出条件

$$\psi(0)=\operatorname{Im}\varphi'(0)=0. \tag{10}$$

结束时我们表述一些改变,这些改变是代入到无界的或者多阶连通区域情形的边界问题的设置中.首先设区域 D 是有界的,并且它的边界由一条闭周线 C_0 和包含在 C_0 内的周线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成.从物理考虑清楚的是,应力和位移在这种情况下仍然是单值的,但是函数 φ 和 ψ 可能是多值的.我们来说明它们的多值性的特性.

由科洛索夫公式 $X_x+Y_y=4\operatorname{Re}\varphi'(z)$ 推出,$\operatorname{Re}\varphi'(z)$ 是单值的,而 $\operatorname{Im}\varphi'(z)$ 按逆时针方向绕行每一条内部曲线 C_k 时可能获得增量,这增量我们表示成 $2\pi a_k$ (参阅第 41 目).由此推出,函数 $\varphi'(z)$ 将获得增量 $2\pi i a_k$,这也就是函数

$$\varphi'(z)-\sum_{k=1}^{n}a_k\operatorname{Ln}(z-z_k)=\tilde{\varphi}(z), \tag{11}$$

其中 z_k 是位于 C_k 内部的点，在 D 中将是单值的. 积分 $\int_{z_0}^{z}\bar{\varphi}(z)dz$ 在区域 D 内也可能是多值函数，并且这多值性将由形如 $b_k\operatorname{Ln}(z-z_k)$ 的项引起的. 对关系式(11)进行积分，我们得到

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n}a_k z\operatorname{Ln}(z-z_k)+\sum_{k=1}^{n}b_k\operatorname{Ln}(z-z_k)+\varphi^*(z), \tag{12}$$

其中 $\varphi^*(z)$ 为 D 中单值函数，a_k 为实常数，b_k 为复常数.

正如从(11)或(12)中看到的，函数 $\varphi''(z)$ 在 D 内是单值的. 于是从第 50 目的科洛索夫的第二个公式(27)得出，$\varphi'(z)$ 是单值函数，因此，

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{n}c_k\operatorname{Ln}(z-z_k)+\psi^*(z), \tag{13}$$

其中 $\psi^*(z)$ 在 D 中是单值的，且 c_k 为复常数.

到目前为止，我们只利用了应力的单值性. 从刚得到的公式(12)和(13)以及从第 50 目中的公式(24)可以看到，在绕行 C_k 时函数 $2\mu(u+iv)$ 得到增量，它等于函数

$$\chi a_k z\operatorname{Ln}(z-z_k)+\chi b_k\operatorname{Ln}(z-z_k)-za_k\overline{\operatorname{Ln}(z-z_k)}-\bar{c}_k\overline{\operatorname{Ln}(z-z_k)}$$

的增量，亦即等于

$$2\pi i[(\chi+1)a_k z+\chi b_k+\bar{c}_k],$$

其中 z 是 D 中绕行开始和结束的点. 因此，位移的单值性条件引向条件

$$a_k=0,\quad c_k=-\chi\bar{b}_k \tag{14}$$

并且函数 φ 和 ψ 采取形状

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\sum_{k=1}^{n}b_k\operatorname{Ln}(z-z_k)+\varphi^*(z),\\ \psi(z)&=-\chi\sum_{k=1}^{n}\bar{b}_k\operatorname{Ln}(z-z_k)+\psi^*(z),\end{aligned} \tag{15}$$

其中 φ^* 和 ψ^* 为单值函数，而 b_k 为复常数.

系数 b_k 有简单的力学涵义：

$$b_k=-\frac{\boldsymbol{F}^{(k)}}{2\pi(1+\chi)}, \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{F}^{(k)}$ 是加在 C_k 上的外部条件的主向量. 事实上，根据公式(6)这向量等于

$$\boldsymbol{F}^{(k)}=-\int_{C_k}\boldsymbol{F}_n ds=i\Delta_{C_k}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{17}$$

其中 Δ_{C_k} 表示在绕行 C_k 时的增量(积分前的符号“－”由如下说明，因为我们考察外部应力的向量). 按照第 50 目的公式(21)，由此式可得到

$$\boldsymbol{F}^{(k)}=i\Delta_{C_k}\{\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}\}=-2\pi(1+\chi)b_k.$$

在问题Ⅰ中系数 b_k 是给定的，而在问题Ⅱ中它们仍然是未知的.

问题Ⅱ的解所引出的边界条件(4)，对于多阶连通区域没有改变，可是问题Ⅰ所引出的条件(8)需要某种明确说明. 事实上，常数 A 的值在不同的边界周线上可能是不同的，所以这条件现在应该写成形状：

$$\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=f(\zeta)+A_k,\ \zeta\in C_k, \tag{8'}$$

其中 A_k 为常数($k=0,1,\cdots,n$). 更详细的分析表明,这些常数中一个可以任意给出,而其余可以由位移单值性条件确定.

我们还要注意,正如从物理理由看出的,问题 I 的解的存在只有在主向量和给出在区域的全部边界 $C=C_0+C_1+\cdots+C_n$ 上的所有外力的主矩都等于 0 的时候才有可能. 主向量等于 0 的条件根据公式(7)等价于给出在边界上的函数 $f=f_1+if_2$ 的全增量等于 0:

$$\int_C \boldsymbol{F}_n ds = i\Delta_C\{f_1(\zeta)+if_2(\zeta)\}=0 \tag{18}$$

(在单连通区域情形它自动满足,只要所给函数是连续的). 如果注意到,根据公式(7) $X_n ds = df_2$, $Y_n ds = -df_1$, 主矩等于 0 的条件

$$\int_C (xY_n - yX_n) ds = 0$$

容易变换,因而在分部积分以后,这条件采用形式

$$\int_C (xY_n - yX_n) ds = -\Delta_C\{xf_1(\zeta)+yf_2(\zeta)\}+\int_C f_1 dx + f_2 dy = 0.$$

考虑到条件(18),这一条件可以改写成形状

$$\int_C f_1 dx + f_2 dy = 0. \tag{19}$$

如果区域是无限的,并且在内部包含点 $z=\infty$,那么所有我们的讨论仍然有效,只要对所考虑的和再加上一项 $b\text{Ln}\, z$,这一项对应于绕行无穷远点. 系数 b 通过加在区域边界上的外力的主向量 $\boldsymbol{F}$ 表示出来:

$$b = -\frac{\boldsymbol{F}}{2\pi(1+\chi)} \tag{16$'$}$$

不同于有限区域情况的是,它不一定等于 0. 这向量认为是已知的:在问题 II 中它应当是给定的,而在问题 I 中是根据给定的外部应力确定的.

如果假设,在无穷远点处应力仍然是有界的,那么从第 50 目中的科洛索夫公式(26)可看出,$\varphi^*(z)$ 和 $\psi^*(z)$ 在无穷远点处的洛朗展开式的主要部分可能只包含 z 的一次幂. 由此可见,在所研究的情形中函数 φ 和 ψ 的表达式采取形式

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{n} b_k \text{Ln}(z-z_k) + b\text{Ln}\, z + \Gamma z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= -\chi\sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k \text{Ln}(z-z_k) - \chi\bar{b}\text{Ln}\, z + \Gamma' z + \psi_0(z), \end{aligned} \tag{20}$$

其中 b_k 和 b 根据公式(16)和(16′)决定,而 φ_0 和 ψ_0 是 D 中的单值函数并在无穷远点处是正则的. 常数 Γ 和 Γ',如第 50 目的科洛索夫公式(27)中所看到的,可以通过无穷远点处的应力来表示:

$$X_x^\infty + Y_y^\infty = 4\text{Re}\, \Gamma, \quad Y_y^\infty - X_x^\infty + 2iX_y^\infty = 2\Gamma'. \tag{21}$$

在问题 II 情形它们被认为是给定的,在问题 I 情形 $\text{Re}\, \Gamma$ 和 Γ' 是给出的(可以证明,$\text{Im}\, \Gamma$ 不影响应力的分布).

当区域 D 在边界上包含无穷远点,我们不讨论一般形式,而只局限于 D 是下半平面的情况. 这里像在前面的情况一样,我们在点 $z=\infty$ 的邻域内采取

$$\varphi(z) = b\text{Ln}\, z + \varphi^*(z), \quad \psi(z) = c\text{Ln}\, z + \psi^*(z),$$

其中 φ^* 和 ψ^* 是单值函数,而 b 和 c 是复常数. 由此,利用公式(17),我们求加在 x 轴的大区间

$C_R: -R_1 < x < R_2$上的外应力向量

$$\boldsymbol{F}_R = i\Delta_{C_R}\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\} = i\left(b\ln\frac{R_2}{R_1} + b\pi i + \bar{c}\ln\frac{R_2}{R_1} - \bar{c}\pi i\right) + \varepsilon,$$

其中,当 $R_1, R_2 \to \infty$时,$\varepsilon \to 0$,我们要求,当彼此独立地 $R_1, R_2 \to \infty$时,这表达式仍然是有界的.此时 $b + \bar{c} = 0$,并且前面的公式在取极限下给出加到整个 x 轴上的外应力向量

$$\boldsymbol{F} = \pi(\bar{c} - b).$$

由此可见,$b = -\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}, c = \frac{1}{2\pi}\overline{\boldsymbol{F}}$.同样假定,在无穷远点处应力等于 0 (亦即 $\Gamma = \Gamma' = 0$),代替公式(15)我们有

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{F}\mathrm{Ln}\, z + \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi}\overline{\boldsymbol{F}}\mathrm{Ln}\, z + \psi_0(z) \tag{22}$$

其中 $\varphi_0(z)$和 $\psi_0(z)$在 D 内是单值函数并在无穷远点处是正则函数.

§3 柯西型积分与边值问题

在这部分中我们将叙述柯西型积分的一些基本性质,及以这些性质作基础的、用来解复变函数论中各种边值问题的一些有效方法.在本节末将举出这些方法对于某些流体力学问题与弹性理论问题的应用.

在这些方法的基础上,有尤利安·瓦西里耶维奇·索霍茨基在 1873 年所得出的*,柯西型积分的边界值的公式,可是后来却不幸地被遗忘了,而由普来梅尔在 1908 年重新求得,И. И. 普里瓦洛夫**则于 1918 年在更一般的假设下得出.在目前,以柯西型积分为基础的、用来解数学物理中的边值问题的那些方法,在 Н. И. 穆斯海利什维里、И. Н. 万库、А. В. 皮察泽的工作中,最有成效地发展着.

52. 柯西型积分.索霍茨基公式 柯西积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \tag{1}$$

用函数在边界 C 上的值,表示出在封闭曲线 C 内部的一个解析函数(见第 14 目).现在假定,C 是任意一条没有尖点的曲线(这对于以后很重要),不必是封闭的.在 C 上给定任意一个函数 $f(\zeta)$,这函数是处处连续的,只有在有限多个点处可能例外,在这些点处函数有着可积的间断.

照积分(1)的样子来构成的那个积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \tag{2}$$

叫做**柯西型积分**.

---

* 索霍茨基, Об определённых интегралах и Функциях, удотребляемых при разложениях в рады, СПВ., 1873.

** 伊凡·伊凡诺维奇·普里瓦洛夫(1891—1941),苏联数学家,复变函数论专家.

照样重复第 17 目中的推理,我们便可以确信,柯西型积分是在任何一个不位于曲线 C 上的点 z 处都解析的函数.这时,如果 C 把平面划分成若干个区域,那么,一般地说,在这些区域内柯西型积分决定不同的解析函数.例如,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

在圆 $|z|<1$ 内处处等于 1,而在圆外处处等于 0.

容易理解,即使在 C 是封闭周线时的情形,柯西型积分一般讲来不是一个柯西积分,这便是说,函数值 $f(\zeta)$ 不一定是 $F(z)$ 当 $z\to\zeta$ 时的极限值.事实上,我们在第 43 目中已经知道,单是在区域的边界上给定了解析函数的实数部分,便确定了函数在区域内部的实数部分.于是,根据柯西 - 黎曼方程,函数的虚数部分在区域内部也可在相差一个常数项的精度内被确定,因而,它在 z 趋于区域边界时的那些极限值,也就这样地被确定.所以,如果在区域边界上给定了两个互相没有任何联系的函数——函数 $f(\zeta)$ 的实数部分与虚数部分,在一般情况下也不可能期望 $F(z)$ 在 $z\to\zeta$ 时趋于所给定的那些值.

为了要研究关于柯西型积分的边界值的问题,我们首先来弄清楚当点 z 在积分曲线 C 上时,这积分所可能具有的意义.如果点 z 位于 C 上,那么积分(2)一般说来是发散的,因为它的被积函数当 $\zeta\to z$ 时变成无限大.可是,在对 $f(\zeta)$ 作了若干补充假设之后,可以使这积分具有完全确定的意义.我们假定,在曲线 C 上的某一个点 $\zeta=\zeta_0$ 处,函数 $f(\zeta)$ 满足带有指数 $\mu\leqslant 1$ 的所谓**赫尔德**(Hölder)**条件**:

有一个常数 M 存在,使得对于曲线 C 上所有足够邻近 ζ_0 的点 ζ 来说,不等式

$$|f(\zeta)-f(\zeta_0)|\leqslant M|\zeta-\zeta_0|^{\mu},0<\mu\leqslant 1 \tag{3}$$

都成立.

赫尔德条件显然是表明了下述这个事实:函数的增量,相对于自变量的增量是一个不低于 μ 阶的无限小.

我们来证明,在所取的这条件下,即使当 $z=\zeta_0$ 时,柯西型积分也存在,只需我们在某种特殊的意义下来理解它,而且我们可以用通常的积分来求出它的表达式.我们先假定 ζ_0 不是曲线 C 的一个角点,并且把 C 与圆周 $|z-\zeta_0|=r$ 的两个交点记作 ζ' 与 ζ'',把曲线 C 在 ζ' 与 ζ'' 之间的那一段记作 c,把 C 的端点记作 a 与 b (图 124).我们有

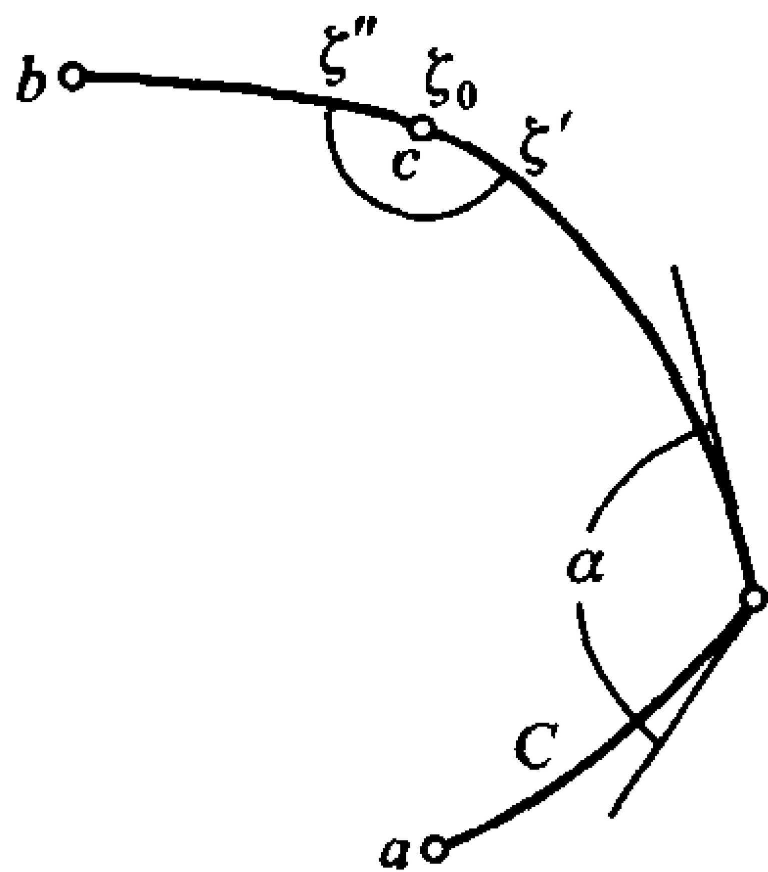


图 124

$$\int_{C-c}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\int_{C-c}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+f(\zeta_0)\int_{C-c}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}. \tag{4}$$

但是,

$$\int_{C-c}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\ln(\zeta-\zeta_0)\Big|_a^{\zeta''}+\ln(\zeta-\zeta_0)\Big|_{\zeta'}^{b}=\ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}-\ln\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0},$$

式中在弧 $a\zeta'$ 与 $\zeta''b$ 上的 ln,我们理解为是对数的任何两个在这些弧上连续变化的分支,同时,为了确定起见,设定 $\ln(\zeta''-\zeta_0)$ 的值是由值 $\ln(\zeta'-\zeta_0)$ 当点 ζ 沿着圆周 $|z-\zeta_0|=r$ 的在曲线 C 左边的那段弧移动时,经连续变化而得到的. 由于最后这个条件与 $|\zeta'-\zeta_0|=|\zeta''-\zeta_0|$,我们有

$$\lim_{r\to 0}\ln\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}=-i\pi. \tag{5}$$

另一方面,当 r 足够小时,根据赫尔德条件,有

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|\leqslant\frac{M}{|\zeta-\zeta_0|^{1-\mu}},$$

因此,极限

$$\lim_{r\to 0}\int_{C-c}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta=\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta \tag{6}$$

存在,并且最后这个积分可以以通常的意义来理解. 因此,公式(4)具有如下的形状:

$$\int_{C-c}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+f(\zeta_0)\ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}+i\pi f(\zeta_0)+O(r), \tag{7}$$

其中当 $r\to 0$ 时 $O(r)\to 0$.

由公式(7)可以知道极限

$$\lim_{r\to 0}\int_{C-c}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$$

存在,这个极限值叫做积分的**主值**,而由公式(7)所确定的那个积分本身,叫做**奇积分**(在柯西意义下). 在我们这个奇积分定义中,最主要的一点是:从 C 中去掉的那一段弧 c,是按照一个完全确定的规则(即,对于任何 r,它的两个端点都同时在圆周 $|z-\zeta_0|=r$ 上)来趋近于点 ζ_0 的. 如果 c 按照别的规则趋于点 ζ_0,那时(7)式的极限就可能不存在. 我们要提醒一下,在通常的广义积分的定义中,要求在 c 按照任何规则趋于点 ζ_0 时,(7)的极限都存在. 由此可以清楚地知道,如果积分(7)在通常意义下存在,那么作为奇积分它也必定存在,并且它的主值与通常广义积分的值相同*. 显然,其逆定理并不成立.

我们用一个简单的例子来说明这个定义. 在实轴的线段 $(-1,1)$ 上所取的积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$,大家知道,是不存在的. 可是作为柯西意义下的奇积分来说,它却是存在的,因为极限

$$\lim_{r\to 0}\left\{\int_{-1}^{-r}\frac{dx}{x}+\int_r^1\frac{dx}{x}\right\}=\lim_{r\to 0}\left\{\ln r+\ln\frac{1}{r}\right\}=0$$

存在(按照奇积分定义,我们从线段 $(-1,1)$ 中把线段 $(-r,r)$ 去掉).

---

* 所以我们在(7)式中对于奇积分仍保存了通常积分的记号.

在公式(7)中取 $r\to 0$ 时的极限值,我们便得出下面这个定理:

定理 1 设 ζ_0 是曲线 C 上的一个正则点,并且不是 C 的端点.如果在点 ζ_0 处函数 $f(\zeta)$ 满足带有指数 $\mu\leqslant 1$ 的赫尔德条件,那么柯西型积分在这个点处作为奇积分是存在的,而且它的主值可以按照公式

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2}f(\zeta_0)+\frac{f(\zeta_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}\tag{8}$$

用通常的积分来表达.

特别是,如果曲线 C 是一条封闭曲线,那么可以取 $a=b$,于是式中带有对数的那一项便消失了,公式(8)呈更简单的形状:

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2}f(\zeta_0).\tag{9}$$

现在设 ζ_0 是曲线 C 的一个角点.我们把 C 在点 ζ_0 处的左右切线之间的角度记作 α,这角度是从曲线 C 的左面来量的(见图 124).在考虑前面所采用的关于那两个对数分支间的关系的条件时,代替公式(5)我们将有

$$\lim_{r\to 0}\ln\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}=-i\alpha.$$

于是,我们所得到的便不是公式(8),而是公式

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{\alpha}{2\pi}f(\zeta_0)+\frac{f(\zeta_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}.\tag{10}$$

我们转向研究当 z 趋近于积分的曲线 C 时,柯西型积分的极限值.先证明下面的引理:

引理 设函数 $f(\zeta)$ 在点 ζ_0 处满足带有指数 $\mu\leqslant 1$ 的赫尔德条件,而且当 $z\to\zeta_0$ 时,量

$$h=|z-\zeta_0|$$

与 d——点 z 与 C 上的点间的最短距离——的比始终保持是有界的.那么

$$\lim_{z\to\zeta_0}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta=\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta.\tag{11}$$

为了证明这个引理,我们来估计在(11)式的左端与右端中那两个积分之间的差 Δ 的值:

$$\Delta=\int_C(z-\zeta_0)\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{(\zeta-z)(\zeta-\zeta_0)}d\zeta.$$

把积分 Δ 分成两个积分:其中的第一个是沿着曲线 C 的一段弧 c 来积的,在这段弧 c 上的点都满足 $|\zeta-\zeta_0|\leqslant\delta$,这里 δ 是某一个数,我们将在后面来明确规定它应如何选取.第二个积分是沿着 C 的其余部分 $C'=C-c$ 来积的.

对于第一个积分,利用赫尔德条件(假设 δ 足够小)以及 $|\zeta-z|\geqslant d$,我们得出

$$|\Delta_1|\leqslant\int_C h\frac{M|\zeta-\zeta_0|^\mu}{d|\zeta-\zeta_0|}|d\zeta|=\frac{hM}{d}\int_C\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\zeta_0|^{1-\mu}}.$$

把曲线 C 上弧 $\widehat{\zeta_0\zeta}$ 所对的弦的长度记作 $t=|\zeta-\zeta_0|$,因为 C 没有尖点,所以弧的长度与它所对弦的长度的比是有界的.设这个比值不超过 A,于是 $|d\zeta|=ds\leqslant Adt$,因此这最后估值的形状为

$$|\Delta_1|\leqslant 2\frac{h}{d}MA\int_0^\delta\frac{dt}{t^{1-\mu}}=\text{const}\cdot\delta^\mu.$$

由这个式子中知道,可以把 δ 选取得足够小,以使得量 $|\Delta_1|$ 不超过任何一个预先给定的数 $\frac{\varepsilon}{2}$.

其次,因为曲线 C' 不包含点 ζ_0,所以当 δ 已经被固定时,积分

$$\int_{C'}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta$$

作为 z 的函数在点 ζ_0 处是连续的,因此,对于足够小的 $h=|z-\zeta_0|$,量 $|\Delta_2|$ 也将不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$.对于这样的 h.我们有 $|\Delta|\leqslant|\Delta_1|+|\Delta_2|<\varepsilon$,这便证明了所说的引理.

借助于这个引理,便容易地得出对于柯西型积分的极限值的公式.

定理 2(Ю. В. 索霍茨基)　设点 ζ_0 是周线 C 上的一个正则点,且不是 C 的端点,函数 $f(\zeta)$ 在这个点处满足带有指数 $\mu\leqslant 1$ 的赫尔德条件,且当 $z\to\zeta_0$ 时使得比值 $\frac{h}{d}$ 始终保持是有界的.于是柯西型积分(2)便具有极限值 $F^+(\zeta_0)$ 与 $F^-(\zeta_0)$,当 z 从 C 的左边与从右边趋于点 ζ_0 时,它分别趋于这两个极限值,并且

$$F^+(\zeta_0)=F(\zeta_0)+\frac{1}{2}f(\zeta_0),\quad F^-(\zeta_0)=F(\zeta_0)-\frac{1}{2}f(\zeta_0),\tag{12}$$

式中的 $F(\zeta_0)$ 是奇积分(9)*.

首先,设 C 是一条封闭曲线,并且是按正方向来通过的.我们有

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{f(\zeta_0)}{2\pi i}\int_C\frac{d\zeta}{\zeta-z},\tag{13}$$

并且,根据刚才所证明的那个引理,右端的第一个积分当 $z\to\zeta_0$ 时趋于极限 $\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$,第二个积分等于 $2\pi i$ 或 0,要看点 z 是在封闭路线 C 的左面还是右面(即在 C 的内部还是外部)而定.考虑到这个,我们当 $z\to\zeta_0$(从 C 的左面或右面)时在式(13)中便得到极限值:

---

* 公式(12)是 Ю. В. 索霍茨基所首先证明的(1873 年),后来由普来梅尔重新证明(1908 年),最后,在更一般的假设下为 И. И. 普里瓦洛夫所证明(1918 年).

$$F^{+}(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+f(\zeta_0),$$

$$F^{-}(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta.$$

把公式(9)中积分的值代入这里,我们便得出了所求的索霍茨基公式(12).

现在如果 C 不是封闭曲线,那么我们便用任意一条曲线 C' 把它延续成一条封闭曲线 $C_0=C+C'$,而在曲线 C' 上令 $f(\zeta)=0$. 于是,显然便有

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

而且如果 ζ_0 不与曲线 C 的端点相合的话,那么根据刚才的证明,索霍茨基公式(12)成立,不过其中的积分 $F(\zeta_0)$ 是沿着 C_0 积的. 但是,因为在曲线 C' 上 $f(\zeta)=0$,所以这个积分可以用沿着 C 取的积分来代替. 定理于是证明了*.

如果点 ζ_0 是 C 的一个角点,在其处两切线之间的角度等于 α,那么,利用公式(10)来代替(9)式(其中应当令 $a=b$),我们便得到索霍茨基公式的更一般的形式:

$$F^{+}(\zeta_0)=F(\zeta_0)+\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)f(\zeta_0),\quad F^{-}(\zeta_0)=F(\zeta_0)-\frac{\alpha}{2\pi}f(\zeta_0). \tag{14}$$

由索霍茨基公式(12),而对于角点情形,由公式(14),我们可以得出下面的结论:*当在点 ζ_0 处越过积分的曲线 C 时,柯西型积分经历一个跃距*

$$F^{+}(\zeta_0)-F^{-}(\zeta_0)=f(\zeta_0). \tag{15}$$

在(15)式中包含了在本目开始时所提出的,关于寻求使柯西型积分成为一个柯西积分的条件这个问题的解答. 我们看到,如果曲线 C 是封闭的,并且在它的每一个点 ζ 处都有 $F^{-}(\zeta)=0$,那么 $F(z)$ 的由 C 的内部所取的极限值,即 $F^{+}(\zeta)$,便都等于 $f(\zeta)$,而这就表明了,$F(z)$ 是一个柯西积分. 从另一方面来说,如果 $F(z)$ 是一个柯西积分,那么 $F^{+}(\zeta)=f(\zeta)$,所以 $F^{-}(\zeta)=0$. 因此,要使积分(2)是一个柯西积分,其充分必要条件是:在曲线 C 的每一个点处都满足条件

$$F^{-}(\zeta)=0. \tag{16}$$

这个条件,显然,同时也是 $f(\zeta)$ 在 C 上给出的值是在 C 内解析的函数的边界值的条件. 我们可以把这个条件表示成更方便的形式:

定理 3 *如果在一条封闭周线 C 的每一个点处,函数 $f(\zeta)$ 都满足带有指数 $\mu\leqslant 1$ 的赫尔德条件,那么,要使它的值是 C 内解析的函数的边界值,其充分必要条件是,等式*

$$\int_C\zeta^n f(\zeta)d\zeta=0\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{17}$$

---

* 如果 $f(z)$ 在 C 的所有点上都满足带有同一指数 $\mu>0$ 的赫尔德条件,那么柯西型积分在 z 以任何方式(分别从右或从左)趋向于 ζ_0 时,趋向于 $F^{+}(\zeta)$ 或 $F^{-}(\zeta)$,而不仅仅在 h/d 有限时(见[14]).

都成立.

事实上,因为对于大的$|z|$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$$

那么对于在无穷远点的邻域内的柯西型积分,我们有展开式

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\cdot\frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z^{n+1}}\int_C \zeta^n f(\zeta)d\zeta. \tag{18}$$

由此可见,如果(17)中所有的条件都成立,那么,在无穷远点的邻域内就有$F(z)\equiv 0$.但是,由于柯西型积分$F(z)$在界线C的外部处处是解析的,所以根据第20目中的唯一性定理,由此推出,在C的外部处处有$F(z)\equiv 0$.因此,外极限值$F^-(\zeta)\equiv 0$,亦即$F^+(\zeta) = f(\zeta)$,并且$f(\zeta)$的值是在C内部解析的函数的边界值.

反过来说,如果$f(\zeta)$的值是在C内部解析的函数的边界值,那么,对于位于C的外部的任何一个点z来说,分式$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$作为点$\zeta$的函数,在界线$C$的内部都是解析的,而在$C$上是连续的.于是,根据柯西定理,对于所有这样的$z$,都有

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0,$$

而因此,在展开式(18)中所有的系数也都等于0.这便是条件(17),定理得证.

下面的定理也是很显然的.

定理 4　*在前面的定理的条件下,为了使$f(\zeta)$的值是C内解析的函数的边界值,其充分必要条件是等式*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0 \tag{19}$$

对一切位于C外的点z都成立.

现在我们考虑,在C上给出的值是在C外解析的函数的边界值的条件.首先我们注意,如果函数$f(z)$在C外包含无穷远点处是解析的,并且在周线本身上是连续的,那么对于无限区域下列柯西公式成立:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \begin{cases} -f(z) + f(\infty), & \text{对 } C \text{ 外的点 } z, \\ f(\infty), & \text{对 } C \text{ 内的点 } z \end{cases} \tag{20}$$

(周线C是按逆时针方向绕行的).

事实上,如果点z在C外,那么我们用一条把这点包含在其内的闭周线C'围住C,并且把第14目的柯西积分公式应用到由C和C'所限定的二阶连通区域:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

(两条周线按逆时针方向被通过的).因为在无穷远点的邻域内展开式

$$f(\zeta) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \cdots$$

成立,其中 $c_0=f(\infty)$,函数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在无穷远点处的留数等于 $-c_0=-f(\infty)$,并且,因而(见第 24 目),$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=f(\infty)$,这就是所需要的.

如果点 z 在 C 内部,那么函数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在 C 和 C' 之间是解析的,根据柯西定理

$$\int_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\int_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=0$$

并且考虑到前面的结果,我们得到了(20)的第二个公式.

根据所得的公式容易证明

定理 5 在定理 3 的条件下,使得 $f(\zeta)$ 的值是在 C 外解析的函数 $f(z)$ 的边界值的充分必要条件是等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=a=\text{const} \tag{21}$$

对一切位于 C 内的点成立,并且右边部分的常数等于 $f(\infty)$.

条件的必要性包含在公式(20)内.为了证明它的充分性,我们指出,函数

$$F(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}+a$$

在 C 的外面是解析的,并且由条件(21)推出,它的从内取的极限值 $F^+(\zeta)\equiv0$,而这意味着,根据索霍茨基公式 $F^-(\zeta)=f(\zeta)$.定理得证.

最后,当曲线 C 是单位圆时,我们引入与这种情形有关的定理 4 和 5 的有些不同的提法.

定理 6 为了使得在单位圆周 C 上的每一点都满足带有指数 $\mu\leqslant1$ 的赫尔德条件的函数 $f(\zeta)$ 的值分别是:1) 在圆 $|z|<1$ 内解析的函数的边界值;或者 2) 在圆外解析的函数的边界值的充分必要条件分别为满足条件:

1) 对 C 内的一切 z

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\overline{f(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}=\bar{a}=\text{const}, \tag{22}$$

其中 a 等于所提及函数在 $z=0$ 时的值,或者

2) 对 C 外的一切 z

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\overline{f(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}=0. \tag{23}$$

为了把这定理化为前面的一些定理,只要指出,如果 $F(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内是解析的,函数 $F_1(z)=\overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ 在该圆外部是解析的,因而在单位圆周 $|z|=1$ 上,那里 $\zeta=\frac{1}{\bar{\zeta}}$,函数 $F_1(z)$ 从外的极限值与函数 $F(z)$ 从内的极限值复共轭(反之亦然).

53. 希尔伯特-普里瓦洛夫的边值问题 И.И.普里瓦洛夫在 1934 年提出并解

决了下面这个边值问题:

在封闭曲线 C 上给定了两个复函数 $a(\zeta)\neq 0$ 与 $b(\zeta)$,都满足带有指数 $\mu\leqslant 1$ 的赫尔德条件.要求找出两个函数,使其中的一个函数 $f^-(z)$ 在 C 的外部,包括点 $z=\infty$ 在内,是解析的,而另一个函数 $f^+(z)$ 在 C 的内部是解析的,并且这两个函数在 C 上的边界值 $f^-(\zeta)$ 与 $f^+(\zeta)$ 必须都存在而且满足关系式

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta)+b(\zeta). \tag{1}$$

这个问题当 $b(\zeta)\equiv 0$ 时,即当边值关系式有形式

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta) \tag{2}$$

时的特殊情况,已经由希尔伯特(D. Hilbert)* 在 1905 年解决了.希尔伯特－普里瓦洛夫边值问题,在数学物理的各种问题中找到重要的应用(参看第 55 目).必须指出,希尔伯特与普里瓦洛夫的解都是不完备的.数学家加霍夫(Ф. Д. Гахов)在 1938 年给出了一个既完备而又极简单的解[13].这解便是我们在这里所引用的.

我们先从希尔伯特问题(2)的解开始.函数 $a(\zeta)$ 的辐角在循 C 绕行一周时所获得的全部改变量再除以 2π 而得出的那个整数:

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg a(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\ln a(\zeta), \tag{3}$$

我们称之为函数 $a(\zeta)$ 的指示数.我们先假定指示数等于 0,即,假定函数 $\ln a(\zeta)$ 在周线 C 上是单值的.在这样的情形下解很容易求得.我们作出柯西型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\ln a(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \tag{4}$$

并且把这个积分在 C 的外部与内部所定出的那两个函数分别记作 $F^-(z)$ 与 $F^+(z)$.于是,问题的解便是

$$f^-(z)=Ae^{-F^-(z)},\quad f^+(z)=Ae^{-F^+(z)}, \tag{5}$$

其中 A 是任意的一个常数(由上一目中的公式(18)可以推出 $F^-(\infty)=0$,所以 $A=f^-(\infty)$).

事实上,函数 $F^-(z)$ 与 $F^+(z)$ 分别在 C 的外部与内部是解析的,并且具有由索霍茨基公式联系着的极限值**.

$$F^-(\zeta)=F(\zeta)-\frac{1}{2}\ln a(\zeta),\quad F^+(\zeta)=F(\zeta)+\frac{1}{2}\ln a(\zeta),$$

其中 $F(\zeta)$ 是积分(4)的主值.把这两个等式换成指数的形式,并利用(5),便得到

$$f^-(\zeta)=A\sqrt{a(\zeta)}e^{-F(\zeta)},\quad f^+(\zeta)=\frac{A}{\sqrt{a(\zeta)}}e^{-F(\zeta)},$$

由此得出

$$\frac{f^-(\zeta)}{f^+(\zeta)}=a(\zeta),$$

---

* 希尔伯特(Hilbert,1862—1943),德国数学家.

** 因为在 C 上,$a\neq 0$,所以 $\ln a(\zeta)$ 与 $a(\zeta)$ 一起满足赫尔德条件.

这便是所需要证明的.

我们来证明,所构成的解在可以相差一个常数因子 A 的程度内是唯一的. 如果还存在着第二个解 $f_1^+(z)$,那么,由于函数(5)不会等于 0,函数 $\frac{f_1^+(z)}{f^+(z)}=g^+(z)$ 也将是解析的(各在相应的区域内). 根据边值条件(2),在周线 C 上有

$$\frac{g^-(\zeta)}{g^+(\zeta)}=\frac{f_1^-(\zeta)}{f_1^+(\zeta)}\cdot\frac{f^+(\zeta)}{f^-(\zeta)}=a(\zeta)\cdot\frac{1}{a(\zeta)}=1,$$

所以,根据连续延拓原理,$g^-(z)$ 与 $g^+(z)$ 构成一个在整个 z 平面上解析的函数 $g(z)$. 根据刘维尔定理,$g(z)\equiv\text{const}$,这便证明了我们的结论.

现在设 $\ln a(\zeta)$ 不是单值函数,并且它的指示数 $-n$ 是一个负数. 为了书写简便起见,我们还假设坐标原点包含在 C 的内部. 于是函数 $a_1(\zeta)=\zeta^n a(\zeta)$ 的指示数便等于 0,因为

$$\Delta_C\arg a_1(\zeta)=\Delta_C\arg\zeta^n+\Delta_C\arg a(\zeta)=2\pi n-2\pi n=0.$$

所以边值条件(2)可以写成

$$f^-(\zeta)=\frac{a_1(\zeta)}{\zeta^n}f^+(\zeta) \tag{6}$$

的形状. 我们把所要求的问题的解,写成两个函数的乘积的形式:

$$f^+(z)=f_1^+(z)f_2^+(z). \tag{7}$$

由于在这两对函数中有一对是可以任意选取的,我们选择 $f_1^+(z)$ 使其满足关系式

$$f_1^-(\zeta)=a_1(\zeta)f_1^+(\zeta). \tag{8}$$

因为函数 $a_1(\zeta)$ 的指示数等于 0,故可以使用已经获得的结果,这就是说,可以令

$$f_1^-(z)=e^{-F_1^-(z)},\quad f_1^+(z)=e^{-F_1^+(z)}, \tag{9}$$

其中 $F_1(z)$ 是根据边界值 $\ln a_1(\zeta)$ 而构成的柯西型积分(见公式(4)与(5),我们在式中取 $A=1$).

余下只需再选择函数 $f_2^\pm(z)$,使得在曲线 C 上有

$$f_2^-(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}f_2^+(\zeta), \tag{10}$$

那时乘积(7)将满足条件(6)(要证实这一点,只需使(8)与(10)相乘). 设这样的函数 $f_2^\pm(z)$ 已经选定,于是,按照(10)式,函数 $f_2^+(z)$ 与 $z^n f_2^-(z)$ 在 C 上相等,因而它们构成一个在整个有限平面内解析的函数,由于 $f_2^-(z)$ 在无穷远处是正则的,所以所构成的这个函数在无穷远处有一个不高于 n 阶的极点,这表示它是一个多项式. 因此,

$$f_2^-(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n},$$

$$f_2^+(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n;$$

回顾到公式(7)与(9),我们便可以把现在所讨论的情形下的问题的解,最终写成如下的形状:

$$\begin{aligned}f^-(z)&=\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\right)e^{-F_1^-(z)},\\ f^+(z)&=(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n)e^{-F_1^+(z)},\end{aligned}\tag{11}$$

其中

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\ln[\zeta^n a(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta.\tag{12}$$

公式(11)中的常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是任意的,并且其中的一个 a_0,可以由给出 $f^-(\infty)$的值来确定.

所以,如果函数 $a(\zeta)$的指示数等于 $-n$,那么希尔伯特问题便有 $n+1$ 个线性独立的解.引进记号

$$G^{\pm}(z)=e^{-F_1^{\pm}(z)},$$

这 $n+1$ 个解可以写成下面的形状:

$$\begin{aligned}&G^-(z),\frac{1}{z}G^-(z),\cdots,\frac{1}{z^n}G^-(z);\\ &G^+(z),zG^+(z),\cdots,z^nG^+(z).\end{aligned}\tag{13}$$

最后,我们来讨论当函数 $a(\zeta)$的指示数 n 是正数时的情形.原来,在这样的情形下希尔伯特问题没有在相应区域内解析的解.事实上,我们先作出指示数等于0的函数 $a_1(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}a(\zeta)$.再像在前一情形中那样,把所求的解写成乘积的形式:

$$f^{\pm}(z)=f_1^{\pm}(z)f_2^{\pm}(z).$$

我们使第一对函数满足条件 $f_1^-(\zeta)=a_1(\zeta)f_1^+(\zeta)$;

$f_1^{\pm}(z)$在可相差一个常数因子的精度内可以求出,因为函数 $a_1(\zeta)$的指示数等于0.对于第二对函数,我们得出如下的边值条件:$f_2^-(\zeta)=\zeta^nf_2^+(\zeta)$.由此可以知道 $f_2^-(z)$与 $z^nf_2^+(z)$构成一个解析函数,这函数在整个完全平面内都是正则的,所以是一个常数.由于在坐标原点处这函数等于0(因为在 C 的内部这函数与 $z^nf_2^+(z)$相同),所以它恒等于0.这是不可能的*.

现在来总结所得到的结果.

定理1(Ф.Д.加霍夫) 如果边界函数 $a(\zeta)$的指示数 $-n$ 不是正数,则希尔伯特问题

---

* 如果允许所求的函数可以在某一个点,例如点 $z=\infty$处有极点的话,那么这问题便成为是可解的.这时如果 $a(\zeta)$的指示数等于 n,那么就有唯一的一个解存在,它在无穷远点处具有 $\leqslant n$ 阶的极点.见 Гахов[13].

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta)$$

有 $n+1$ 个形如(13)的线性独立的解,如果指示数 n 是个正数,那么这问题便没有在相应区域内解析的解.

我们转向解普里瓦洛夫问题

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta)+b(\zeta). \tag{1}$$

首先设函数 $a(\zeta)$的指示数等于0,即,对应的希尔伯特问题——在条件(1)中令 $b(\zeta)\equiv 0$所得到的——有唯一的解

$$f_1^+(z)=e^{-F^+(z)}, \tag{14}$$

其中 $F(z)$由积分(4)来确定.我们仍旧用乘积的形式 $f^+(z)=f_1^+(z)f_2^+(z)$来求普里瓦洛夫问题的解,其中的 $f_1^+(z)$是由公式(14)所确定的.在界线 C 上,关系式

$$f_1^-f_2^-=af_1^+f_2^++b=f_1^-f_2^++b$$

必须满足(我们根据条件(2)把 af_1^+ 换成 f_1^-).从这式子,再根据(14)来代换 $f_1^-(\zeta)$之后,我们便得到了对于 $f_2(z)$的边值条件

$$f_2^+(\zeta)-f_2^-(\zeta)=-b(\zeta)e^{F^-(\zeta)} \tag{15}$$

这个边值条件已化为给定了 $f_2(z)$在界线 C 上的跃距.回顾上一目中的索霍茨基公式(15),我们便可以断定,函数 $f_2(z)$仅与柯西型积分

$$F_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{b(\zeta)e^{F^-(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta \tag{16}$$

相差一个常数项,即,

$$f_2^\pm(z)=A+F_2^\pm(z), \tag{17}$$

其中 A 是一个任意常数.

因此,如果函数 $a(\zeta)$的指示数等于0,那么普里瓦洛夫问题的解便可表示成

$$f^\pm(z)=e^{-F^\pm(z)}\{A+F_2^\pm(z)\} \tag{18}$$

的形状,其中 $F(z)$与 $F_2(z)$分别由公式(4)与(16)来确定,A 是一个任意常数.

我们来证明所得的解是唯一的.显然,问题(1)的两个解的差必定满足条件(2).由此知道,普里瓦洛夫问题的两个解,彼此仅可能相差一个希尔伯特问题的解.考虑到前面所证明的希尔伯特问题的解的唯一性,我们便知道,普里瓦洛夫问题的任何一个解,都可以由(18)中改变常数 A 而得到.

如果函数 $a(\zeta)$的指示数等于 $-n$,我们引入一个指示数等于0的函数 $a_1(\zeta)=\zeta^n a(\zeta)$,再把函数 $f^\pm(z)$写成乘积 $f_1^\pm(z)f_2^\pm(z)$的形状来探求它,其中 $f_1^\pm(z)=e^{-F_1^\pm(z)}$,并且 $F_1(z)$由积分(12)来确定,又 $f_2(z)$要满足边值条件

$$f_2^-(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}f_2^+(\zeta)+b(\zeta)\cdot e^{F_1^-(\zeta)}.$$

最后这个条件显然为下面那两个函数所满足

$$f_2^-(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+F_2^-(z),$$

$$f_2^+(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n+z^nF_2^+(z),$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是任意常数,而 $F_2(z)$ 按照公式(16)来确定,不过在其中要把 $F^-(\zeta)$ 换成 $F_1^-(\zeta)$.因此,在指示数是负数 $-n$ 时,普里瓦洛夫问题的解最后可以表示成

$$f^-(z)=\left\{a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+F_2^-(z)\right\}e^{-F_1^-(z)},\tag{19}$$

$$f^+(z)=\{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n+z^nF_2^+(z)\}e^{-F_1^+(z)}$$

的形状.同前面一样,容易证明,公式(19)包含了问题的所有的解.

最后,如果函数 $a(\zeta)$ 的指示数 n 是正数,那么,用同样的方法,对于 $f_1(z)$ 导出条件

$$f_1^-(\zeta)=\frac{a(\zeta)}{\zeta^n}f_1^+(\zeta),$$

对于 $f_2(z)$ 导出条件

$$f_2^-(\zeta)=\zeta^nf_2^+(\zeta)+b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)},$$

其中 $F_1(z)$ 表示根据边界值 $\ln\dfrac{a(\zeta)}{\zeta^n}$ 所构成的柯西型积分.最后那个条件为函数

$$f_2^-(z)=A+F_2^-(z),\quad f_2^+(z)=\frac{A+F_2^+(z)}{z^n}$$

所满足,其中 $F_2(z)$ 由公式(16)来确定,不过其中要用 $F_1^-(\zeta)$ 来代替 $F^-(\zeta)$.容易证明,仅有这两个函数能满足我们的条件.如果点 $z=0$ 是 $A+F_2(z)$ 的不低于 n 阶的零点,则函数 $f_2^+(z)$ 在 $z=0$ 处是正则的.

如果把 $F_2^+(z)$ 按照 z 的乘幂展开成泰勒级数,上述的最后那个条件的形状便可以有一些改变.为此.我们用

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{\zeta}}=\frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\cdots+\frac{z^k}{\zeta^{k+1}}+\cdots$$

代入公式(16)中(在式中用 F_1 代替 F),便得到

$$F_2^+(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{b(\zeta)}{\zeta}e^{F_1^-(\zeta)}d\zeta-\frac{z}{2\pi i}\int_C\frac{b(\zeta)}{\zeta^2}e^{F_1^-(\zeta)}d\zeta-\cdots$$
$$-\frac{z^n}{2\pi i}\int_C\frac{b(\zeta)}{\zeta^{n+1}}e^{F_1^-(\zeta)}d\zeta-\cdots.$$

由此知道,我们的可解条件可以写成

$$\int_C\frac{b(\zeta)}{\zeta^{k+1}}e^{F_1^-(\zeta)}d\zeta=0\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{20}$$

的形状(常数 A 应当取等于展开式中的自由项).由此,在指示数 n 为正数的情形下,只有当条件(20)满足时,普里瓦洛夫问题才能有正则解.

现在我们来总结所得到的结果

定理 2(Ф.Д.加霍夫) 如果边界函数 $a(\zeta)$ 的指示数 $-n$ 不是正数,则普里瓦洛夫问题

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta)+b(\zeta)$$

有一族依赖于 $n+1$ 个任意常数的解(19).如果函数 $a(\zeta)$ 的指示数 n 是正数,则这问题只有当函数 $b(\zeta)$ 满足补充条件(20)时才能有解.

最后,我们要指出,在这里所陈述的解希尔伯特-普里瓦洛夫问题的这些方法,也可以推广到不封闭的曲线 C 的情形中去.要作这样的推广,只需用一段连接 C 的那两个端点的曲线 C',把曲线 C 延续成封闭界线 C_0 $(C_0=C+C')$,并且在 C' 上令

$$a(\zeta)\equiv 1,\quad b(\zeta)\equiv 0$$

就是了.我们现在就 $b(\zeta)\equiv 0$,而 $a(\zeta)$ 的指示数等于 0 的简单情形来讨论,这时我们规定函数 $a(\zeta)$ 的指示数是当点 ζ 按两个相反方向循线 C 的两个边沿完全绕行一周时,$\arg a(\zeta)$ 的改变量.对于周线 C_0 按照公式(4)与(5)来构成解 $f^+(z)$,这时公式(4)中的积分是只沿着 C 取的(因为按照我们的规定,在 C' 上 $\ln a(\zeta)\equiv 0$).这个解 $f^+(z)$ 在曲线 C 的外部处处都是单值的解析函数(在 C' 上由边值条件给出 $f^+(\zeta)=f^-(\zeta)$),而在 C 的两个边沿上则取值 $f^+(\zeta)$ 与 $f^-(\zeta)$,它们满足条件(2).这情形与封闭界线的情形所不同的只是,一般说来,这个解在曲线 C 的两个端点处是无界的.但是,可以证明,如果 $a(\zeta)$ 满足赫尔德条件,那么,当趋近 C 的端点时,这个解变成阶数小于 1 的无限大.

如果拿任意一个在界线 C 上的点处是解析的函数 $g(z)$ 来乘问题的解 $f^+(z)$,那么乘积 $f^+(z)g(z)$ 显然也是同样的边值问题的解,如同 $f^+(z)$ 一样.利用在不封闭的界线 C 的情形,问题的解容许在 C 的端点处变成阶数小于 1 的无限大这一点,因此有时也可以用一个除了在 C 的某一个端点处以外处处正则的函数,来乘这问题的解 $f^+(z)$.这些结果我们将在应用中利用(见第 55 目).

与不封闭的界线的希尔伯特-普里瓦洛夫问题有关的问题的完整的叙述,读者可以在 Н.И.穆斯海利什维里的专著[14]的第四章中找到.在那专著中还引了赫维德里择在 1941 年所给出的,对 Ф.Д.加霍夫方法在多阶连通区域中的推广.

54. 凯尔迪什-谢道夫公式 下面这个混合边值问题* 在应用上显得非常重要:

在单连通区域 D 的边界 C 上给出点 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n$,按它们写给的次序排列.求一个在这区域 D 内解析的函数 $f(z)$,其实数部分取在弧 $\widehat{a_kb_k}$ 上给出的值,

* 这问题是所谓希尔伯特问题的一个特殊情况(见第 55 目).

而虚数部分取在弧$\widehat{b_k a_{k+1}}$上给出的值($k=1,2,\cdots,n;a_{n+1}=a_1$).

凯尔迪什与谢道夫在1937年给出了这一问题的完整的研究,并且证明了,一般说来,它在接近弧的所有端点a_k和b_k处没有有限的解.如果放弃$f(z)$有限的条件和只要求对$f(z)$的积分有限,那么问题将被解出,其精确度到$(n+1)$个任意常数.最后,他们证明了,如果此外还要求$f(z)$在端点中某n个附近是有限的,并且在某一个边界点上给出它的值,问题将有唯一解.

我们更详细地讨论下面的情况.还假设区域D是上半平面,显然,借助于共形映射,任意单连通区域可化为这种情况.

这样,假设在x轴上给定点$-\infty<a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n<\infty$和两个有有限个第一类间断点的实函数$u(x),v(x)$,并且$u(x)$定义在所有区间$(a_k,b_k)$上,而$v(x)$定义在所有区间$(b_k,a_{k+1})$上($k=1,2,\cdots,n;a_{n+1}=a_1$).再假设在区间$(-\infty,a_1)$和$(b_n,\infty)$上函数$v(x)$对某个$\mu>0$满足形如$|v(x)|\leqslant \mathrm{const}/|x|^\mu$的条件.要求找出在上半平面解析的函数$f(z)$,使得在区间$(a_k,b_k)$上

$$\mathrm{Re}\, f(z)=u(x),$$

而在区间(b_k,a_{k+1})上

$$\mathrm{Im}\, f(z)=v(z).$$

如我们上面所说过的,下列定理成立

定理(凯尔迪什-谢道夫) 对于上半平面的混合问题有满足以下条件的唯一解$f(z)$:

1) $f(z)$在一切点a_k近旁是有界的;

2) 在一切点b_k近旁积分$\int^z f(z)dz$是有界的;

3) 当$z\to\infty$时,$f(z)$有有限极限$f(\infty)$,为简单起见设这极限是实数.

为了证明我们记

$$g(z)=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{z-b_k}{z-a_k}}, \tag{1}$$

其中仅考虑根式在线段(b_n,∞)上取正值的分支,Π是表示相乘的记号.设z是在上半个平面中的任意一点,把它用一条由上半个圆周

$$C_R:|\zeta|=R,\quad \mathrm{Im}\,\zeta>0$$

与实轴上的一段线段$(-R,R)$所构成的封闭周线C围起来.假设$f(x)$已找到,那么按柯西公式有

$$f(z)g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{2}$$

但是,显然因为

$$\lim_{\zeta\to\infty} g(\zeta)=1,$$

所以也存在着极限

$$\lim_{\zeta\to\infty}\frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta-z}\zeta=f(\infty).$$

因此,函数$\frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta-z}$在点$\zeta=\infty$的邻域内有展开式形如

$$\frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{f(\infty)+\varphi(\zeta)}{\zeta},\tag{3}$$

其中当$\zeta\to\infty$时$\varphi(\zeta)\to 0$,把(3)式沿着半径足够大的半圆周C_R来积分,我们得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2}f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}d\zeta.$$

因为当$\zeta\to\infty$时,$\varphi(\zeta)\to 0$,所以右端中的积分当$R\to\infty$时趋于0,于是,关系式(2)在极限情形时便给出

$$f(z)g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)g(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2}f(\infty),\tag{4}$$

其中的积分是沿着实轴取的.在公式(4)的右端中把z换成$\bar{z}$,我们可以类似地得到

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)g(t)}{t-\bar{z}}dt+\frac{1}{2}f(\infty)$$

在最后公式中我们转到复共轭量上,并且把它与前一公式(4)相加:

$$f(z)g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)g(t)-\overline{f(t)g(t)}}{t-z}dt+f(\infty).$$

现在我们注意,乘积$\prod_{k=1}^{n}\frac{t-b_k}{t-a_k}$在线段$(a_k,b_k)$上是负的,而在$(b_k,a_{k+1})$上它是正的,所以函数$g(t)$在$(a_k,b_k)$上取纯虚值,而在线段$(b_k,a_{k+1})$上取实值.考虑到这个,我们把最后的式子改写成

$$f(z)g(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{f(t)+\overline{f(t)}}{t-z}g(t)dt+\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{f(t)-\overline{f(t)}}{t-z}g(t)dt\right\}+f(\infty).\tag{5}$$

这里右端部分是已知的,因为在区间(a_k,b_k)上已知$\operatorname{Re}f(t)=u(t)$,而在$(b_k,a_{k+1})$上已知$\operatorname{Im}f(t)=v(t)$.由此可见,我们得出所找的凯尔迪什-谢道夫公式:

$$f(z)=\frac{1}{\pi i g(z)}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(t)g(t)}{t-z}dt+i\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{v(t)g(t)}{t-z}dt\right\}+\frac{f(\infty)}{g(z)}.\tag{6}$$

(第二个和中的按线段(b_n,a_{n+1})积的反常积分,根据加到$v(x)$上的补充条件,是收敛的).

留下需要证明,这公式所确定的函数实际上解了那个混合问题.为此,我们来考虑和式(6)中的一个项

$$f_k(z)=\frac{1}{\pi i g(z)}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(t)g(t)}{t-z}dt.\tag{7}$$

乘积 $f_k(z)g(z)$ 是根据函数 $\varphi(t)=2u(t)g(t)$ 构成的一个柯西型积分. 当 z 从上趋近于线段 (a_k,b_k) 上的一个点 t_0 时,它的极限值 $f_k^+(t_0)g(t_0)$ 按照第 52 目中的索霍茨基公式(12)

$$f_k^+(t_0)g(t_0)=\Phi(t_0)+u(t_0)g(t_0) \tag{8}$$

来确定,其中的 $\Phi(t_0)$ 根据第 52 目中的公式(8)等于

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(t)g(t)-u(t_0)g(t_0)}{t-t_0}dt+u(t_0)g(t_0)+\frac{u(t_0)g(t_0)}{\pi i}\ln\frac{b_k-t_0}{a_k-t_0}. \tag{9}$$

考虑到当 $a_k<t_0<b_k$ 时,对数的从上面趋近线段 (a_k,b_k) 时的极限值等于

$$\ln\frac{b_k-t_0}{a_k-t_0}=\ln\frac{b_k-t_0}{t_0-a_k}-i\pi$$

(我们考虑对数的在 t 轴上从这线段 (a_k,b_k) 的右边开始取实值的那个分支),在把公式(8)中的 $\Phi(t_0)$ 由(9)来代换,并约去 $g(t_0)$ 后,我们可以把公式(8)改写成下面的形状:

$$f_k^+(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(t)\dfrac{g(t)}{g(t_0)}-u(t_0)}{t-t_0}dt+u(t_0)+\frac{u(t_0)}{\pi i}\ln\frac{b_k-t_0}{t_0-a_k}. \tag{10}$$

因为当 t 与 t_0 在线段 (a_k,b_k) 上时,函数

$$g(t)=\prod_{v=1}^{n}\sqrt{\frac{t-b_v}{t-a_v}}$$

取纯虚数值,所以公式(10)中的积分是一个实数,而且项 $\ln\dfrac{b_k-t_0}{t_0-a_k}$ 也是一个实数. 因此,$\mathrm{Re}f_k^+(t_0)=u(t_0)$. 现在如果 z 从上趋近于在某一线段 (a_{k_1},b_{k_1}) 上的一个点 t_1, $k_1\neq k$,那么极限值 $f_k^+(t_1)$ 便可以由直接把 $z=t_1$ 代入积分(7)而求得:

$$f_k^+(t_1)=\frac{1}{\pi i g(t_1)}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(t)g(t)}{t-t_1}dt.$$

在这里 $g(t_1)$ 是纯虚数,$g(t)$ 也是纯虚数,因此,$f_k^+(t_1)$ 的值是一个纯虚数,所以 $\mathrm{Re}f_k^+(t_1)=0$. 最后,如果 z 从上趋近于在某一线段 (b_v,a_{v+1}), $v=1,2,\cdots,n$ 上的一个点 t_2,那么极限值等于

$$f_k^+(t_2)=\frac{1}{\pi i g(t_2)}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(t)g(t)}{t-t_2}dt.$$

在这里 $g(t_2)$ 是实数,$g(t)$ 是纯虚数,所以 $f_k^+(t_2)$ 的值是实数,而 $\mathrm{Im}\,f_k^+(t_2)=0$.

从上面的讨论中可以得出:函数

$$f_*(z)=\frac{1}{\pi i g(z)}\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(t)g(t)}{t-z}dt$$

的实数部分在每一段线段(a_k,b_k)上都取所给定的那些值 $u(t)$,而它的虚数部分在每一段线段(b_k,a_{k+1})上都等于0.

我们可以完全类似地证明,函数

$$f_{**}(z)=\frac{1}{\pi g(z)}\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{v(t)g(t)}{t-z}dt$$

的虚数部分在每一段线段(b_k,a_{k+1})上都取所给定的那些值 $v(t)$,而它的实数部分在每一段线段(a_k,b_k)上都等于0.

由此推出,函数(6)

$$f(z)=f_*(z)+f_{**}(z)+\frac{f(\infty)}{g(z)}$$

确实是那个混合边值问题的解(最后那一项的存在不会使边界值有任何改变,因为$f(\infty)$是实数,而 $g(z)$在线段(a_k,b_k)上取纯虚数值,在线段(b_k,a_{k+1})上取实数值).从函数 $f_*(z)$与 $f_{**}(z)$的构造中知道,当 $z\to\infty$时它们都趋于0;这时函数 $g(z)$趋于1,所以,在无穷远点处的条件也适合.由公式(6)的推导中还可以知道,它给出了混合问题的满足条件1)—3)的唯一的解.定理得证.

现在证明,如果在那些点 a_k处,去掉 $f(z)$是有界的这个条件,而仅要求积分 $\int^z f(z)dz$ 是有界的(如在点 b_k处那样),那么,在给定 $f(\infty)$的值时在这问题的解中将包含 n 个任意的实数常量.事实上,就任何一组实数常量 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}$来说,函数

$$h(z)=\frac{\gamma_0+\gamma_1 z+\cdots+\gamma_{n-1}z^{n-1}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)(z-b_k)}} \tag{11}$$

的实数部分在所有的线段(a_k,b_k)上都等于0,而它的虚数部分在所有的线段(b_k,a_{k+1})上也都等于0.当 $z\to\infty$时,这函数显然趋于0.因此,我们可以把这函数添加到公式(6)所确定的那个函数 $f(z)$上去,所得的和便给出一个在上半平面内解析的函数,它在那些点 a_k与 b_k的邻域内都具有有界的积分,在无穷远处取给定的实数值 $f(\infty)$,所以是我们这个混合边值问题的解.

引入记号

$$\varphi(t)=\begin{cases}u(t), & \text{在线段}(a_k,b_k)\text{上},\\ iv(t), & \text{在线段}(b_k,a_{k+1})\text{上}\end{cases} \tag{12}$$

$(k=1,2,\cdots,n)$,我们可以把凯尔迪什-谢道夫公式写成

$$f(z)=\frac{1}{\pi i g(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)\varphi(t)}{t-z}dt+h(z)+\frac{f(\infty)}{g(z)} \tag{13}$$

的形状,其中的 $g(z)$与 $h(z)$由公式(1)与(11)来确定.可以证明,公式(13)包含了这问题的满足所设条件的所有解答(Н. И. Мусхелишвили[14]).

在下一目中我们将要应用到变换成下述情形的凯尔迪什－谢道夫公式：那时所考虑的不是上半平面，而是圆 $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$. 要完成这个变换，我们可以利用那个把圆 $\left|z_1-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ 映到上半 z 平面上去的分式线性映射

$$z=\frac{iz_1}{1-z_1}. \tag{14}$$

以(14)代入公式(13)中，并且为了简单起见，在(13)中令 $h(z)=f(\infty)=0$，然后重新用 z 代替 z_1，又用 ζ 代替 t，我们便得到

$$f(z)=\frac{1}{\pi ig(z)}\int_C\frac{g(\zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\cdot\frac{1-z}{1-\zeta}d\zeta, \tag{15}$$

其中 C 是圆周 $\left|\zeta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$\varphi(\zeta)$ 是一个给定在圆周上的函数，在 (a_k,b_k) 上等于 $u(\zeta)$，在 (b_k,a_{k+1}) 上等于 $iv(\zeta)$，又 $g(z)$ 是按照(1)式来确定的(点 a_k,b_k 都在 C 上).

完全类似地可以把公式(13)变换到单位圆 $|z|<1$ 的情形中去. 这时凯尔迪什－谢道夫公式的形状是

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{1}{\pi ig(z)}\int_{|\zeta|=1}g(\zeta)\varphi(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{2\zeta}\right)d\zeta\\&+\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{(z-a_k)(z-b_k)}}\,(c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n),\end{aligned} \tag{16}$$

其中 c_k 是一些复数常量，满足条件 $c_{n-k}=\bar{c}_k$. 公式(16)的推导，读者可以在 Н. И. Мусхелишвили 的书[14]中查到.

55. 其他边值问题 在这里我们还将讨论一些解析和调和函数理论的一些边值问题.

(1) 黎曼－希尔伯特的边值问题 这问题可以表述如下

求一个在区域 D 内解析而在 $\bar{D}$ 上连续的函数

$$f(z)=u(z)+iv(z),$$

使其在区域的边界 C 上满足条件

$$a(\zeta)u(\zeta)-b(\zeta)v(\zeta)=c(\zeta), \tag{1}$$

其中 a,b,c 都是给定在边界 C 上的实函数.

我们引用 Н. И. 穆斯海利什维里所给出的黎曼－希尔伯特问题的解法. 如果 D 是一个单连通区域，那么，便可以借助共形映射把这问题化成 D 是单位圆 $|z|<1$ 时的情形. 我们就来讨论这一种情形，此外还假定函数 a,b,c 都满足赫尔德条件，并且在 C 上处处有

$$a^2+b^2\neq0.$$

我们可以把边值条件(1)改写成

$$2\mathrm{Re}(a+ib)f(\zeta)=(a+ib)f(\zeta)+(a-ib)\overline{f(\zeta)}=2c \tag{2}$$

的形状. 在单位圆的外部令

$$f_*(z)=\overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \tag{3}$$

并且用 $F(z)$ 来记在圆 $|z|<1$ 内等于 $f(z)$ 而在此圆外部等于 $f_*(z)$ 的函数. $F(z)$ 在 C 上左面的极限值是

$$F^+(\zeta)=f(\zeta),$$

而其右面的极限值是

$$F^-(\zeta)=\overline{f(\zeta)}$$

(最后这个等式可由定义(3)及在 C 上 $\frac{1}{\bar{\zeta}}=\zeta$ 得出). 因此条件 (2) 可以改写为

$$(a+ib)F^+(\zeta)+(a-ib)F^-(\zeta)=2c, \tag{4}$$

或

$$F^-(\zeta)=A(\zeta)F^+(\zeta)+B(\zeta), \tag{5}$$

其中

$$A(\zeta)=-\frac{a+ib}{a-ib},\quad B(\zeta)=-\frac{2c}{a-ib}. \tag{6}$$

因此,求黎曼－希尔伯特问题的解,可以化为求第 53 目中的希尔伯特－普里瓦洛夫问题的解.

但是并非问题(5)的任何一个解 $F(z)$ 都能给出问题(2)的解,因为,一般说来,那个联系着 $F(z)$ 在关于圆周 $|\zeta|=1$ 相对称的点处的值的条件(3)不被满足. 但是,在有了(5)的任意一个解 $F(z)$ 时,便容易来构成一个满足这条件的解. 为此,我们除了 $F(z)$ 外,再考虑函数

$$F_*(z)=\overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},$$

并且注意,这函数在 C 上也满足条件(4)*,从而也满足条件(5). 而这时条件(5)便也为函数

$$\frac{1}{2}\{F(z)+F_*(z)\}$$

所满足,而且这函数显然也满足条件(3). 所以,这函数在单位圆的内部便是黎曼－希尔伯特的边值问题的解.

(2) 倾斜导数问题　这问题可以表述如下:

求一个在区域 D 内调和,并且在 $\bar{D}$ 内与其一阶偏导数都连续的函数 $u(z)$,在这区域的边界 C 上满足条件

$$a(\zeta)\frac{\partial u}{\partial x}+b(\zeta)\frac{\partial u}{\partial y}=c(\zeta), \tag{7}$$

其中 a,b,c 为给定在 C 上的实函数.

---

* 事实上,在 C 上有

$$F_*(\zeta)=\overline{F(\zeta)},$$

而且当 z 自左面趋近 C 时, $\frac{1}{\bar{z}}$ 自右面趋近 C. 所以,在关系式(4)中换成复数意义下的共轭量时,我们便得到对于 $F_*(\zeta)$ 的同一条件.

问题的名称可解释成,条件(7)可以改写成形状

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{c(\zeta)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{7'}$$

其中$\frac{\partial u}{\partial l}$表示在向量$l=a+ib$的方向上的导数,这向量相对于$C$倾斜某一角.

在上一问题中曾被引入的假设条件下,倾斜导数问题就化为该问题.事实上,通过$f(z)=u+iv$表示u为自己的实数部分的函数,并且令$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=u_1+iv_1$.现在条件(7)重写成形状

$$a(\zeta)u_1(\zeta)-b(\zeta)v_1(\zeta)=c(\zeta).$$

也就与条件(1)相吻合.由此可见,$f'(z)$可以用(1)中所描述的方法求出,而$f(z)$通过简单的积分就可找到.

(3) 在某些问题中,例如,在研究具有混合型偏导数的微分方程时(有关这些方程我们将在下一目中谈到),会遇到如下的倾斜导数问题的不同版本*:

设区域D以实轴上的线段(a,b)与某一条其端点在点a与b处的曲线γ为其边界,并设在(a,b)上与γ上分别给定了两个连续实函数$\varphi(x)$与$\psi(\zeta)$.要求构成一个在区域D内的调和函数$u(z)$,使

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(x),\quad \text{在}(a,b)\text{上},\\&u=\psi(\zeta),\qquad\qquad \text{在}\ \gamma\ \text{上}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

显然,$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial l}$表示按方向$l$求导,$l$与$x$轴组成一个角$-\frac{\pi}{4}$.为了要解这个问题,我们使用一个把区域$D$映到扇形$0<\arg z_1<\frac{\pi}{4}$上去的共形映射$z=f(z_1)$,使弧$\gamma$变换成射线$\gamma^*$:$\arg z_1=0$,线段$(a,b)$变换成射线$\arg z_1=\frac{\pi}{4}$,并且把点$a$与$b$变换成$\infty$与0.而在我们这个映射

$$z=f(z_1)$$

下,γ上给出导数的这方向便变换成x轴的负方向(图125).所以,对于由所求的函数$u(z)$所变换成的那个调和函数

$$u[f(z_1)]=u_1(z_1)$$

来说,条件(8)中的第一个条件可以写成

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=-\frac{\partial u}{\partial l}\cdot\left|\frac{\partial z}{\partial z_1}\right|=-\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi[f(\zeta_1)]\cdot|f'(\zeta_1)|. \tag{9}$$

---

* 参阅 М. А. Лаврентьев и А. В. Бидадзе К проблеме уравнений смешанного типа //ДАН СССР. 1950. Т. 20, No. 3.

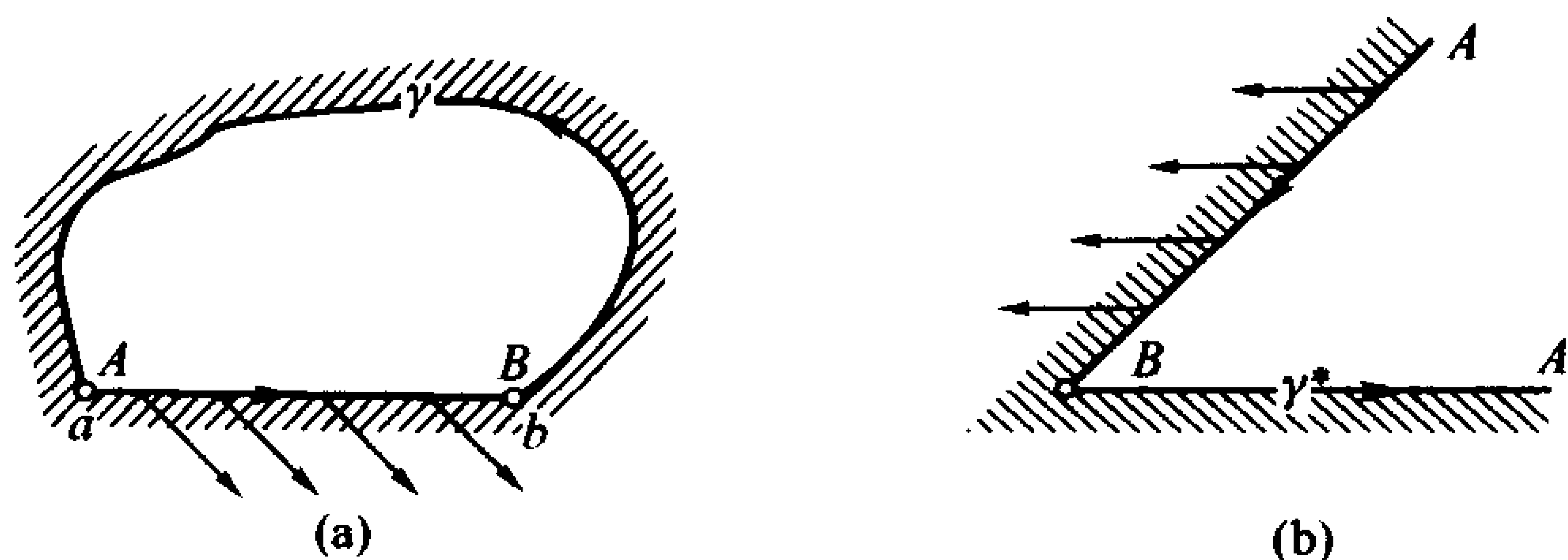


图 125

第二个条件变成关系式

$$u_1(x_1)=\psi[f(x_1)],$$

在对 x_1 求导数后，这关系式便有形式

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial \psi}{\partial s}\cdot\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z_1}\right|=\psi'[f(x_1)]\cdot|f'(x_1)|,\qquad(10)$$

其中$\frac{\partial \psi}{\partial s}=\psi'$表示沿着曲线 γ 取的导数. 因为条件(9)与(10)中的右端都是已知函数，所以，我们的问题便可以化为根据函数$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$在扇形

$$0<\arg z_1<\frac{\pi}{4}$$

的边界上的值来求调和函数$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$的问题，即，化为狄利克雷问题.

用类似的方法，也可以解决更为一般的问题. 设在单连通区域 D 的边界 C 的一个部分 C_1 上，给定了连续的实函数 $\varphi(\zeta)$, $a(\zeta)$与 $b(\zeta)$，且

$$a^2+b^2\neq 0.$$

在边界 C 的其余部分 C_2 上给定了一个连续的实函数 $\psi(\zeta)$. 要求构成一个在区域 D 内的调和函数 $u(z)$，使它在边界上满足条件

$$a(\zeta)\frac{\partial u}{\partial x}+b(\zeta)\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(\zeta),\quad 在 C_1 上,$$

$$u=\psi(\zeta),\quad 在 C_2 上.$$

这边值条件中的第一个条件，可以理解为给出了沿着与弧 C_1 形成一个已知角度的方向所取的导数. 利用第 44 目中的契磋蒂公式，可以构成一个把区域 D 映到一个区域 D_1 上去的共形映射

$$z_1=f(z),$$

使得这映射把弧 C_2 变换成一条垂直于 x_1 轴的直线，而把在第一个条件中所说的那些方向——沿着这些方向的导数是已知的——也变换成垂直于 x_1 轴的方向，这时曲线 C_1 在映射下的像的形状便可以确定. 这时必须对那些给定的函数再添加一些条件. 以使得弧 C_1 与 C_2 的像能围成一个单连通区域 D_1.

也同前面所研究过的那种情形一样，在作了这样的映射之后，问题便化为对于偏导数$\frac{\partial u}{\partial y}$的狄

利克雷问题.

(4) 关于调和函数的混合问题　这问题可以表述如下:

在一个单连通区域 D 的边界 C 上给定了 $2n$ 个点 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n$,这些点是按照它们所写出的顺序排列着的.又,在弧 (a_k,b_k),(b_k,a_{k+1}) $(k=1,2,\cdots,n;\ a_{n+1}=a_1)$ 上分别给定了实函数 $\varphi(\zeta)$ 与 $\psi(\zeta)$.要求找出一个在区域 D 内的调和有界函数 $u(z)$ 来,使它满足下述边值条件:

$$u=\varphi(\zeta),\text{在}(a_k,b_k)\text{上},$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}=\psi(\zeta),\text{在}(b_k,a_{k+1})\text{上}, \tag{11}$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 $u(z)$ 的按 C 的内法线方向所取的导数.

我们来证明这混合问题可解,而且它的解是唯一的.显然,借助一个辅助的共形映射,可以把这问题化为区域 D 是上半平面时的特殊情形,于是边值条件(11)便成为

$$u=\varphi(x),\text{在}(a_k,b_k)\text{上},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\psi(x),\text{在}(b_k,a_{k+1})\text{上} \tag{12}$$

的形状(变换的方式完全与通常一样,例如见第 44 目中的式(6)).而对于这种特殊情形来说,我们这个混合问题的解便可以借助凯尔迪什-谢道夫公式而得出.

事实上,设 $f(z)=u+iv$ 是一个在上半平面内解析的函数,以 u 作为它的实数部分,并设

$$f_1(z)=f'(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y).$$

我们有

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial x},\quad v_1=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以,对于函数 $f_1(z)$ 来说的边值条件(12)的形状是

$$u_1=\varphi'(x),\text{在}(a_k,b_k)\text{上},$$
$$v_1=-\psi(x),\text{在}(b_k,a_{k+1})\text{上}. \tag{13}$$

问题(13)的解 $f_1(z)$ 可以由上一目中的凯尔迪什-谢道夫公式(13)来给出,并且,那公式中所采用的关于积分 $\int^z f_1(z)dz$ 在点 a_k 与 b_k 附近是有界的这个条件,保证了问题(12)的解 $u(z)$ 是有界的,因为 $u(z)$ 可按照公式

$$u(z)=\mathrm{Re}\int_l^z f_1(z)dz \tag{14}$$

由 $f_1(z)$ 来确定.

当把问题(12)化成问题(13)时,我们对那个在 n 个线段 (a_k,b_k) 上给定的函数 $\varphi(x)$ 求导,然后,我们再应用公式(14)所构成的函数 $f_1(z)$ 积分.所以,用我们的方法,只是在可以相差一个常数项(在不同的线段上可以是不同的)的精度内,得到了要

在线段(a_k,b_k)上等于已知函数$\varphi(x)$的那个函数$u(z)$. 可是,在凯尔迪什－谢道夫公式中有n个任意常数存在,这便允许我们可以适当地选择这些常数项,使得$u(z)$在每一段(a_k,b_k)上的值都完全与$\varphi(x)$相等. 这样,便证明了关于调和函数的混合边值问题是可解的.

现在我们来证明,在有界调和函数类中,这问题的解是唯一的. 设$u_1(z)$与$u_2(z)$是两个在上半平面内的有界调和函数,都满足条件(12). 它们的差$u(z)=u_1(z)-u_2(z)$也是在上半平面内的有界调和函数,并且

$$u=0, \text{在}(a_k,b_k)\text{上},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, \text{在}(b_k,a_{k+1})\text{上}.$$

根据第42目中的对称原理,调和函数$\frac{\partial u}{\partial y}$可以经过这$n$条线段$(b_k,a_{k+1})$作解析延拓. 所以,函数$u$也可以作这样的延拓. 经过延拓之后的函数$u$,在$n$条线段$(a_k,b_k)$之外是有界调和的,在这$n$条线段上它取等于0的值. 因此,函数$u$是对于去掉了$n$条线段$(a_k,b_k)$的平面的狄利克雷问题的解,问题中的边界值等于0. 根据关于狄利克雷问题的解的唯一性定理,我们得出$u\equiv 0$,而这便是所需要证明的.

§4 应 用

在本节中我们考虑把复变函数论的方法应用于偏微分方程理论的某些问题,以及连续介质的力学问题和上面提到的大量其他问题. 我们将用具体例子来进行叙述,部分作为例子已经叙述过,而部分是新采用的.

56. 偏微分方程 上面我们详细地说明了复变函数理论与拉普拉斯方程的联系. 这是源自欧拉,特别是黎曼的著作的函数论的经典方向. 但是最近对函数论与其他偏微分方程的联系加强了注意. 这种联系中最简单的一些,我们就在这一目中研究清楚.

(1) 卡莱曼(Carleman)方程组 在偏微分方程理论中近几年来成功地使用一些方法,这些方法是建立在把解表示成复形式的基础上的. 这些方法的发展主要在韦库阿、贝尔斯(L. Bers)、伯格曼(S. Bergman)等等的著作中. 作为例子,遵循 И. Н. 韦库阿,对一阶偏微分方程组:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+au+bv, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}+cu+dv \tag{1}$$

引入这种表示,其中a,b,c和d是某个区域D内变量x和y的连续函数.

方程组(1)是柯西－黎曼条件的拓广(当$a=b=c=d=0$我们就得到柯西－黎曼条件). 某些弹性薄膜理论问题、气体动力学和连续介质力学的其他分支的问题都引

出这方程组. 这一组方程最早由卡莱曼*研究,他证明了方程组(1)的解的唯一性定理,这类似于第 20 目中的定理 1. 韦库阿(И. Н. Векуа[15])对方程组(1)及其应用进行了详细研究. 往后为简单起见,我们处处假设函数 u 和 v 在区域 D 内具有连续偏导数.

在推导表示公式时利用复数求微分的记号

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2}$$

是方便的. 例如,其中第一个在应用到复函数 $w=u+iv$ 时给出

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}+i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i.$$

特别是柯西 - 黎曼的解析性条件借助于这个记号可写成$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$ 的形状.

首先我们引入一个在某一区域 D 内具有连续偏导数的任意函数 $w(z)=u+iv$ 的表示公式. 为此,我们利用黎曼 - 格林公式,该公式在用记号(2)下可写成

$$\frac{1}{2i}\int_C w(\zeta)d\zeta=\iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}}d\xi d\eta \tag{3}$$

形状,其中 $\zeta=\xi+i\eta$, C 表示 D 的边界. 对于解析函数$\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}}\equiv 0$,公式(3)显然就表示柯西定理.

下面完全与(第 14 目中)从柯西定理推出柯西积分公式时的做法一样地进行,从区域 D 中除掉固定点 z 的一个由具小半径的圆周 c 围起来的邻域 d,并且把公式(3)应用于区域 $D-d$ 和函数$\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}$,我们得到

$$\frac{1}{2i}\int_C \frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2i}\int_c \frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\iint_{D-d}\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}.$$

使邻域的半径趋于 0,我们像在第 14 目中一样看到,积分 $\int_c \frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ 的极限等于 $2\pi i w(z)$,从而得出所要找的**表示公式**

$$w=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{dw}{d\bar{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}. \tag{4}$$

对于解析函数,二重积分消失,我们来到了柯西积分公式.

应用这一公式去解卡莱曼方程组(1),借助微分标志(2),这方程组可写成一个复方程的形式

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=Aw+B\bar{w}, \tag{5}$$

其中 $w=u+iv$, $A=\frac{1}{4}(a+d+ic-ib)$和 $B=\frac{1}{4}(a-d+ic+ib)$. 因此,公式(4)

* 卡莱曼(T. Carleman, 1892—1949),瑞典数学家.

给出如下的方程组(1)的解的复表示式

$$w=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{A(\zeta)w(\zeta)+B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}d\xi d\eta. \tag{6}$$

我们再引入一个卡莱曼方程组(5)的解的更方便的复表示公式.设 $w=w(z)$是这组方程的一个任意解,N 是D 中使$w=0$的点的全体.通过 M 表示集合$D-N$.令

$$\chi(z)=\begin{cases}A(z)+B(z)\dfrac{\overline{w(z)}}{w(z)}, & \text{若 } z \text{ 属于} M,\\ 0, & \text{若 } z \text{ 属于} N;\end{cases}$$

函数 $\chi(z)$单独地在 M 和N 上连续,显然是有界的,因为对于 D 中任意一点z,我们有$|\chi(z)|\leqslant|A(z)|+|B(z)|$.因此函数 $\chi(z)$按区域 D 是可积的,亦即积分

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\chi(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z} \tag{7}$$

有意义.

容易验证(参阅第 16 目),函数 $\omega(z)$在闭区域 $\bar{D}$ 外部是解析的,且 $\omega(\infty)=0$.我们证明,在函数 $\chi(z)$的任何连续的点 z 处存在复导数

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}=-\chi(z). \tag{8}$$

事实上,我们把由周线 c 所围的点z 的邻域d 划分出来,并且把 $\omega(z)$表示成两个在整个平面上连续的函数 $\omega_1(z)$和 $\omega_2(z)$之和的形式:

$$\omega_1(z)=\frac{1}{\pi}\iint_{d}\frac{\chi(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z},\quad \omega_2(z)=\frac{1}{\pi}\iint_{D-d}\frac{\chi(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z}.$$

函数 $\omega_1(z)$在 $\bar{d}$ 外解析,而 $\omega_2(z)$在 d 内解析,因此,

$$\frac{1}{2i}\int_{c}\omega(z)dz=\frac{1}{2i}\int_{c}\omega_1(z)dz+\frac{1}{2i}\int_{c}\omega_2(z)dz=\frac{1}{2i}\int_{L}\omega_1(z)dz,$$

其中 L 表示包含D 的足够大半径的圆周(我们利用柯西定理,根据这一定理等式中间部分的第一个积分可以用沿 L 的积分来取代,而第二个积分等于 0).用 $\omega_1(z)$的表达式取代它自己,并且改变积分次序,我们得到

$$\frac{1}{2i}\int_{c}\omega(z)dz=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{d}\chi(\zeta)d\xi d\eta\int_{L}\frac{dz}{z-\zeta}=-\iint_{d}\chi(\zeta)d\xi d\eta.$$

如果这等式的两部分除以区域 d 的面积s,并且使用极限关系式

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}=\lim_{d\to z}\frac{1}{2is}\int_{c}\omega(z)dz$$

这关系式根据中值定理由公式(3)推出,那么当 $d\to z$ 时的极限中我们获得所要求的公式(8).

现在我们来考虑函数

$$\varphi(z)=w(z)e^{\omega(z)}, \tag{9}$$

显然,它在 D 中是连续的.如果 z 属于集M,那么利用乘积和指数函数的复微分规则

(这些规则容易验证),我们得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = e^{\omega(z)}\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + w\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}\right) = e^{\omega(z)}(Aw + B\bar{w} - w\chi) \equiv 0.$$

由此可见,函数 $\varphi(z)$在集合 M 上是解析的.容易看出,它也在集合 N 上是解析的.事实上,函数 $w(z)$在每一个它等于 0 的点上是解析的,因为在这些点上按照方程(5)$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$.因此,对 N 中任意一点 z_0,关系式

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} = \frac{\varphi(z)}{z-z_0} = \frac{w(z)}{z-z_0}e^{\omega(z)}$$

当 $z \to z_0$时,有极限等于 $w'(z_0)e^{\omega(z_0)}$,亦即 $\varphi(z)$在点 z_0上可微.

由此可见,函数 $\varphi(z)$在区域 D 内处处解析.最后,我们指出,根据公式(9)$w(z)$的零点与 $\varphi(z)$的零点相同,并且根据第 20 目中的唯一性定理,这些零点的集合 N 不可能在D 内有极限点.因此,这个集合不影响公式(7)中的积分的值,并且可以把这公式改写成形状

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\zeta)w(\zeta)+B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\omega(\zeta)(\zeta-z)}d\xi d\eta.$$

公式(9)现在给出所求的通过解析函数 $\varphi(z)$的卡莱曼方程组的解的复表示

$$w(z) = \varphi(z)\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\zeta)w(\zeta)+B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)(\zeta-z)}d\xi d\eta\right\}^{*}. \tag{10}$$

这公式曾被 И. Н. 韦库阿得到,并且与他独立地(在更限制的假设条件下)被 L. 贝尔斯得到.从这公式推出,在零点和极点的关系方面卡莱曼方程组的解有像解析函数一样的性状:第 20 目中关于零点的定理、第 23 目的辐角原理和鲁歇(Rouché)定理以及其他定理推广到这些解上(我们已经在上面指出过).但是,我们要指出卡莱曼方程组的几何性质本质上不同于解析函数的性质**.

(2) 线性椭圆方程组　我们考虑所谓子午面静电场,也就是一个空间场,这场的向量放置在经过某一轴的平面上(我们取这轴为 z 轴),并且只依赖于到此轴的距离 r 和沿该轴的坐标 z.这场,显然,完全由置于笛卡儿坐标平面(r,z)的平面场所描述,但是它的方程不同于 47 目中的方程.事实上,利用柱面坐标中旋度与散度的已知表达式,并且用 E_r和E_z分别表示强度向量$\boldsymbol{E}$ 的分量,我们把没有电荷和场势能的条件写成如下形状:

$$\frac{\partial(rE_z)}{\partial r} + \frac{\partial(rE_r)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial r}. \tag{11}$$

像在 46 目或 47 目中一样,从这些条件可以断定,存在两个函数 $u(r,z)$和

---

* 符号 $\exp a$ 通常表示e^a.

** 见 Б. В. Шабат(沙巴特)"关于卡莱曼组解实施的映射"(Об отображениях, осуществляемых решениями системы Карлемана//Успехи мат. наук)1956. 11 卷 3(69). 第 203—206 页.

$v(r,z)$,对它们有

$$rE_z=\frac{\partial v}{\partial r},\quad rE_r=-\frac{\partial v}{\partial z},\quad E_r=-\frac{\partial u}{\partial r},\quad E_z=-\frac{\partial u}{\partial z},$$

因此它们由关系式

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial z},\quad -r\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial r} \tag{12}$$

联系着.这些函数完全描述了子午面场.

方程(12)是一阶椭圆型线性偏微分方程组的特殊情况

$$v_y=au_x+bu_y,\quad -v_x=du_x+cu_y, \tag{13}$$

其中 a,b,c,d 为变量 x 和 y 的已知函数,对于它们来说,在所考虑的区域 D 内处处满足**椭圆性条件**

$$A=ac-\left(\frac{b+d}{z}\right)^2>0 \tag{14}$$

(为了书写简便起见,我们用 $u_x,\cdots$ 来表示$\frac{\partial u}{\partial x},\cdots$).某些气体动力学、可塑性理论、曲面的弯曲理论等问题同样也引出这些方程组.这些问题在韦库阿、贝尔斯、帕洛寿、鲍雅尔斯基等作者的著作中被研究过,这些作者建立了一系列事实,它们把这些方程组的解与解析函数拉上了亲近关系.线性方程组解的理论作为最简单的组成部分而列入拟共形映射的一般理论*.在所列作者的著作中证明了,对于方程组(13),拓广 28 目中的黎曼定理的映射存在定理是成立的,并且这些方程组的解具有一整套完全类似于共形映射的性质的几何性质.不可能在本书范围内讲这些结果**,这里我们只列举一些最简单的事实.

可以证明***,方程组(13)几何上表示平面 $z=x+iy$ 上的从一族

$$\gamma(X-x)^2-2\beta(X-x)(Y-y)+\alpha(Y-y)^2=ph^2 \tag{15}$$

中的无穷小椭圆变换到平面 $w=u+iv$ 的椭圆

$$\gamma_1(U-u)^2-2\beta_1(U-u)(V-v)+\alpha_1(V-v)^2=p_1h_1^2 \tag{15'}$$

的条件,准确到高阶无穷小(图 126),并且椭圆的方程的系数通过方程组(13)的系数按照公式:

$$\alpha=\frac{a}{\sqrt{A}},\quad \beta=\frac{b+d}{2\sqrt{A}},\quad \gamma=\frac{c}{\sqrt{A}},$$

---

* 见拉夫连季耶夫(М. А. Лаврентьев)的著作"Обшая задача теории квазиконформных отображений плоских областей"(Мат. сб, 1947. 第 21 卷. 第 2 期. 286—320 页)和"Основная задача теории квазиконформных отображений плоских областей"(Изв. АН СССР. Сер. мат. 1948. 第 12 卷. 513—554 页)同样见他的书[16].

** 拟共形映射线性理论的一系列结果的叙述,读者可以在伏尔加浮斯基(Л. И. Волковыский)的书[17]中找到.

*** 见沙巴特(б. В. Шабат)的文章"Об обобшенных решениях одной системы уравнении в частных производных"(Мат. сб. 1949. Т. 17(59). 193—210 页)或者伏尔加浮斯基[17].

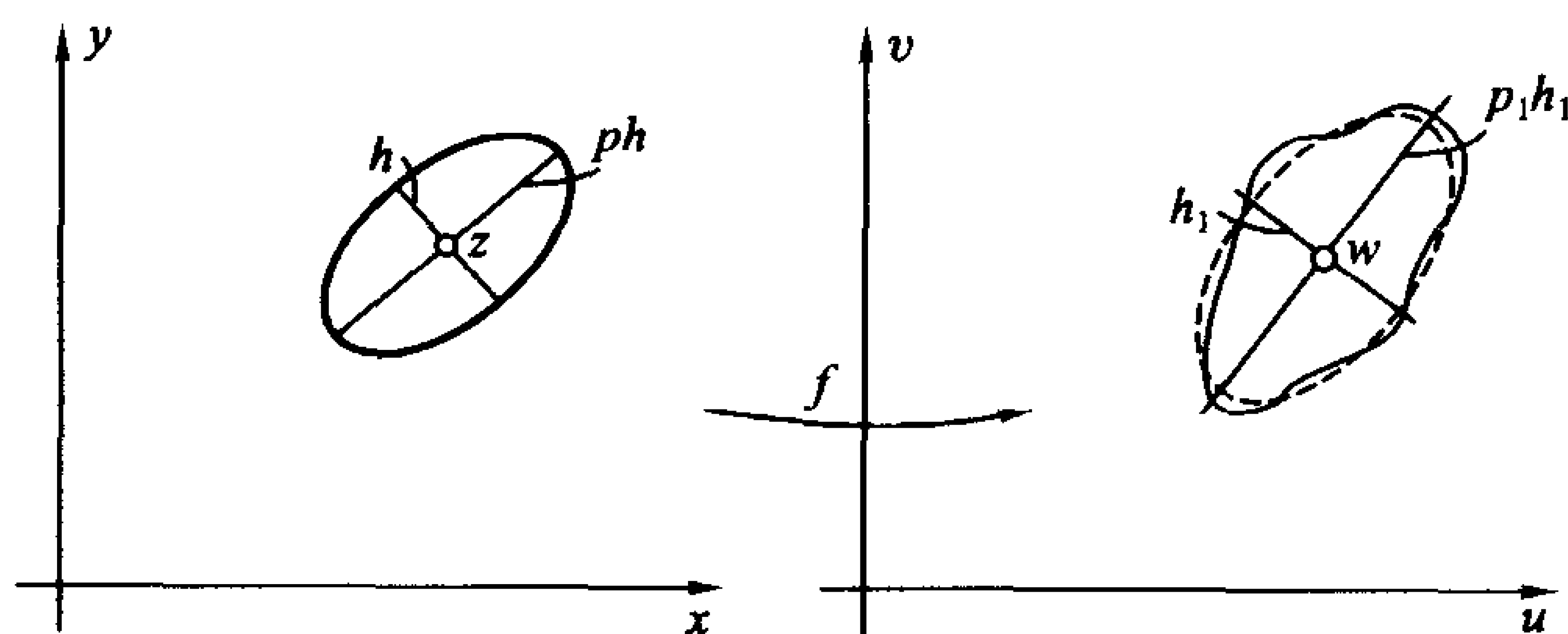


图 126

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{A}},\quad \beta_1=\frac{b-d}{2\sqrt{A}},\quad \gamma_1=\frac{B}{\sqrt{A}} \tag{16}$$

来确定(我们有 $p,p_1\geqslant 1$——半轴的比,h,h_1 椭圆的短半轴,$\alpha\gamma-\beta^2\equiv 1,\alpha_1\gamma_1-\beta_1^2\equiv 1,B=ac-bd\geqslant A>0$),因此都是点 z 的已知函数.由方程组(13)的解 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 组成一个复变函数 $f(z)=u+iv$,并且由它实施的映射将称为与这方程组联系着的拟共形映射.特别,与椭圆(15)与(15′)是圆周时,亦即 $\alpha=\gamma=1,\beta=0$ 和 $\alpha_1=\gamma_1=1,\beta_1=0$ 时,那么很容易看出,方程组(13)(在方向保持的补充条件下,见第 27 目)转化为柯西-黎曼方程组,也就是拟共形映射转化为共形映射*.

为了解方程组(13),可以求出一些公式,这些公式拓广了第 12 目中的柯西定理和第 14 目中的柯西积分公式**.为了证明,我们把方程组(13)改写成形状

$$L[u,v]=au_x+bu_y-v_y=0,\quad M[u,v]=du_x+cu_y+v_x=0, \tag{13′}$$

并且利用分析中知道的格林公式,这公式将我们所讨论的方程组写成形状

$$\int_C \{u^*v-(bu^*+cv^*)u\}dx+\{(au^*+dv^*)u+v^*v\}dy$$
$$=\iint_D \{u^*L[u,v]+v^*M[u,v]+u\widetilde{L}[u^*,v^*]+v\widetilde{M}[u^*,v^*]\}dxdy, \tag{17}$$

其中 C 表示区域 D 的边界,

$$\widetilde{L}[u,v]=(au+dv)_x+(bu+cv)_y,\quad \widetilde{M}[u,v]=v_x-v_y$$

(这公式对任意四个具有连续偏导数的函数 u,v,u^*,v^* 都成立,并且像通常的黎曼-格林公式一样按分部积分法推导出).

在假设方程组(13)中的两阶偏导数连续时,可以除掉函数 v,使得方程组化为一个两阶方程

$$\Lambda[u]=(au_x+bu_y)_x+(du_x+cu_y)_y=0 \tag{18}$$

---

* 见第 27 目中的共形映射的圆性质.

** 见沙巴特(Б. В. Шабат)的文章“Теорема и формула Коши для квазиконформных отображений линейных классов”(ДАН СССР. 1949. Т. 49, вып. 3. 305—308 页).对于特殊情况,这些结果较早由 Г. Н. Положий 得到.

(我们利用了混合导数 v_{xy} 和 v_{yx} 相等的条件). 我们也考虑与(18)共轭的方程

$$\Lambda^*[X]=(aX_x+dX_y)_x+(bX_x+cX_y)_y=0. \tag{19}$$

对于每一个它的解 $X(x,y)$, 显然, 存在函数 $Y(x,y)$, 它与 X 有方程

$$\begin{aligned} L^*[X,Y]&=aX_x+dX_y-Y_y=0,\\ M^*[X,Y]&=bX_x+cX_y+Y_x=0 \end{aligned} \tag{20}$$

联系着, 因为这方程组不同于方程组(13)的只是 b 和 d 置换一下, 所以在 z 平面上与这方程组有关的椭圆与方程组(13)有关的椭圆相吻合, 而在平面 w 中由它们通过一个相对于 u 轴的反射而得出(更换 β_1 的符号); 在 $b=d$ 时这些椭圆重合.

现在利用格林公式(17), 在公式中我们取方程组(13)的解当作 u 和 v, 并且令 $u^*=X_x$, $v^*=X_y$, 其中 X 和 Y 表示方程组(20)的解, 我们得到

$$\int_C vdX+udY=0. \tag{21}$$

随后我们相对于 u_y 和 u_x 解方程组(13):

$$\begin{aligned} L_1[u,v]&=-a_1v_x-d_1v_y-u_y=0,\\ M_1[u,v]&=-b_1v_x-c_1v_y+u_x=0 \end{aligned}$$

(这里 $a_1=a/B,\cdots,d_1=d/B$). 对这方程组公式(17)成立, 只要在(17)中处处把 u 换成 v; v 换成 u 和系数 $a,\cdots,d$ 换成 $-a_1,\cdots,-b_1$. 对于方程

$$\Lambda_1^*[X^1]=-(a_1X_x^1+b_1X_y^1)_x-(d_1X_x^1+c_1X_y^1)_y=0 \tag{19$_1$}$$

每一个解, 存在一个函数 Y^1, 以方程

$$\begin{aligned} L_1^*[X^1,Y^1]&=a_1X_x^1+b_1X_y^1-Y_y^1=0,\\ M_1^*[X^1,Y^1]&=d_1X_x^1+c_1X_y^1+Y_x^1=0 \end{aligned} \tag{20$_1$}$$

与它联系着. 在平面 z 上跟这方程组有关的椭圆与跟方程组(13)有关的椭圆相吻合, 而在平面 w 中由它们通过一个相对于第一坐标角的角平分线的反射而得出. 当 $B=1$ 时, 这些椭圆重合. 取代公式(20), 我们将有

$$\int_C udX^1-vdY^1=0 \tag{21$_1$}$$

最后, 我们引入复变量 $Z=X+iY^1$, $Z^*=X^1+iY$, 此时公式(21)和(21_1)可以合并成一个公式

$$\int_C udZ^*+ivdZ=0 \tag{22}$$

这公式就表示柯西定理的拓广.

特别如果, 平面 w 中的椭圆是圆($b=d$, $B=ac-b^2=1$), 那么方程组(20)和(20_1)重合. 因此, 在这种情况下可以取 $Z^*=Z$, 并且公式(22)简化成

$$\int_C f(z)dZ=0.$$

此外,如果在平面 z 中的椭圆也是圆(柯西-黎曼方程组),那么可以取 $Z=z$,我们就回到经典的柯西定理.

为了得到柯西公式的拓广,我们引入与方程组(13)有关的"距离"

$$\rho(z,z_0)=\sqrt{c_0(x-x_0)^2-(b_0+d_0)(x-x_0)(y-y_0)+a_0(y-y_0)^2},$$

其中 $a_0,\cdots,d_0$ 表示在点 z_0 的系数值,并且我们不考虑 X 而考虑方程(19)的解,这个解在区域 D 的固定点 z_0 上有 $\ln\rho(z,z_0)$ 型奇异性,

$$\Gamma(z,z_0)=\gamma'(z,z_0)\ln\rho(z,z_0)+\gamma''(z,z_0)$$

(γ' 和 γ'' 均为连续函数),同时也考虑与它"共轭"的函数

$$H(z,z_0)=\int^z-(b\Gamma_x+c\Gamma_y)dx+(a\Gamma_x+d\Gamma_y)dy.$$

根据(19),这积分在积分路径连续变形时,只要在这时不要碰到点 z_0,是不会改变的.在点 z_0 绕行时(逆时针方向绕行一次),H 得到一个增量*

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\int_{\rho(z,z_0)=h}-(b\Gamma_x+c\Gamma_y)dx+(a\Gamma_x+d\Gamma_y)dy\\&=A(z_0)\gamma'(z_0,z_0)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a_0\sin^2t-(b+d_0)\sin t\cos t+c_0\cos^2t}\\&=2\pi\gamma'(z_0,z_0)\sqrt{A(z_0)},\end{aligned}\tag{23}$$

如果取 $\gamma'(z_0,z_0)=\dfrac{1}{\sqrt{A(z_0)}}$,它就等于 2π.由此可见,多值函数 $H(z,z_0)$ 在点 z_0 有 $\operatorname{Arctan}\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ 同样类型的奇异性.

在公式(17)中令 $u^*=\Gamma_x,v^*=\Gamma_y$,并且 u 和 v 是方程组(13)的解,在这之后,把它应用到去掉椭圆 $\rho(z,z_0)\leqslant h$ 后的区域 D 中去,我们得到

$$\int_C vd\Gamma+udH=\int_{\rho(z,z_0)=h}vd\Gamma+udH.\tag{24}$$

因为 $\lim\limits_{h\to0}\int_{\rho=h}vd\Gamma=0$ 和根据(23) $\lim\limits_{h\to0}\int_{\rho=h}udH=2\pi u(z_0)$,所以从 $h\to0$ 时(24)式的极限中我们得到

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C v(z)d_z\Gamma(z,z_0)+u(z)d_zH(z,z_0).\tag{25}$$

---

* 为了得到(23),只要注意到,在计算后者的积分的极限时,可以用值 $a_0,\cdots,d_0,\gamma'(z_0,z_0)$ 和 $\gamma''(z_0,z_0)$ 来代替 $a,\cdots,d,\gamma'$ 和 γ'',此时按公式

$$x-x_0=\frac{h\cos t}{\sqrt{c_0\cos^2t-(b_0+d_0)\sin t\cos t+a_0\sin^2t}},$$

$$y-y_0=\frac{h\sin t}{\sqrt{c_0\cos^2t-(b_0+d_0)\sin t\cos t+a_0\sin^2t}}.$$

引入参数 t,所得积分的计算是初等的.

转向方程组(20_1),类似地构造方程(19_1)的具有对数型奇异性的解

$$\Gamma^1(z,z_0)=\gamma'_1(z,z_0)\ln\rho(z,z_0)+\gamma''_1(z,z_0)$$

和多值函数

$$H^1(z,z_0)=\int^z -(d_1\Gamma'_x+c_1\Gamma'_y)dx+(a_1\Gamma'_x+b_1\Gamma'_y)dy,$$

如果取 $\gamma_1(z_0,z_0)=B(z_0)/\sqrt{A(z_0)}$,在绕行 z_0 时它的增量将等于 2π. 那么取代(25)式,我们将有

$$v(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C v(z)d_zH^1(z,z_0)-u(z)d_z\Gamma^1(z,z_0). \qquad (25_1)$$

引入复函数

$l(z,z_0)=\Gamma(z,z_0)+iH^1(z_0,z_0)$, $\quad l^*(z,z_0)=\Gamma^1(z,z_0)+iH(z,z_0)$,

把(25)与(25_1)合并成一个公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C u(z)d_zl^*(z,z_0)+iv(z)d_zl(z,z_0), \qquad (26)$$

这公式就拓广了柯西公式.

如果在平面 w 中的椭圆是圆,那么可以取 $l^*=l$,并且公式(26)简化成:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)d_zl(z,z_0).$$

最后,对柯西－黎曼方程组可以令 $l=\ln(z-z_0)$,我们就得到经典的柯西公式.

在结束时我们还注意一个与方程组(13)有关的基本事实. 如果引入与方程组相对应的"增量"组

$$\tilde{\Delta}z=\sqrt{c}\Delta x-\frac{b+d}{2\sqrt{c}}\Delta y+i\sqrt{\frac{A}{c}}\Delta y,$$

$$\tilde{\Delta}w=\sqrt{B}\Delta u-\frac{b-d}{2\sqrt{B}}\Delta v+i\sqrt{\frac{A}{B}}\Delta v,$$

那么容易证明,这组将表示"导数"

$$\tilde{f}'(\tilde{z})=\lim_{\tilde{\Delta}z}\frac{\tilde{\Delta}w}{\tilde{\Delta}z}=\frac{1}{\sqrt{c}}\left\{\sqrt{B}u_x-\frac{b-d}{2\sqrt{B}}v_x+i\sqrt{\frac{A}{B}}v_x\right\}, \qquad (27)$$

存在的充分必要条件其中极限不依赖 $\tilde{\Delta}z$ 趋近于 0 的方式. 这一事实拓广第 5 目中的定理,按照这定理,柯西－黎曼方程组表达了通常导数存在的充分必要条件,特别,在 $a=c=1$, $b=d=0$ 的情况,"导数"(27)与通常导数重合.

(3) 特里科米(Tricome)问题　如果方程具有两阶偏导数,并且在其定义域的一部分是椭圆型,而在另一部分是双曲型,那么这类方程称为混合型微分方程. 这种方程的研究,对于高速度的空气动力学,表现出极大的益处,因为方程类型的改变,在物理上就对应着运动速度超过音速的变化. 最简单的混合型方程是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (28)$$

其中当 $y>0$ 时 $\theta(y)=1$;当 $y<0$ 时 $\theta(y)=-1$(由此可见,方程(28)在上半平面内为椭圆型,在下半平面内为双曲型). 设区域 D 是由位于上半平面并且支撑在线段(0,1)上的曲线 C 与两条跟坐标轴的角平分线相平行的方程的特征线上的线段 L 和 L_1 所围成的(图 127). 在区域 D 上这种方程的特里科米问题* 提出如下:

求一个函数 $u(x,y)$,在 $y\neq 0$ 时满足方程(28),在闭区间 $\bar{D}$ 上连续,并在 D 内有除点 $z=0,z=1$ 外处处连续的偏导数,而在这两点 $z=0,z=1$ 处偏导数可能变成阶数小于 1 的无穷大,并且在曲线 C 和 L 上取给定的值:

$$u=\begin{cases}\varphi(\zeta), & \text{在 } C \text{ 上},\\ \psi(x), & \text{在 } L \text{ 上}\end{cases}(\varphi(0)=\psi(0)). \quad (29)$$

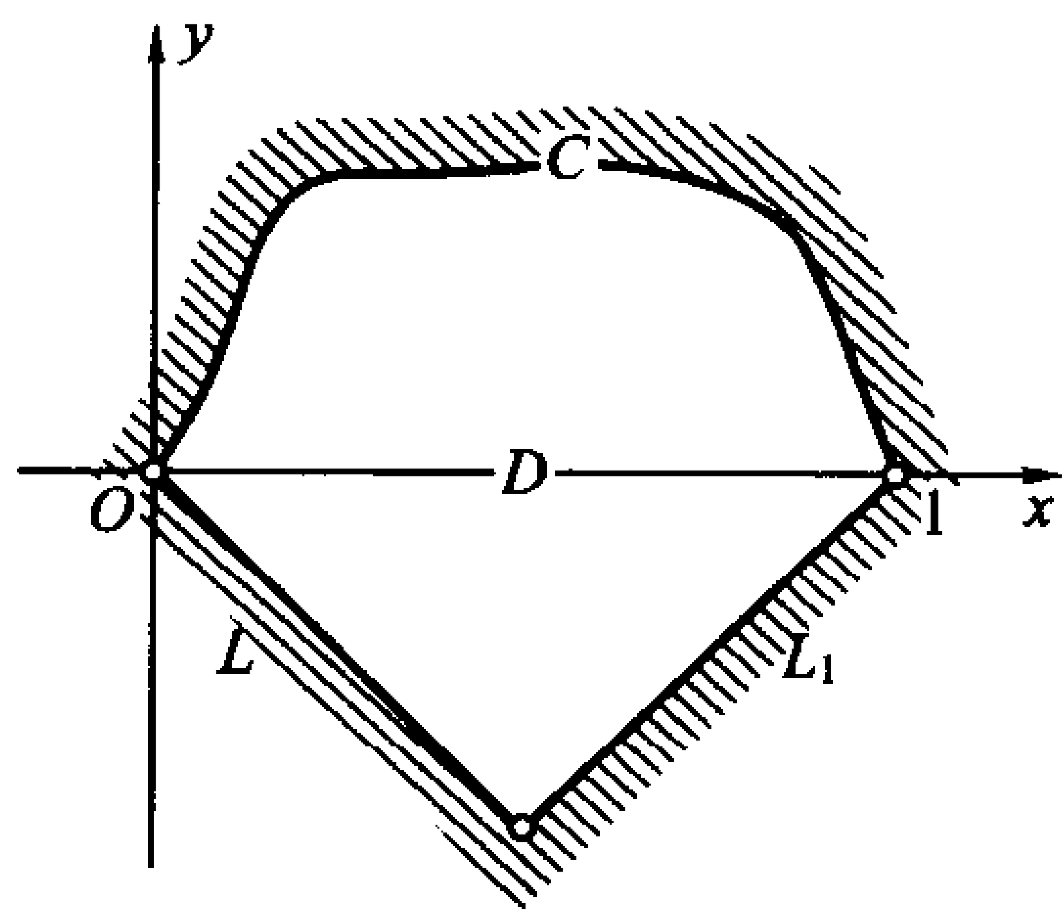


图 127

我们列举比察捷(A. W. Bitsadze)于 1950 年给出的问题的简单优美的解. 借助于区域 D 的椭圆部分 D_1 的共形映射,把问题化为 D_1 变成上半圆 $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},y>0$ 的特殊情况. 此外,还可以假设 $\varphi(0)=\psi(0)=0$.

在区域 D 的双曲部分 D_2 内,方程(28)有形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

大家知道,它的解可以写成形状

$$u=\Phi(x+y)+\Psi(x-y),$$

其中 Φ 和 Ψ 是两个任意函数(见 И. Г. Петровский[1]). 在 L 上我们有 $x+y=0$,因此,把这个 u 的表达式代入条件(29)的第二个式子中,我们得出

$$\Phi(0)+\Psi(2x)=\psi(x),$$

因此,我们的表达式取形状

$$u(x,y)=\Phi(x+y)-\Phi(0)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \quad (30)$$

由函数 $u(x,y)$ 的连续性条件,我们得到,在 x 轴

$$u(x,0)=\Phi(x)-\Phi(0)+\psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

在椭圆部分 D_1,函数 $u(x,y)$ 是调和的. 设 $v(x,y)$ 在 D_1 是调和的、与 $u(x,y)$ 共轭的函数,并且在点(0,0)上等于 0. 如从表达式(30)中推出的,在 D_2 中我们有 $\frac{\partial u}{\partial y}=\Phi'(x+y)-\frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)$,由此,利用 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 在 x 轴上的连续性,我们找到

* 特里科米,近代意大利数学家,他第一次提出和解决了形如方程 $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的这种问题.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\Phi'(x) + \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x}{2}\right).$$

把此式积分，我们求得，在 x 轴上

$$v(x,0) = -\Phi(x) + \Phi(0) + \psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

并且，把此式与 $u(x,0)$ 的表达式加起来，我们得到

$$u(x,0) + v(x,0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{31}$$

现在令 $u = u_1(x,y) + u_2(x,y)$，其中函数 u_1 和 u_2 分别是边值问题

$$u_1 = \begin{cases} \varphi(\zeta), & \text{在 } C \text{ 上}, \\ 0, & \text{在 } L \text{ 上}, \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} 0, & \text{在 } C \text{ 上}, \\ \psi(x), & \text{在 } L \text{ 上} \end{cases} \tag{32}$$

的解. 对于这两个函数中第一个，根据关系式(31)在线段(0,1)上我们得到

$$u_1(x,0) + v_1(x,0) = 0$$

而这意味着，解析函数

$$f_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$$

把线段(0,1)变换成直线 $u_1 + v_1 = 0$ 上的一段线段，因此，根据对称原理，可以把它经过(0,1)来延拓. 这时在下半个圆的点上我们将有

$$f_1(z) = -v_1(x,-y) - iu_1(x,-y), \tag{33}$$

因为关于第二条角平分线的对称性导致把 u_1 换成 v_1，v_1 换成 u_1，并改变这两个坐标的符号. 由此可见，函数 $f_1(z)$(同它自己的延拓一起)是在圆 $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 内的解析函数，并且根据条件(32)在上半个圆周 C 上它的实数部分 $\operatorname{Re} f_1(\zeta) = \varphi(\zeta)$ 是已知的，而在下半个圆周 C^* 上，根据关系式(33)，它的虚数部分 $\operatorname{Im} f_1(\zeta) = -\varphi(\bar{\zeta})$ 是已知的. 因此，函数 $f_1(z)$ 可以按照第 54 目中凯尔迪什－谢道夫公式(15)复原，对所讨论的情况函数采用形状*

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i}\left\{\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}} \cdot \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - i\int_{C^*} \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}} \cdot \frac{\varphi(\bar{\zeta})d\zeta}{\zeta - z}\right\}. \tag{34}$$

我们在第二个积分里代换变量 $\zeta = \bar{\omega}$，我们得到

$$-i\int_{C^*} = i\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\bar{\omega}(1-\bar{\omega})}} \cdot \frac{\varphi(\omega)d\bar{\omega}}{\bar{\omega} - z}.$$

我们令 $\arg \omega = t$，因为在 C 上我们有 $\omega = e^{it}\cos t$，所以 $\bar{\omega} = e^{-2it}\omega$. 再代入 $e^{2it} = 2\cos^2 t - 1 + 2i\sin t\cos t = 2\omega - 1$，从而，$\bar{\omega} = \omega/(2\omega - 1)$. 把这代入上面的积分，我们找到

* 我们取 $a_1 = 0, b_1 = 1$，此时 $g(z) = \sqrt{(z-1)/z}$.

$$-i\int_{C^*}=\int_C\sqrt{\frac{z(1-z)}{\omega(1-\omega)}}\cdot\frac{\varphi(\omega)d\omega}{\omega-z(2\omega-1)}.$$

我们重新用 ζ 表示积分变量,并且把所得积分与(34)的第一个积分合并起来,最后我们得出

$$f_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C\sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\left\{\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta+z-2\zeta z}\right\}\varphi(\zeta)d\zeta. \tag{35}$$

现在我们考虑解析函数

$$f_2(z)=u_2(x,y)+iv_2(x,y).$$

根据对称原理它通过半圆周 C 延拓到整个上半平面,因为根据条件(32)在 C 上 $u_2=0$. 根据这个原理在实轴上关于 C 对称的两个点 x 和 $x/(2x-1)$ 上函数 f_2 取关于 $u_2=0$ 对称的值,亦即符号不同的 u_2:

$$f_2(x)=-u_2\left(\frac{x}{2x-1},0\right)+iv_2\left(\frac{x}{2x-1},0\right).$$

现在我们考虑到,在线段(0,1)上的点

$$\operatorname{Re}(1-i)f_2(x)=u_2(x,0)+v_2(x,0)=2\psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

是已知的,而在射线 $(-\infty,0)$ 和 $(1,\infty)$ 上的点

$$\operatorname{Im}(1-i)f_2(x)=v_2\left(\frac{x}{2x-1},0\right)+u_2\left(\frac{x}{2x-1},0\right)=2\psi\left(\frac{x}{4x-2}\right)$$

是已知的. 因此,函数 $(1-i)f_2(z)$ 可按照为半平面的凯尔迪什-谢道夫公式(见第54目式(6))复原. 经过简单的变换我们求得

$$(1-i)f_2(z)=\frac{2}{\pi i}\int_0^1\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt. \tag{36}$$

所求的函数在椭圆部分 D_1, 显然,等于

$$u(z)=\operatorname{Re}\{f_1(z)+f_2(z)\} \tag{37}$$

其中 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 由公式(35)和(36)决定. 在双曲部分 D_2, 如从(30)中看到的,它等于

$$u(x,y)=u(x+y,0)-\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{38}$$

可以证明,所找到的解是唯一的.

更详细了解有关混合型方程(28)的这个问题和其他问题可看 A. B. Бидадзе 的文章[19].

57. 流体动力学与气体动力学问题

(1) 薄翼　在第49目中我们已经确信,对任意断面的绕行问题可化为把这断面的外部共形映射到圆的外部的问题. 但是实际构造这种共形映射常常是很难的,因此, 必须满足于问题的近似解. 作为这种解的例子,我们考察绕行薄翼问题的谢道夫

解*.

我们假设,机翼周线 C 由方程 $y=F_+(x)$, $-a\leqslant x\leqslant a$ 决定,并且接近于线段 $(-a,a)$ (图 128). 设机翼被前进流绕行,这流在无穷远处有速度 v_∞ 和倾斜 x 轴一个很小的攻击角 α. 与此相应我们将求流的复势能有形状

$$\omega = v_\infty e^{-i\alpha} z + W, \tag{1}$$

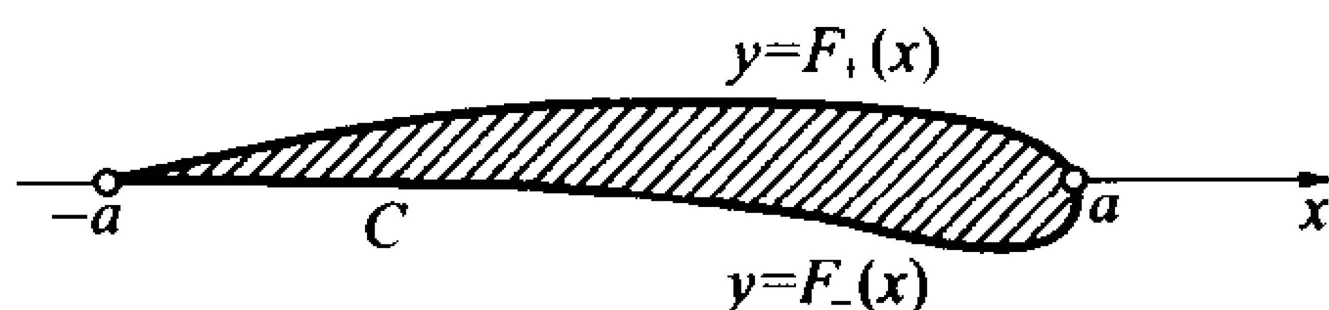


图 128

其中 $W=U+iV$ 是未知函数. 我们有

$$\operatorname{Im}\omega = v_\infty(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + V(x,y),$$

并且因为 C 与流线重合,所以在其上 $\operatorname{Im}\omega$ 应当取常数值,设它们等于 0. 因此在 C 上:

$$v_\infty\{F_+(x)\cos\alpha - x\sin\alpha\} + V[x, F_+(x)] = 0.$$

利用所作的关于 C 接近于线段 $(-a,a)$ 和角很小的假设,在这条件下用 1 代替 $\cos\alpha$, α 代替 $\sin\alpha$,并且特别用 $V(x,0)$ 代替 $V(x,F_+(x))$,我们把条件挪到线段上. 在线段的两沿上我们得到条件

$$V(x,0) = v_\infty\{x\alpha - F_+(x)\}. \tag{2}$$

因为场的复势能可以是多值函数,更方便的是考察它的导数 $\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u+iv$,它显然是单值的.

由此可见,问题化为如下问题:求一个在线段 $(-a,a)$ 外解析的,并且在无穷远处等于 0 的函数,这函数的虚部 $v(x,y)$ 在这线段的上沿和下沿上取给定的值

$$v = \frac{\partial V}{\partial x} = \begin{cases} v_\infty[\alpha - F'_+(x)] = v^+(x), \\ v_\infty[\alpha - F'_-(x)] = v^-(x). \end{cases} \tag{3}$$

用类似于第 54 目中导出凯尔迪什-谢道夫公式的方法解这个问题. 我们令

$$\frac{dW}{dz} = f_1(z) + f_2(z),$$

其中 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在线段 $(-a,a)$ 外部是解析的,并且在函数的无穷远点处等于 0,它们的虚部分别满足边界条件

* Л. И. Седов"理想流体的平面运动理论(Теория плоских движений идеалъной жидкости)" M.: Оборонгиз. 1939. 也可看他的专著[8].

$$v_1^+ = -v_1^- = \frac{v^+ - v^-}{2}, \quad v_2^+ = v_2^- = \frac{v^+ + v^-}{2}. \tag{4}$$

随后我们考虑函数 $g(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}$ 在 x 轴上当 $z = x > a$ 时取正值的分支(这分支,显然,在所考虑的线段的外面是单值的).在割痕的两沿这函数取不同符号的纯虚数值:

$$g^+(x) = -g^-(x) = i\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \tag{5}$$

作一圆心在坐标原点,半径 R 充分大的圆周 L,我们把柯西积分公式应用于由此圆和包住线段的曲线 l 所围的二阶连通区域:

$$f_1(z)g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l+L}\frac{f_1(\zeta)g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{6}$$

由于当 $z\to\infty$ 时函数 $f_1(z)\to 0$,而 $g(z)\to 1$,所以沿 L 的积分在 $R\to\infty$ 时趋于 0. 在割痕的相对两沿上根据条件(4)和(5),乘积 $vg(z)$ 取同样的值,因此,这乘积按这两沿的积分约去.因此,当 $R\to\infty$ 和 l 压缩为线段时公式(6)的极限给出

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}\int_{-a}^{a}\frac{u_1^+ + u_1^-}{\xi - z}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}d\xi. \tag{7}$$

由这公式看出 ,在实轴上,当 $|z| > a$ 时,函数 $f_1(z)$ 取实数值.根据对称原理,由此推出,下面的对称条件

$$u_1(x,-y) = u_1(x,y), \quad v_1(x,-y) = -v_1(x,y) \tag{8}$$

成立.现在把柯西公式应用到同一个周线 $L+l$ 和函数 $f_1(z)$.

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L+l}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

当 $R\to\infty$ 和 l 压缩到线段 $(-a,a)$ 时,根据条件(8)和(4)其极限形式,由此我们得到

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{v^+ - v^-}{\xi - z}d\xi. \tag{9}$$

完全类似地,把柯西公式用到函数 $f_2(z)$,我们发现,在实轴上当 $|z| > a$ 时,这函数取纯虚值,因而对于它对称条件

$$u_2(x,-y) = -u_2(x,y), \quad v_2(x,-y) = v_2(x,y) \tag{10}$$

成立.从公式

$$f_2(z)\sqrt{\frac{z-a}{z+a}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L+l}\frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\sqrt{\frac{\zeta - a}{\zeta + a}}d\zeta$$

出发,像上面一样,根据条件(10)我们得出

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}\int_{-a}^{a}\frac{v^+ + v^-}{\xi - z}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}d\xi. \tag{11}$$

把(9)和(11)加起来,我们求出问题的解有形状

$$\frac{dW}{dz}=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{v^{+}-v^{-}}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}\int_{-a}^{a}\frac{v^{+}+v^{-}}{\xi-z}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}d\xi. \tag{12}$$

这一公式给出绕行薄翼的流中的速度的近似分布.特别,由这公式可看出,在无穷远点的邻域内展开式

$$\frac{dW}{dz}=\frac{\Gamma+iN}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}+\cdots$$

成立,其中

$$\Gamma=\int_{-a}^{a}(v^{+}+v^{-})\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}d\xi,\quad N=-\int_{-a}^{a}(v^{+}-v^{-})d\xi,$$

物理上分别表示对翼周围任何路线(见第 46 目)计算出的环量和流量.我们注意,如从公式(3)中看到的,在这里 $N=0$.

方法可推广到,边界值 $\operatorname{Im}\frac{dW}{dz}$ 给定在实轴上的线段组 (a_k,b_k), $k=1,2,\cdots,n$,的两沿上的情形.

(2) 气流绕行物体 与声音传播速度相比较,飞机运动的速度更大时,空气的压缩性开始显示实质性的影响.因此,经典的流体力学方法,在那里认为介质是不可压缩的,所以它已变得不可应用,我们也就进入气体动力学领域.

对这种情况流体动力学的基本方程本质上复杂得多.连续性方程 $\operatorname{div}\rho\mathbf{V}=0$ (ρ 为介质的密度),在不可压缩介质的情况下它化为条件 $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$ (见第 46 目),现在写成完整的形式

$$\operatorname{div}\rho\mathbf{V}=\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}=0 \tag{13}$$

(我们限于与平面平行的定常流).由(13)推出流函数 $v=v(x,y)$ 存在,使得

$$\rho V_x=\rho_0\frac{\partial v}{\partial y},\quad \rho V_y=-\rho_0\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{14}$$

其中 ρ_0 为某一个常量.

我们补充加上没有涡流的条件 $\operatorname{rot}\mathbf{V}=0$,如第 46 目中一样写出,并且导致这样的势函数 $u=u(x,y)$ 存在,使得

$$V_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad V_y=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{15}$$

比较(14)与(15)两式,我们得到气体动力学方程组:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{16}$$

这方程组在不可压缩介质 $\rho=\rho_0$ 的情形转变成柯西-黎曼方程组.

方程组(16)不完整,因为不知道变量 ρ 怎样变化.应当把一些运动方程加到这个方程组,在补充假设密度 ρ 只依赖于压力 p(等熵条件)和没有外力的情况下,这些运动方程有形状

$$\operatorname{grad}\frac{1}{2}V^2=-\frac{a^2}{\rho}\operatorname{grad}\rho,\tag{17}$$

其中 $a=\sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}}$，表示在介质中声音传播的速度*. 容许对方程(17)积分(称之谓伯努利积分)

$$\frac{1}{2}V^2+\int\frac{dp}{\rho}=\text{const}.$$

最后假设，流是绝热的，亦即

$$p=k\rho^{\kappa},\tag{18}$$

其中 k 和 $\kappa=\dfrac{c_p}{c_v}$（热容量比）为描述气体特性的常量. 在这个假设下 $\int\dfrac{dp}{\rho}=\dfrac{k\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1}=\dfrac{1}{\kappa-1}a^2$，并且伯努利积分右边的常数可以写成 $\dfrac{1}{2}V_{\max}^2$ 的形状，其中 $V_{\max}$ 是对应于值 $a=0$ 的最大可能速度. 所以伯努利积分采取形状

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{1}{\kappa-1}a^2=\frac{1}{2}V_{\max}^2.\tag{19}$$

代入 $a^2=k\kappa\rho^{\kappa-1}$，我们从(19)式求出 $\rho^{\kappa-1}=\text{const}\left(1-\dfrac{V^2}{V_{\max}^2}\right)$

或者

$$\rho=\rho_0\left(1-\frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}},\tag{20}$$

其中常数 ρ_0 表示在 $V=0$ 时的密度值.

由此可见，ρ 依赖于 $V=\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$，亦即方程组(16)是非线性的，这就说明了气体动力学问题的复杂性.

方程(16)可以化为函数 u 的一个二阶方程. 为了做到这一点，我们把连续性方程改写成如下形状

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})=\rho\operatorname{div}\mathbf{V}+(V,\operatorname{grad}\rho)=0.\tag{13}$$

现在作代换 $\mathbf{V}=\operatorname{grad}u$，并且代入方程(17)中得出的 $\operatorname{grad}\rho$，我们得到

$$\Delta u-\frac{1}{2a^2}(\mathbf{V},\operatorname{grad}\mathbf{V}^2)=0,$$

其中 $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$，表示拉普拉斯算子. 代入 $\mathbf{V}^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$，并且展开标量积，我们就得到所要求的方程

$$\left(1-\frac{u_x^2}{a^2}\right)u_{xx}-\frac{2u_xu_y}{a^2}u_{xy}+\left(1-\frac{u_y^2}{a^2}\right)u_{yy}=0\tag{21}$$

* 有关方程(17)和其他关系式的推导可以参阅 Н. Е. Кочин、И. А. Кибель、Н. В. Розе[6]第二卷，第一章.

(为简单起见,足标写在下面,我们表示偏导数).这方程是带有二阶偏导数的拟线性方程.如果认为音速 $a=\infty$,它就转为拉普拉斯方程.在亚音速($V<a$)时它是椭圆型的,在超过音速($V>a$)时它是双曲型的.

我们引入解气流绕行断面问题的两种近似方法.

(3) 詹森-瑞利方法 这些方法中第一个建立于第一次世界大战期间,并且只对与音速比较流速不很大的情形.我们把方程(21)改写成形状

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{1}{a^2}(u_{xx}u_x^2+2u_{xy}u_xu_y+u_{yy}u_y^2) \tag{22}$$

并且我们取撞上断面的流的速度,$V_\infty=1$,此时伯努利积分(19)一次给出 $a_\infty^2=\frac{\kappa-1}{2}(V_{max}^2-1)$,而另一次:

$$\frac{1}{a^2}=\frac{M_\infty^2}{1-\frac{\kappa-1}{2}M_\infty^2(u_x^2+u_y^2-1)}=M_\infty^2+\frac{\kappa-1}{2}M_\infty^4(u_x^2+u_y^2-1)+\cdots$$

其中 $M_\infty=\frac{1}{a_\infty}$.如果把这展开式代入方程(22),那么后者将包含 M_∞^2 当作参数.顾及这一点,我们将在级数形状

$$u=u^0+M_\infty^2u^1+M_\infty^4u^2+\cdots$$

中寻找方程(22)的解,其中 $u^k=u^k(x,y)$是一未知函数.把这代入(22)式中,并且使 M_∞^2 的相同幂次的系数相等,我们得到方程组

$$\begin{aligned}&u_{xx}^0+u_{yy}^0=0\\&u_{xx}^1+u_{yy}^1=u_{xx}^0(u_x^0)^2+2u_{xy}^0u_x^0u_y^0+u_{yy}^0(u_y^0)^2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{23}$$

其中第一个是拉普拉斯方程,而其余是泊松方程 $\Delta u^k=f_k(x,y)$,这些方程的右端部分在解前面方程时确定(它们的复杂性随着编号的增加而增大).边界条件有形状

$$\frac{\partial u^0}{\partial n}=\frac{\partial u^1}{\partial n}=\cdots=0,\text{在断面上},$$

也表达绕行断面的条件.

函数 $u^0(x,y)$是不可压缩液体流绕行断面时的速度的势能.我们认为它是已知的并且我们限于指明,怎样寻找第一个修正项 $u^1(x,y)$.为此,我们提出调和函数 u^0 作为解析函数 $f(z)$的实数部分:

$$u^0=\frac{1}{2}(f+\bar{f}).$$

由此我们找出

$$u_x^0=\frac{1}{2}(f'+\bar{f}'),\quad u_y^0=\frac{1}{2}(f'-\bar{f}'),\cdots$$

把函数 u^1 表示成形状 $u^1=F(z,\bar{z})$,并且利用复数求导的记号 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (见第 56

目),我们求得

$$u_x^1 = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}, \quad u_y^1 = i\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\right), \cdots$$

把这些表达式代入(23)中第二个方程,把这方程表示成复数形式:

$$8\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = f''\bar{f}'^2 + \bar{f}''f'^2. \tag{24}$$

根据对于解析函数 f,我们有 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f = 0$ (见第 56 目),而对于解析共轭函数有 $\frac{\partial}{\partial z}\bar{f} = 0$,方程(24)的通解很容易写出,因为在按 z 积分时可以认为 $\bar{f}$ 是常量,而在按 $\bar{z}$ 积分时可以认为函数 f 是常量. 在这基础上我们先按 z 对(24)积分,然后按 $\bar{z}$ 积分,我们就找到

$$8u^1 = 8F = \bar{f}'g + f'\bar{g} + h + \bar{h}, \tag{25}$$

其中 $g = \int f'^2 dz, \bar{g} = \int \bar{f}'^2 d\bar{z}$ 为已知函数,而 h 和 $\bar{h}$ 分别是自变量 z 和 $\bar{z}$ 的任意解析函数,并且 $\bar{h}(\bar{z}) = \overline{h(z)}$.

由此可见,函数 $h + \bar{h}$ 是调和的,求解可化为解诺伊曼问题(见第 44 目),因为它的正规导数的边界值由边值条件 $\frac{\partial u^1}{\partial n} = 0$ 决定.

詹森 - 瑞利方法在 20 世纪 40 年代被很多论文作者应用和完善,这些论文作者广泛利用复变函数论的方法,把许多重要断面的气流绕行问题完全解决.

(4) 恰普雷金方法 它是解亚音速气流绕行断面的问题的第两个近似方法,我们想根据恰普雷金的经典文章"关于气流"(《О Газовых струях》,1904)中所提出的思想来叙述,它是把绝热曲线 $p = k\rho^{\kappa}$ $(\kappa > 1)$换成双曲线 $p = a + \frac{b}{\rho}$,并且常数 a 和 b 使得双曲线与绝热线在某一点上接触. 这个方法适合于用虚拟的气体代替真实的气体,对于虚拟气体 $\kappa = -1$,能够大大简化数学工具.

为了推导出所需要的方程,我们引入所谓的速端曲线平面(V_x, V_y),而在这平面中有极坐标 V, θ (速度的模和它对轴 V_x 的倾角). 此时我们有 $V_x = V\cos\theta, V_y = V\sin\theta$,并且根据方程组(16)我们得到

$$du + i\frac{\rho_0}{\rho}dv = (V_x dx + V_y dy) + i(-V_y dx + V_x dy) = Ve^{-i\theta}dz.$$

其中像往常一样 $dz = dx + idy$. 代换 $du = \frac{\partial u}{\partial V}dV + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta$,对 dv 也类似地做,由此求得

$$\frac{\partial z}{\partial V} = \frac{e^{i\theta}}{V}\left(\frac{\partial u}{\partial V} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial v}{\partial V}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{e^{i\theta}}{V}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right).$$

现在使混合导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial V}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial V \partial \theta}$ 相等,经过化简后我们得到

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial V}+i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial v}{\partial V}\right)=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)+i\frac{d}{dV}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

把实部和虚部分开导出所谓的速端曲线方程

$$\frac{\partial u}{\partial V}=V\frac{d}{dV}\left(\frac{\rho_0}{\rho V}\right)\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{V}{}\frac{\partial v}{\partial V},\tag{26}$$

它们对于 V 和 θ 是线性的(速度向量的极坐标).方程(26)由恰普雷金得出,他利用方程的线性解出了许多气流理论的重要问题*.

在 $\kappa=-1$ 时伯努利积分(20)取形状 $\rho=\rho_0\left(1-\frac{V^2}{V_{max}^2}\right)^{1/2}$,并且把这个代入速端曲线方程(26),我们求得

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=V\sqrt{1-\frac{V^2}{V_{max}^2}}\frac{\partial v}{\partial V},\quad \frac{\partial v}{\partial \theta}=-V\sqrt{1-\frac{V^2}{V_{max}^2}}\frac{\partial u}{\partial V}.$$

引入速度模的函数

$$W(V)=\int\frac{dV}{V\sqrt{1-\frac{V^2}{V_{max}^2}}}=\frac{1}{2}\ln\frac{V_{max}-\sqrt{V_{max}^2-V^2}}{V_{max}^2+\sqrt{V_{max}^2-V^2}}.\tag{27}$$

由于$\frac{\partial v}{\partial W}=\frac{\partial v}{\partial V}\cdot\frac{1}{W'}=\frac{\partial v}{\partial V}V\sqrt{1-\frac{V^2}{V_{max}^2}}$和类似地$\frac{\partial u}{\partial W}$,所以最后方程采取形状

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial W},\quad \frac{\partial v}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial W},$$

亦即与柯西-黎曼方程重合.

由此可见,$u+iv$ 在所作的假设条件下是 $W-i\theta$ 的解析函数,并且任何这种函数决定某一种气流.这一情况给出有效地构造十分广泛的气流类的可能性,特别也包括绕行某些断面的气流在内.

但是绕行给定断面的气流的确定问题,在用变量 W 和 θ 的术语下的速端曲线是十分困难的非线性边值问题(见前面的脚注).因此,在 20 世纪 40 年代为了实际计算(克里斯蒂安诺维奇、卡尔曼和钱学森)建立了近似方法.下面的思想是这些近似方法的基础——构作一个绕行"接近"于已知断面的流,并且给出对绕行某一断面的流的计算转为对绕行近似断面的流的计算的规则**.

58. 聚能装药理论 近年来,复变函数论的方法存在十分有趣的现象——所谓的聚能现象的理论中找到新的、出乎意料的应用.

做如下实验.在厚度为 20 cm 的钢板上方安置一些同样高度(15 cm)和直径

---

* 遗憾的是,转向速端曲线平面,在方程的线性方面给出赢局,却在边界条件方面给出败局,在速端曲线平面中这些边界条件,一般说来有很复杂的形状.因此,速端曲线方法不是万能的.

** 参阅 C. A. 克里斯蒂安诺维奇"Обтекание тел газами при больших дозвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1940. Вып. 481"也可见[6],第 2 部分

(4 cm)的圆柱形弹药. 弹药 a 和 b——整个圆柱形都是放满的,而其余圆柱形弹药在向钢板的一边挖有一个圆锥形的凹陷,并且在弹药 e 和 f 所挖出的凹陷中嵌入一个厚度为 1.5 mm 的钢圆锥. 弹药 a,c 和 e 置在钢板上,而其余弹药提升到弹药直径的 $1\frac{1}{2}$的高度上,引爆炸药在 A 的位置进行(图 129),在图 129 中描绘了这些弹药的作用. 在情况 f,即所挖圆锥形凹陷用钢罩盖住,并且弹药远离要击穿的物体的情况时,穿透作用难以置信地增大引起我们注意.

在具有凹陷(情况 c)时增大穿甲作用的效应,早在 19 世纪下半叶就已经被发现,并且获得聚能效应的名称. 但是它的使用只局限于采矿工作中某些技术问题. 具有金属镶面时穿甲作用大大提高是晚一些时候发现的. 把这效应用于穿甲弹的第一张专利特许证是在 1914 年. 广泛应用聚能效应只是在 1941—1945 年的战争中才发现. 聚能现象理论也在此时创立,这理论近十年来在许多国家获得了很大发展.

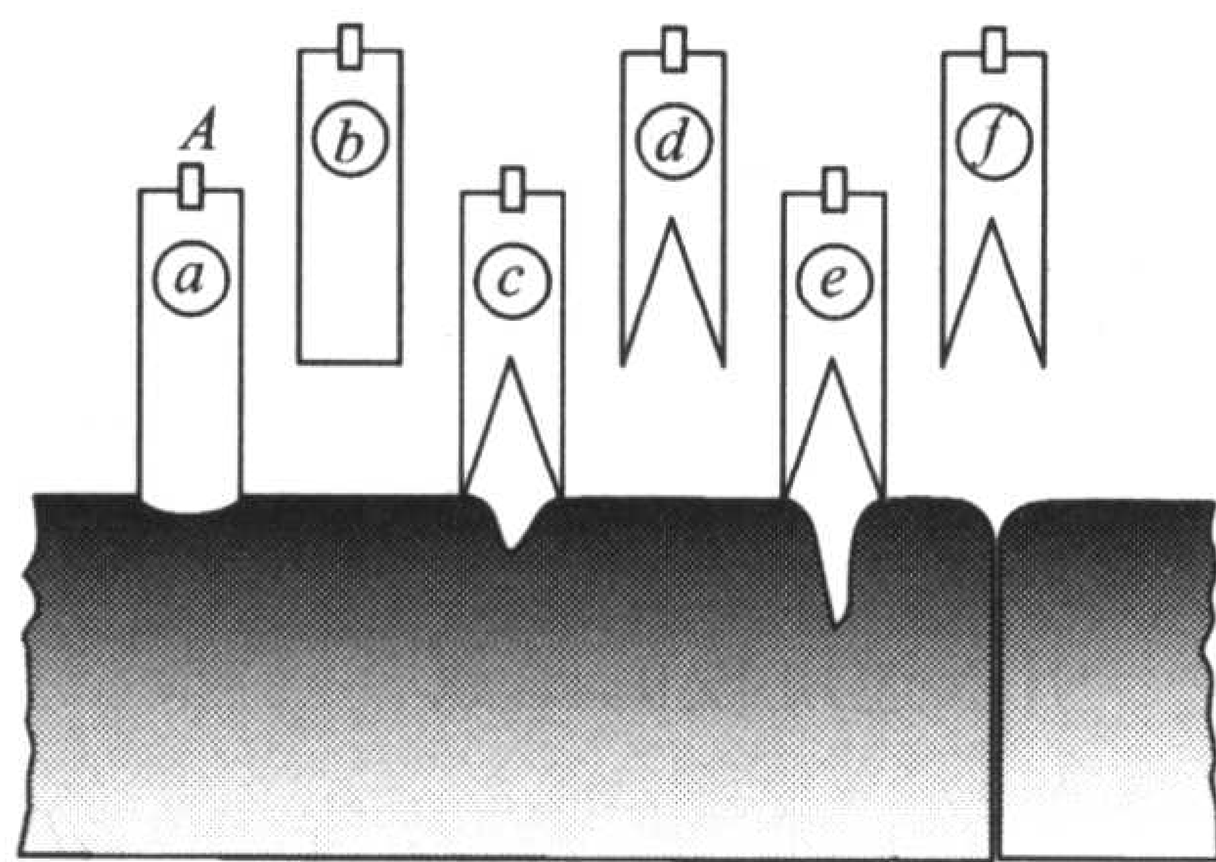


图 129

(1) 理论的物理前提条件　在提出理论的基本前提条件之前,我们指出一些与爆炸及其可投射能力有关的简单实验事实.

在上面所述的实验中弹药是指称作高爆(烈性)爆炸物(三硝基甲苯、六素精、四硝基甲烷赤鲜醇等等). 它们具有以下的特性. 如果在爆炸物的小区域内产生足够高的压力(引爆),那么从这小区域开始传播这爆炸物爆炸变化的波——爆炸波. 这波前沿的前方是静止的,而前沿的后方有 100 000～200 000 大气压级压力的裂变产物,波传播的速度有 5～10 km/s 的量级. 在理论研究中爆炸波前沿的厚度通常略去不计,实验表明,这前沿的厚度,实际上,与其他特征量相比真的很小. 我们注意到,整个爆炸理论的建立还是在较近的时间,而现在它已进入专讲爆裂运动的气体动力学范畴(见[6]第 2 部分).

现在我们对带有金属罩的 f 型聚能装药的第一次近似的理论原理作简短的叙述. 作为这理论的前提条件我们采用以下的假设:

1) 爆炸瞬时发生,爆炸物对罩的作用化为垂直指向圆锥体表面的脉冲.

2) 罩的材料,同样被击穿的钢,都认为是理想液体.

尽管乍看起来,把装甲钢板想像成理想液体似乎是完全不合理的,这两个假设还是容易说明理由的. 可是事情在于,在聚能爆炸时所产生的压力有 100 000 大气压级,而在这种压力下刚性力和可塑性力是惯性力的几百分之一.

在所采纳的前提条件下,现象的定性景象可以想像成如下样式,在初始时刻液体圆锥罩的所有单元沿圆锥体的轴的方向都具有 2 km/s 级的速度,随着圆锥体壁的变粗,发生压缩圆锥体. 在一个单元趋近圆锥体轴时,这单元的一部分被向前挤出和溅

出,这类似于海浪在流向楔形港湾时溅出一样.由此结果从圆锥体挤出射流——"金属丝流"(图 130).计算表明,圆锥体愈尖,金属丝流的速度愈大.通常观察到的速度有从 2 ~ 10 km/s 级,在个别实验中速度可达到 90 km/s.

金属丝流在遇到装甲板时,在它身上产生 1 000 000 大气压级的压力,这就说明了为建立击穿理论可以应用理想液体的方案.穿透的本质情景不同于射流形成的情景只是时间变化的方向(用 $-t$ 代替 t).在这过程中的特点是,随着它的发展射流的长度减少,在每一个被击穿的区域部分射流发散开来.

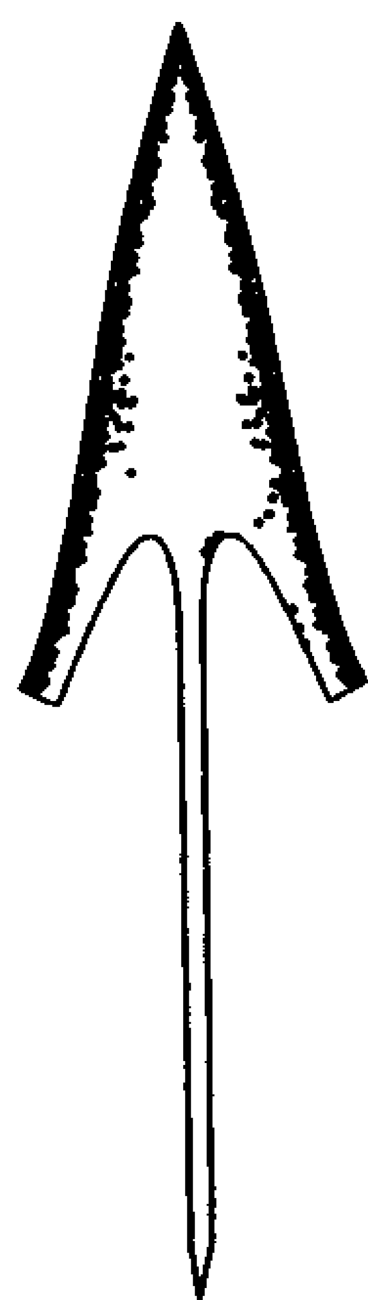


图 130

(2) 流体动力学方案 我们考察有关具有公共对称轴的两条行进中彼此相遇的射流的碰撞问题.我们所谈的,一开始就既涉及平面情况,也涉及带有轴对称的情况,这个问题化为在具有常压力的介质中构造理想液体的定常流,该流要满足如下的条件.沿对称轴,我们把它取成 x 轴,这种密度 ρ_1 的液体流从左向右流动着,当 $x\to-\infty$时,流的直径接近于 $2r_1$,而速度接近于 V_1;密度 ρ_2 的液体流从右向左流动着,当 $x\to+\infty$ 时,流的直径接近于 $2r_2$.流有自由表面 L_1 和 L_2,并且曲面 γ 分割两种液体;这个曲面关于 x 轴对称,并且它与 x 轴的交点我们取作点 $x=0$,在此点上两条流的速度为 0(图 131).因为流动是定常的,所以对于压力 p,根据第 47 目伯努利-欧拉公式(1);我们有关系式

$$p=A-\frac{\rho}{2}V^2, \tag{1}$$

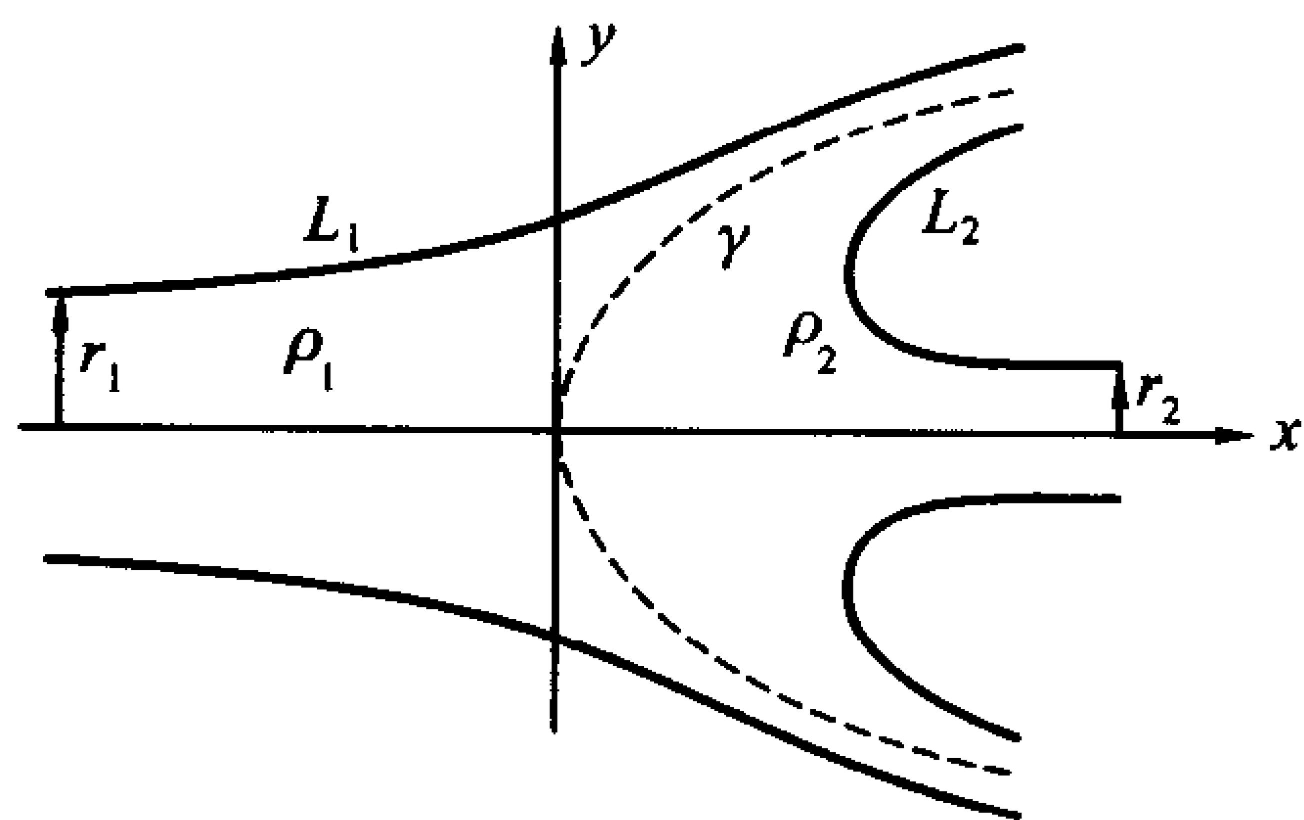


图 131

其中 A 为常数,它等于对应 $V=0$ 的,亦即在点 $x=0$ 上的压力.由在外部介质中的压力是常数的条件,根据这一关系式我们得到,沿着自由表面 L_1,

$$V=\text{const}=V_1.$$

沿着分割面 γ,分别具有密度 ρ_1 和 ρ_2 的液体流的速度 V_+ 和 V_- 应当由关系式

$$\rho_1V_+^2=\rho_2V_-^2 \tag{2}$$

联系的.沿着 γ 向 $+\infty$ 离去,我们看出 $V_+\to V_1$.根据(2)我们得到,在沿着 γ,$x\to$

$+\infty$时 $V_- \to \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1$. 由此，类似于前面，我们得出，沿着自由表面 L_2

$$V = \text{const} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1.$$

正是这个确定了沿 x 轴从右向左行进的流的速度在 $x \to +\infty$时的极限

$$V_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1. \tag{3}$$

平面情况 更详细地讲述平面平行流的情况和通过

$$w = f_1(z) = u_1 + iv_1, \quad w = f_2(z) = u_2 + iv_2 \tag{4}$$

分别表示相遇流的复势能. 利用这些流关于 x 轴的对称性，我们考察它们 $y>0$ 的上面部分，此时，函数(4)将实现把流所占的区域映到宽为 q_1 和 q_2 的带上去的共形映射，其中 $q_1 = V_1 r_1$ 和 $q_2 = V_2 r_2$ 表示每一流中的流量. 映射(4)的确定可以精确到一个常数项，并且这些常数项，显然可以选成这样，使得平面 w 中的带形是带形

$$0 < v < q_1 \text{和} -q_2 < v < 0,$$

并且使得流的分叉点 $z=0$ 在两个映射时都转变到点 $w=0$.

为了解题，需要求出 L_1, L_2 和 γ 以及相应的映射(4)，使得沿着转变到直线 $v = q_1$ 和 $v = -q_2$ 的曲线 L_1 和 L_2，分别有

$$|f'_1(z)| = V_1 \text{和} |f'_2(z)| = V_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1, \tag{5}$$

而沿着转变到正半轴 u 的曲线 γ 有

$$|f'_2(z)| = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} |f'_1(z)| \tag{6}$$

(图 132). 我们还要指出，在所考虑的映射下 x 的负半轴和正半轴分别转变为负半轴的上、下两沿，所以

$$\arg f'_1(z) = 0, \text{当 } x<0,$$
$$\arg f'_2(z) = -\pi, \text{当 } x>0. \tag{7}$$

为了简化问题的提法我们考察函数

$$\zeta = \ln f'_k(z) = \ln f'_k[z_k(w)] = F_k(w), k=1,2, \tag{8}$$

其中 $z = z_k(w)$是(4)的反函数，依赖于变量 w. 这些函数应当满足如下的边界条件：分别沿直线 $v = q_1$ 和 $v = -q_2$

$$\text{Re } F_1(w) = \ln V_1 \text{和} \text{Re } F_2(w) = \ln V_1 + \frac{1}{2}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}, \tag{5'}$$

沿着 u 的正半轴

$$\text{Re } F_2(w_2) = \text{Re } F_1(w_1) + \frac{1}{2}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \text{Im } F_2(w_2) = \text{Im } F_1(w_1), \tag{6'}$$

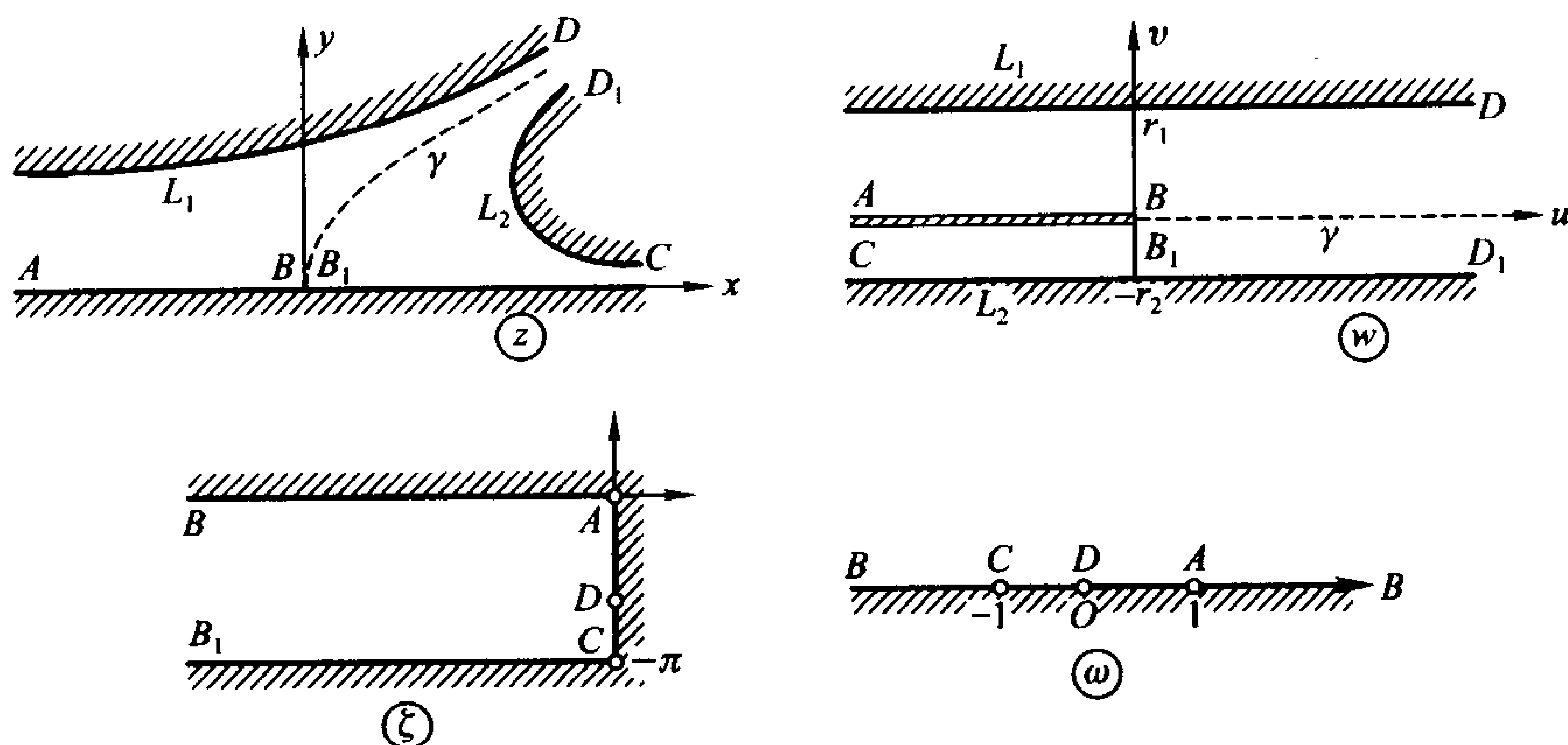


图 132

其中 $w_k = f_k(z)$，而 u 的负半轴的上、下沿上

$$\operatorname{Im} F_1(w)=0 \text{ 和 } \operatorname{Im} F_2(w)=-\pi. \tag{7'}$$

由(6)得出 $w_2=\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}}w_1$，就在此时从(6′)可以得出，函数 $F_2\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}w\right)-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ 是 $F_1(w)$通过 u 的正半轴的解析延拓.由此可见，问题化为寻找一个函数 $F(w)=F_1(w)$，它在沿负半轴 u 有割痕的带状 $-q_2\sqrt{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}<v<q_1$ 中解析，在带的边界上满足条件 $\operatorname{Re} F=\ln V_1$，而在割痕的上、下沿分别满足条件

$$\operatorname{Im} F(w)=0, \operatorname{Im} F(w)=-\pi.$$

往后，不失一般性可以取 $V_1=1$，此时，我们将有 $q_1=r_1$，并且根据(5)，$q_2\sqrt{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}=r_2$.此外因为根据问题的力学涵义，量 $\operatorname{Re} F(w)$有上界，所以函数 $\zeta=F(w)$应当对具有沿负半轴 u 有割痕的带 $-r_2<v<r_1$ 实施共形映射到具有对应边界点的(在图 132 指出的)半带上.这函数可用初等方式找到.事实上，半平面 $\operatorname{Im}\omega>0$ 映射到具有图 132 中指明的点对应的割痕的带上，与第 39 目的例 2 完全一样地按照施瓦茨－克里斯托弗公式找出*：

$$w=\frac{r_1}{\pi}\ln(\omega-1)+\frac{r_2}{\pi}\ln(\omega+1)-\frac{r_1+r_2}{\pi}\ln(\omega-a).$$

其中 $a=\dfrac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$.按照公式 $\omega=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-i\zeta\right)=\operatorname{ch}\zeta$，把半带映射到这个具有所需要的

* 在第 39 目的例中，点的对应与此不同.

点对应的半平面上,因此,函数 $\zeta=F(w)$的反函数有形状

$$w=\frac{r_1}{\pi}\ln(\operatorname{ch}\zeta-1)+\frac{r_2}{\pi}\ln(\operatorname{ch}\zeta+1)-\frac{r_1+r_2}{\pi}\ln\left(\operatorname{ch}\zeta-\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\right). \tag{9}$$

知道函数 $F(w)$,按照公式(8)我们找到 $f'(z)=\frac{dw}{dz}=e^{F(w)}$,由此

$$z=\int_0^w e^{-F(w)}dw \tag{10}$$

(在函数 f 和 F 的表示中我们省略了下标 1).

利用这个公式,可以决定射流的形状,也可以决定流中的速度分布.

轴对称情况 在这种情况,有关流的互撞问题的解要像在平面情况中一样有如此程度的最终形式是不能够获得的.如果把图 131 看作流的轴截面,并且用 x 表示沿轴的坐标,y 表示到轴的距离,那么代替柯西-黎曼方程组,我们得到方程组

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-y\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}=y\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{11}$$

(比较第 56 目中的方程(12)).研究这方程组解的性质与尚未充分成熟的拟共形映射的一般理论有关(参阅第 56 目).因此必须限于这一理论的一般定性考虑,并在它们基础上获得一些结果,用这些结果可以构造第一次近似的理论.

列举一些这样的定性考虑和结果.

1) 当 $y\to+\infty$时,曲线 L_1和 L_2有不同符号的曲率,并且渐近地接近某一条直线 $y=x\tan\alpha+b$.由此可见,存在一个渐近的圆锥体,流动着的流的自由表面接近于这个圆锥体,这自由表面限定所谓的"覆盖层"(图 133).

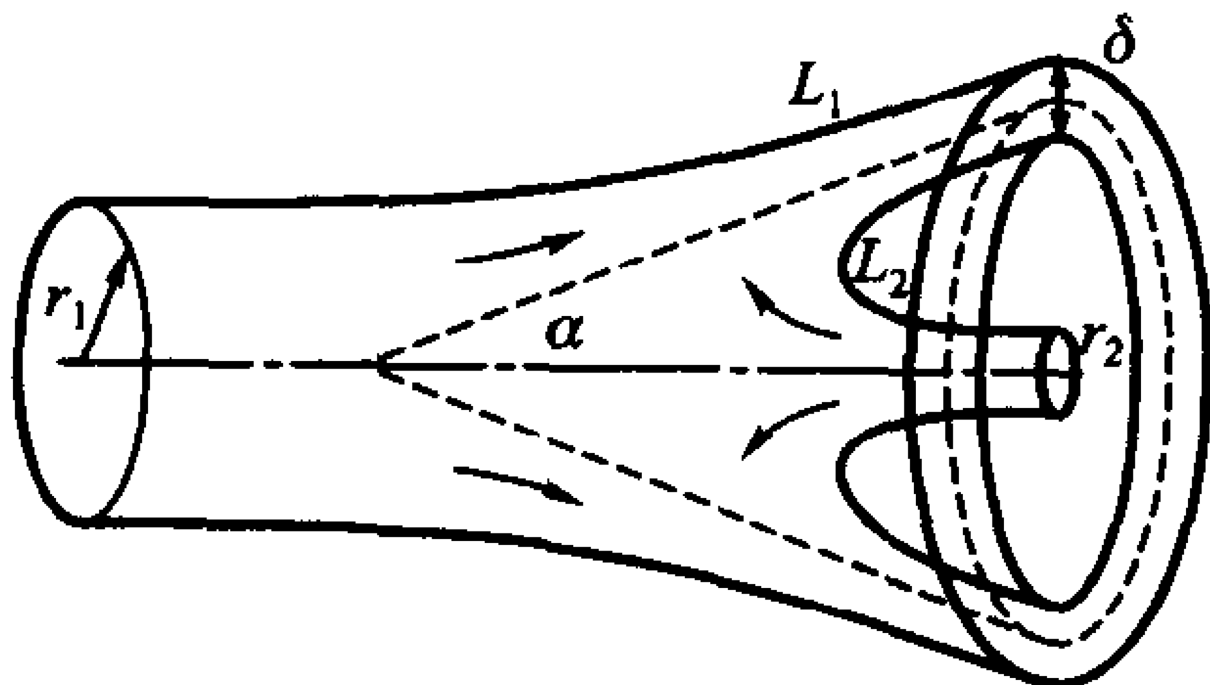


图 133

2) 包含在曲线 L_1和 L_2之间的带的宽度 δ,当 $y\to+\infty$时趋于 0,并且

$$2\pi y\delta=\pi r_1^2+\pi r_2^2+\eta, \tag{12}$$

其中 η 是相对于δ 的高阶无穷小量.为了讲清这关系式的物理意义,我们注意到,它的左边部分表示覆盖层截面的面积,而 πr_1^2和 πr_2^2表示在 $x\approx\mp\infty$时射流的截面的面积(见图 133).在射流相遇处的远方,亦即$|x|$很大时,每一个射流的截面的所有点上的速度大致相同(对第一个射流等于 V_1和对第二个射流等于 V_2).因此,由常流量条件表达出来的液体的不可压缩性条件对每一个流写成形状 $\pi r_k^2\approx2\pi y\delta_k$,其中 δ_k 表

示包含在L_k和γ ($k=1,2;\delta_1+\delta_2=\delta$)之间的带的宽度，把这两个关系式相加起来就得到(12).

3) 由动量守恒定律可以得到对今后很重要的流动着的流的半径、它们的密度和角α之间的关系. 考察靠近x轴的流的两个单元在$x\approx\pm\infty$时是高为1的圆柱体，它们的总动量将沿着x轴的方向，并且等于$I_1=\pi\rho_1 r_1^2 V_1-\pi\rho_2 r_2^2 V_2$. 在互撞以后，并经过足够长的时间，这些单元将处在圆锥体的近旁，而且它们的总动量在x轴上的投影将等于$I_2=(\pi\rho_1 r_1^2 V_1+\pi\rho_2 r_2^2 V_2)\cos\alpha$. 按照动量守恒定律我们有$I_1=I_2$，由此令

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}=\lambda,\quad \frac{r_2}{r_1}=k, \tag{13}$$

并利用关系式(3)，我们求得

$$\cos\alpha=\frac{1-\lambda k^2}{1+\lambda k^2},\quad k^2=\frac{1}{\lambda}\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \tag{14}$$

所导出的结果对构造近似积聚理论的计算公式就足够了.

(3) 击穿理论　我们考虑已经弄清楚的在坐标系中两个液体射流互撞的模式，对于这个模式左边(粗)的射流不流动. 在这坐标系中右边的、移动着的射流的速度将等于$w=V_1+V_2=(1+\lambda)V_2$. 射流在互撞处的速度V_1，在积聚理论中将是穿透速度(我们用ω表示)，因而等于

$$\omega=\lambda V_2=\frac{\lambda}{1+\lambda}w. \tag{15}$$

由此可见，积聚射流的穿透速度总是小于射流本身的速度. 特别，如果射流和装甲有相同密度($\lambda=1$)，那么穿透速度小于射流的速度两倍.

由公式(15)也得出如下重要结果：如果射流的某一固定截面移动一个距离H，那么射流的穿透点移动一个距离$h=H\frac{\omega}{w}=\frac{\lambda}{1+\lambda}H$，而射流在这时缩短一个量$H-h=H\left(1-\frac{\omega}{w}\right)=\frac{1}{1+\lambda}H$. 由此可见，射流的消耗部分的长$h_2=H-h$对穿透区域的长$h$的比等于

$$\frac{h_2}{h}=\frac{H-h}{h}=\frac{1}{\lambda},$$

由此得出

$$h=\lambda h_2=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}h_2. \tag{16}$$

特别，如果射流和装甲的密度相同，那么$h=h_2$，亦即穿透的深度等于消耗在这穿透上的射流之长.

公式(16)与有关积聚射流有有限长度的假设相符合. 设有一圆柱形液体棒，它的直径与它的长度相比很小，共轴地撞击另一圆柱形液体棒. 在接近互撞开始时刻的一

段时间内,我们有骤然表现出来的不稳定过程.但是,凭借上面所说的一般原理,可以证明,在射流头中发生的现象,可以觉察到的只影响射流的 2～3 个直径的距离.当现实过程接近于上面所讨论的稳定过程时,消耗在这些现象上的只是射流的不大一部分(几个直径大小),可以忽略.因此消耗在穿透上的射流的一部分的长 h_2 可以认为就等于射流的长,我们也就得到*积聚流的穿透深度*的如下近似公式:

$$h=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}a \tag{17}$$

其中 a 表示射流长,ρ_2 表示射流的密度,ρ_1 表示装甲密度.

(4) *积聚射流形成理论* 上面所讨论的在 $\rho_1=\rho_2$ 时两条射流互撞的方案,也可以作为计算积聚流参数的基础.为此目的,我们引入新的移动坐标系,它沿着 x 轴从右向左以速度 $V/\cos\alpha$ 移动.在这系统中圆锥形覆盖物沿着自己曲面的法线的速度 $W=V\tan\alpha$ 移动,积聚射流的速度原来等于 $w=V+\dfrac{V}{\cos\alpha}$.代入 $V=W\cot\alpha$,我们得到*积聚射流速度*的公式,它依赖于角 α 和圆锥体的"压缩速度" W:

$$w=W\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\cot\alpha. \tag{18}$$

同样容易得到,依赖于角 α 和它的一个截面的外罩的厚度的射流的半径的表达式*.我们取外罩的厚度,譬如当 $y=1$ 时等于 δ.此时,根据(12)我们将近似地有 $2\delta=r_1^2+r_2^2$,而根据(14),$\dfrac{r_2}{r_1}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$,由此,我们得到*积聚射流半径*的表达式

$$r_2=\sqrt{\delta(1-\cos\alpha)}=\sqrt{2\delta}\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{19}$$

如在讨论理想情景的穿透理论中一样,我们转向现实聚能装药的(第一次近似)计算.我们讨论火药的外罩是按公式(12)确定的可变厚度的圆锥体的情况,并且装药是这样的,外罩的所有单元瞬间都获得速度 W,它数量上是常数,而方向是沿着渐近圆锥体的法线.

如果圆锥体的厚度与它的高相比很小,那么过程的初始不稳定位相可以忽略不计,并且因此可以认为,射流的形成依照图 130 中描述的情景发生:受挤压的圆锥体从自己挤压出一条金属丝,它的半径按照公式(19)决定,并且它以公式(18)所决定的速度移动.

根据上面所述,在所讨论的情况中射流的长度和穿透深度等于圆锥母线的长.

在结束时,我们指出,所有导出第一次近似理论的结果和结论,在装药的直径、外罩的形状和厚度的充分广的范围内,对不同密度和坚固性的材料所进行的实验中得到完全证实.但是也积累了足够多的结果,它们不属于所叙述的理论,并且对自己即

---

* 知道外罩一个截面的厚度能够确定整个外罩,因为外罩的几何被两条射流所建立的覆盖物的形状决定.

使非直截了当的解释也需要对这理论的实质性补充.某些这样的结果,以及与这些结果有关的问题的设置读者可在拉夫连季耶夫的文章[20]中找到,也可参阅拉夫连季耶夫和沙巴特的书[21].

59. 弹性理论问题. 在这里我们列举解第51目中提出的问题的一些例子.

(1) 解圆的基本问题 设区域 D 是单位圆,并且要求找出在单位圆周 C 上给定外部应力 $F_n = x_n + iy_n$ 下弹性平衡(问题Ⅰ)或给定位移 $g = u + iv$ 下弹性平衡(问题Ⅱ).

根据第51目的结果,这些问题的解可化为寻找两个在圆 $|z|<1$ 内解析的函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$,对于问题Ⅰ的情况,它们在圆周上由条件

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) \tag{1}$$

联系着,其中 $f(\zeta) = i\int_{\zeta_0}^{\zeta} F_n ds$,表示给定在 C 上的函数(见第51目公式(8).与那里所说相适应,在这公式中可以令 $A=0$),而对于问题Ⅱ的情况,它们在圆周上由条件

$$\kappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu g(\zeta) \tag{2}$$

联系着,其中 κ 和 μ 是常数(见第51目公式(4)).

更详细地讨论问题Ⅰ的解.为了问题的完全确定我们采取条件

$$\psi(0) = \operatorname{Im}\varphi'(0) = 0 \tag{3}$$

(见第51目公式(10)).现在利用,$\psi(\zeta)$ 的值是函数 $\psi(z)$ 的极限值,其中 $\psi(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内解析.按照第52目中的公式(22),考虑到条件(1)和(3),那么我们对一切 z,$|z|<1$,得到关系式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\psi(\zeta)}d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta = 0.$$

因为函数 $\varphi(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内解析,那么利用柯西公式,这关系式可以改写成如下形状

$$\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \tag{4}$$

我们得到了确定函数 $\varphi(z)$ 的方程.为了解这方程,我们把泰勒展开式 $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 代入(4)式左端的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta = \frac{\bar{c}_1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta}{\zeta - z}\sum_{k=2}^{\infty} k\bar{c}_k\bar{\zeta}^{k-1}d\zeta. \tag{5}$$

分出的一项根据柯西积分式等于 $\bar{c}_1 z$.为了变换第二项,我们注意到,在圆上,$\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$,因此被积函数可以改写成形状*

$$\frac{1}{\zeta - z}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\bar{c}_k}{\zeta^k - 2} = \frac{2\bar{c}_2}{\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\bar{c}_k}{\zeta^k},$$

并且这级数在 $|\zeta|\geqslant 1$ 时收敛,逐项积分,我们求得(5)式右边部分第二项等于 $2\bar{c}_2$.由此可见,从公式(4)我们找到所要求的函数 $\varphi(z)$ 的下列表达式:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \bar{c}_1 z - 2\bar{c}_2. \tag{6}$$

余下的事是确定常数 $c_1 = \varphi'(0)$ 和 $c_2 = \varphi''(0)/2$,为此只要把(6)式对 z 进行一次和二次微分,随

---

* 把 $1/(\zeta - z)$ 展开成按 z/ζ 的幂级数,并且把所得到的展开式相乘.

后代入 $z=0$,我们得到

$$c_1+\bar{c}_1=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta,\quad c_2=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^3}d\zeta. \tag{7}$$

第二个方程完全确定 c_2,对于第一个方程,首先我们注意到,只是在条件

$$\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta=\operatorname{Im}\frac{i}{2\pi}\int_C f(\zeta)d\bar{\zeta}=0$$

下才可解(我们利用了,在 C 上 $\bar{\zeta}=1/\zeta$),再置换 $f=f_1+if_2$ 和 $d\bar{\zeta}=dx-idy$ 后,条件可改写成形状

$$\int_C f_1dx+f_2dy=0, \tag{8}$$

而且物理上表示外部应力的主矩等于 0 的条件(比较第 51 目公式(9)). 在此条件下,(7)式的第一个公式决定 c_1 的实数部分,而它的虚数部分与所采用的条件(3)相对应. 我们令它等于 0.

这样,函数 $\varphi(z)$ 由公式(6)确定,公式中的常数 c_1 和 c_2 从公式(7)中求出. 知道这个函数,我们从条件(1)求出解析函数 $\psi(z)$ 的边界值,并且根据这些值,在柯西公式帮助下,复原圆内的 $\psi(z)$ 的值

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{f(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{\varphi(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{9}$$

右端的第二个积分,根据第 52 目中的公式(22),等于 $\overline{\varphi(0)}$,第三个积分根据柯西留数定理很容易计算

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi'(\zeta)d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}=-\frac{\varphi'(0)}{z}+\frac{\varphi'(z)}{z}$$

(我们利用在 C 上 $\bar{\zeta}=1/\zeta$,同时被积函数在 C 内有两个一阶极点:$\zeta=0$ 和 $\zeta=z$. 在这些极点上的留数按第 23 目中公式(5)算出). 由此可见,可以把公式(9)改写成形状

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{f(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\varphi'(z)}{z}+\frac{\varphi'(0)}{z}-\overline{\varphi(0)}. \tag{10}$$

根据第 51 目中所讲过的,公式(6)和(10)中常数项作为非实质性的项可以舍弃,考虑到公式(7)我们得到问题 I 的解的最终形式

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{z}{4\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta,$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{f(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{4\pi iz}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta-\frac{\varphi'(z)}{z}. \tag{11}$$

对于单位圆的问题 II 完全类似地解,并且代替(11)我们得到公式

$$\varphi(z)=\frac{\mu}{\kappa\pi i}\int_C\frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{c}_1}{\kappa}z,$$

$$\psi(z)=-\frac{\mu}{\pi i}\int_C\frac{\overline{g(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\varphi'(z)}{z}+\frac{c_1}{z}, \tag{12}$$

其中

$$c_1=\frac{\mu}{\pi i(\kappa^2-1)}\left\{\kappa\int_C\frac{g(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta+\int_C\overline{g(\zeta)}d\zeta\right\}. \tag{13}$$

(2) 带有圆孔的平面情形 对这种情形弹性理论的基本问题可类似地解. 首先假设,加到周线上的外应力的主向量,同样在无穷远处的应力都变成 0. 亦即

$$X=Y=0 \text{ 和 } \Gamma=\Gamma'=0. \tag{14}$$

如我们在第 51 目看到的,从这个假设条件推出,函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 在无穷远点处是正则的,我们还要假设 $\varphi(\infty)=0$.

像以前一样我们认为圆周 C 是单位圆,因为在 C 上 $\psi(z)$ 的值是在圆外 $|z|>1$ 解析的函数的极限值,所以按照第 52 目中的公式(23),并考虑到边值条件(1),对于一切 z,$|z|>1$,我们得到关系式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=0,$$

或者根据第 52 目的公式(20)和条件 $\varphi(\infty)=0$,

$$-\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

利用在 $|z|>1$ 时收敛的洛朗展开式 $\varphi(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}$,完全如圆情形中一样,我们得出,最后公式左端的积分等于 0,由此

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \tag{15}$$

现在可以确定 $\varphi(\zeta)$ 的边界值,按照公式(1)求出边界值 $\psi(\zeta)$,并且按照第 52 目中的公式(20),在它们帮助下构造 $|z|>1$ 时 $\psi(z)$ 的值

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}+\psi(\infty).$$

把(1)式中的 $\psi(\zeta)$ 的值代入这里,并使用容易证明的关系式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\varphi(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi'(\zeta)d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}=-\frac{\varphi'(z)}{z},$$

最终我们得到

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(\zeta)}d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\varphi'(z)}{z} \tag{16}$$

(我们舍去了非本质的常数项).

我们转到条件(14)不满足的一般情形.根据第 51 目的公式(20),于是我们有

$$\varphi(z)=\Gamma z-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\operatorname{Ln} z+\varphi_0(z),$$

$$\psi(z)=\Gamma' z+\kappa\frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)}\operatorname{Ln} z+\psi_0(z), \tag{17}$$

其中 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 在 $|z|>1$ 时是单值解析函数,并且可以令 $\varphi_0(\infty)=0$,并认为在无穷远处没有旋转,亦即,Γ 为实常数.把这些表达式代入边值条件(1),我们得出,函数的边界值 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 由完全同样形状的条件联系着,在条件中只是在右端取代函数 $f(\zeta)$ 的是

$$f_0(\zeta)=f(\zeta)-2\Gamma\zeta-\frac{\overline{\Gamma'}}{\zeta}+\frac{X+iY}{2\pi}\operatorname{Ln}\zeta+\frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)}\zeta^2 \tag{18}$$

(我们利用了,在 C 上 $\bar{\zeta}=1/\zeta$ 和 Γ 是一个实常量).我们还要注意到,函数 $f_0(\zeta)$ 在 C 上是单值的,因为在绕行 C 时 $f(\zeta)$ 的增量等于 $X+iY$,它由对数项的增量来补偿.

由此可见,寻求函数 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 化为已经解出过的问题,因此,这些函数可按公式(15)和(16)求出,在这些公式中函数 $f(\zeta)$ 由(18)中的函数 $f_0(\zeta)$ 取代.现在余下的是根据公式(17)求出函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$,亦即问题将在一般情况下解出.

第二基本问题可完全类似地解出.

(3) *半平面情形* 设区域 D 是下半平面. 在这样的情形下, 为了解基本问题我们把定义在 D 上的函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 延拓到上半平面内去. 也就是, 对于在上半平面内的 z, 我们按定义令

$$\varphi(z) = -z\overline{\varphi'(\bar{z})} - \overline{\psi(\bar{z})} + \text{const}, \tag{19}$$

于是

$$\varphi'(z) = -\overline{\varphi'(\bar{z})} - z\overline{\varphi''(\bar{z})} - \overline{\psi'(\bar{z})}. \tag{20}$$

当 z 从 x 轴的右面与从 x 轴的左面(即, 从下半平面与从上半平面)趋近于 x 时的 $\varphi'(z)$ 的极限值, 分别记作 $\varphi'_-(x)$ 与 $\varphi'_+(x)$, 于是便有

$$\varphi'_+(x) = -\overline{\varphi'_-(x)} - x\overline{\varphi''_-(x)} - \overline{\psi'_-(x)}. \tag{21}$$

另一方面, 由第 50 目中的公式(26)我们得到, 在下半平面内

$$Y_y - iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \tag{22}$$

我们看到, 在 x 轴的未受力的那些部分上,

$$Y_y^- - iX_y^- = \varphi'_-(x) + \overline{\varphi'_-(x)} + x\overline{\varphi''_-(x)} + \overline{\psi'_-(x)} = 0,$$

所以关系式(21)便呈

$$\varphi'_+(x) = \varphi'_-(x)$$

的形状. 因此, 把函数 $\varphi'(z)$ 扩展到上半平面内的那个延拓(20), 乃是函数 $\varphi'(z)$ 的经过 x 轴上未受力部分的解析延拓.

函数 $\psi'(z)$ 也可以用那个已经扩展到上半平面内的函数 $\varphi'(z)$ 来表达. 为了要得出这个表达式, 我们在公式(20)中把 z 换成 $\bar{z}$ (于是 z 便在下半平面内的), 然后再把公式的两端都换成复数意义下的共轭量, 于是便得到

$$\psi'(z) = -\varphi'(z) - \overline{\varphi'(\bar{z})} - z\varphi''(z)$$

($\bar{z}$ 在上半平面内). 把这个表达式代入(22)内, 我们便得出应力通过函数 $\varphi(z)$ 来表达的式子

$$Y_y - iX_y = \varphi'(z) - \varphi'(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\varphi''(z)}. \tag{23}$$

类似地, 从第 50 目中的公式(24), 我们可以得出用 $\varphi(z)$ 来表达的位移表达式:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) + \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \text{const}. \tag{24}$$

我们转向讨论边值问题的解. 在第一边值问题中, 在实轴上给定了外应力; 压力

$$P(t) = -Y_y$$

与切线应力

$$T(t) = X_y,$$

假定它们都满足赫尔德条件, 并且在无穷远处都等于 0. 由公式(23), 在式中应该取 $z \to t$ 时的极限值, 便得到对于函数 $\varphi'(z)$ 的边值条件:

$$\varphi'_+(t) - \varphi'_-(t) = P(t) + iT(t). \tag{25}$$

边值问题(25)的解, 根据第 52 目中的索霍茨基公式(15), 可以直接写成柯西型积分的形式:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t) + iT(t)}{t - z}dt. \tag{26}$$

当对 $P(t)$ 与 $T(t)$ 添加某一些补充条件后, 由公式(26)所确定的这个函数 $\varphi'(z)$ 就能在无穷远处满足一些必需的条件, 这些条件(由第 51 目中的公式(22)导出)的形式是

$$\varphi'(z) = -\frac{X + iY}{2\pi}\cdot\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \tag{27}$$

其中 $o\left(\frac{1}{z}\right)$ 是较 $\frac{1}{z}$ 高阶的无穷小. 在这些条件之下, 把所求得的函数 $\varphi'(z)$ 的表达式代入公式

(23)中,我们便可求出应力,从公式(24)可以求出位移(在可以相差一个刚性位移的精度内).

在第二边值问题中,在实轴上给定了位移分量的值:

$$u_- = g_1(t),\ v_- = g_2(t),$$

假定这两个函数的导数 $g'_1(t)$ 与 $g'_2(t)$ 都满足赫尔德条件,并且在无穷远处都等于0.

把等式(24)对于 x 求导数,并就 z 从下半平面趋近 t 时取其极限值.再利用那些已知的位移,我们便得到这问题的边值条件:

$$2\mu[g'_1(t) + ig'_2(t)] = \kappa\varphi'_-(t) + \varphi'_+(t). \tag{28}$$

把在上半平面内等于 $\varphi'(z)$ 而在下半平面内等于 $-\kappa\varphi'(z)$ 的那个函数记作 $\chi(z)$.于是条件(28)便可以写成

$$\chi_+(t) - \chi_-(t) = 2\mu[g'_1(t) + ig'_2(t)]$$

的形状,所以函数 $\chi(z)$ 可以用柯西型积分的形式来求出:

$$\chi(z) = \frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_1(t) + ig'_2(t)}{t - z}dt. \tag{29}$$

知道了 $\chi(z)$ 后,我们便可得到所求的函数 $\varphi'(z)$:

$$\varphi'(z) = \begin{cases} \chi(z), & \text{当 } \mathrm{Im}\, z > 0 \text{ 时}, \\ -\dfrac{1}{\kappa}\chi(z), & \text{当 } \mathrm{Im}\, z < 0 \text{ 时}. \end{cases} \tag{30}$$

(4) 压模问题　设实轴是一个弹性物体的边界,在实轴的一段 $(-l, l)$ 的上面放了一个坚硬的压模,它的底部是水平的直线(图134).我们假定,线段 $(-l, l)$ 上的那些点都与压模接触,并同它牢固地结合着,而且压模只能垂直地上下移动.这问题是弹性理论的混合边值问题:在线段 $(-l, l)$ 上给定了位移

$$u_- + iv_- = g_1(t) + ig_2(t) = \text{const}, \tag{31}$$

而在边界的其余部分上,即,在射线 $(-\infty, -l)$ 与 (l, ∞) 上,则给定了应力

$$X_y = Y_y = 0. \tag{32}$$

把条件(32)代入公式(25)中,我们便看到,在射线 $(-\infty, -l)$ 与 (l, ∞) 上的点处,有关系式

$$\varphi'_+(t) = \varphi'_-(t),$$

亦即,函数 $\varphi'(z)$ 可以经过这两条射线解析地延拓.把条件(31)代入公式(28)中,我们便得到 $\varphi'(z)$ 在割痕 $(-l, l)$ 两沿上的边界值之间的关系式:

$$\kappa\varphi'_-(t) + \varphi'_+(t) = 0,$$

或者

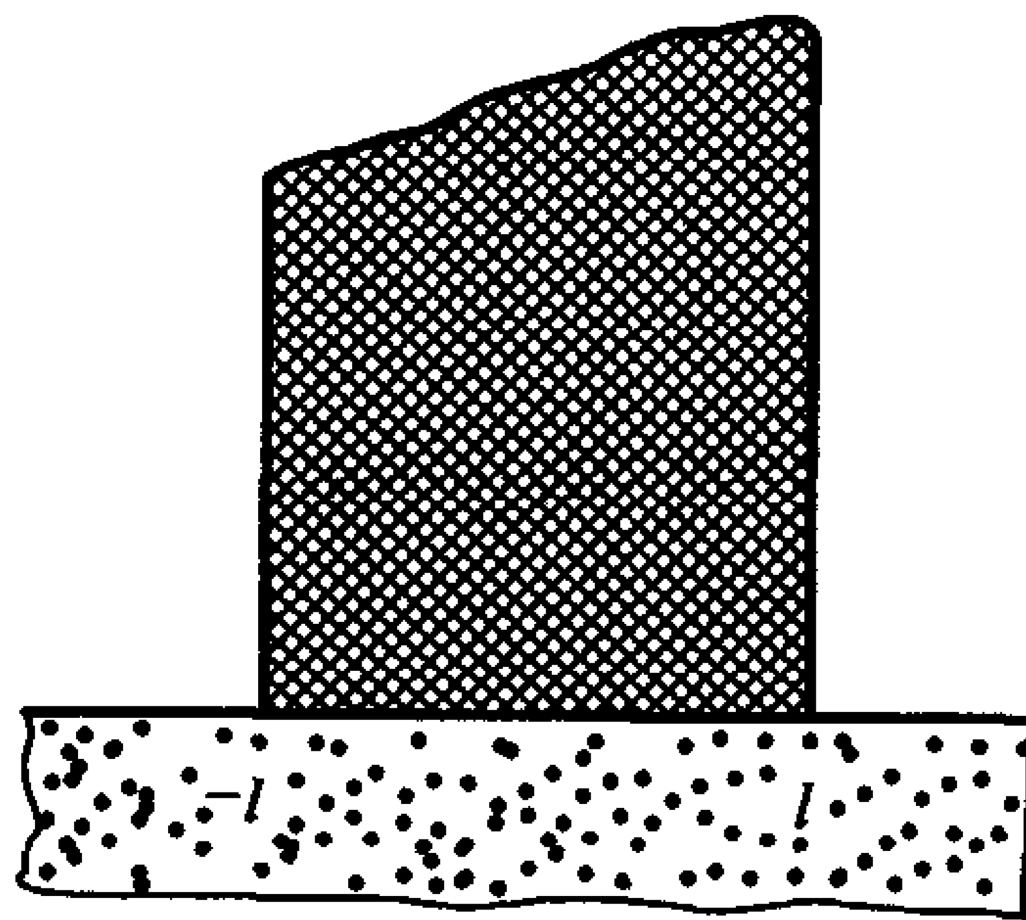


图 134

$$\varphi'_+(t) = -\kappa\varphi'_-(t). \tag{33}$$

因此,为了要确定函数 $\varphi'(z)$,我们便得到了一个希尔伯特-普里瓦洛夫的边值问题,其中的

$$b = 0,\quad a = -\frac{1}{\kappa},$$

而且路线 C 不是封闭的(见第53目末).函数 a 的指示数等于0,所以这问题可以用第53目中的加霍夫公式(4)与(5)来解,这两个公式在这一情形中取的形式是

$$F^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l}\frac{\ln\left(-\frac{1}{\kappa}\right)}{\zeta-z}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}(\ln\kappa+i\pi)\ln\frac{z-l}{z+l},$$

$$\varphi'(z)=Ae^{-F^-(z)}=A\left(\frac{z-l}{z+l}\right)^{\frac{1}{2}-i\beta},$$

其中
$$\beta=\frac{\ln\kappa}{2\pi}.$$

但是,所得出的函数 $\varphi'_-(z)$并不满足在无穷远处的条件——它在无穷远处取有限值 A,而按照条件(27),所求的函数在那里应当有一个一阶零点.因此,我们利用在第 53 目末所提出的注,把所得的这个函数乘以$\frac{1}{z-l}$,于是得到*:

$$\varphi'_-(z)=\frac{A}{z-l}\left(\frac{z-l}{z+l}\right)^{\frac{1}{2}-i\beta}=A\left(\frac{z+l}{z-l}\right)^{i\beta}\frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}}.$$

这个函数在点 $z=\infty$处的留数等于 A(在对于前面所得到的那个表达式中所包含的多值函数的分支,作适当的选择下),所以,顾及到公式(27),我们得出

$$A=-\frac{X+iY}{2\pi},$$

即,常量 A 等于施在压模上的合力.在我们这情形中,

$$X=0,\quad Y=-P_0,$$

于是我们得出函数 $\varphi'_-(z)$的最后的表达式

$$\varphi'_-(z)=\frac{iP_0}{2\pi}\left(\frac{z+l}{z-l}\right)^{i\beta}\frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}}.\tag{34}$$

我们来计算作用于压模下物体上的压力 $P(t)$与切线应力 $T(t)$.根据公式(25)与(33),我们有

$$P(t)+iT(t)=\varphi'_+(t)-\varphi'_-(t)=-(1+\kappa)\varphi'_-(t)$$

把表达式(34)代入这式中,得到

$$P(t)+iT(t)=\frac{P_0}{2\pi}\frac{1+\kappa}{\sqrt{\kappa}}\left(\frac{l+t}{l-t}\right)^{i\beta}\frac{1}{\sqrt{l^2-t^2}}.$$

其中在右端应当取这个函数的当 z 循着上半平面内的点趋于 t 时的极限值**.在经过初等变换之后,我们得出

$$\begin{aligned}P(t)&=\frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-t^2}}\frac{1+k}{\sqrt{\kappa}}\cos\left(\beta\ln\frac{l+t}{l-t}\right),\\T(t)&=\frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-t^2}}\frac{1+\kappa}{\sqrt{\kappa}}\sin\left(\beta\ln\frac{l+t}{l-t}\right).\end{aligned}\tag{35}$$

这些公式是阿勃拉莫夫所获得的(见 Н. И. Мусхелишвили[10]).

---

* 选取乘数$\frac{1}{z-l}$,是为了使所得的函数仅在线段$(-l,l)$的端点处才有奇点.

** 这时在分母中便出现了因式 $e^{\pi\beta}=\sqrt{\kappa}$(参看前面所规定的常量 β 的定义).

第四章　共形映射的变分原理

这一章是用来讲共形映射的“动力学”的. 其中陈述了一些定性的与定量的命题，凭借这些命题，使我们能够判断：当被映射区域的边界改变时，映射要怎样改变. 这种命题在实用上特别值得注意，因为它们给出了从一个已知结构换成一个相近的结构时的简单计算方法. 我们假定，在计算一个已经设计好的结构时，发现某一些量超出了所许可的范围. 于是，自然发生了如下的问题：应当把这结构在哪里加以改变？改变多少？在某些情形中，这问题的答案可以基于这里所说的变分原理而获得.

在本章末，给出了把变分原理应用到具体的实际问题上去的一些例子.

§1　基本变分原理

设在 z 平面内给定了两个单连通区域 D 与 $\tilde{D}$，它们分别由曲线 C 与 $\tilde{C}$ 所围成，并设 $w=f(z)$ 与 $w=\tilde{f}(z)$ 分别是实施把 D 与 $\tilde{D}$ 共形映射到一个典型区域(圆，半平面，带形)的函数，并且这两个函数是同样地规范的. 我们刚才所说的那个问题，在数学上可以以如下方式提出：

设映射 $w=f(z)$ 是已知的，周线 $\tilde{C}$ 与 C 很接近，求当从区域 D 换到区域 $\tilde{D}$ 时，增量

$$\tilde{f}(z)-f(z)=\delta f+r(f,\tilde{f})$$

的主要部分 δf.

与这个问题的解有关的结果有两类——定性定理和带有余项 $r(f,\tilde{f})$ 估计的 δf 的近似计算方法. 我们从一些定性的原理来开始.

60. 基本变分原理 我们先来规定一些记号. 由曲线 C 所围成的区域,我们记作 $D(C)$. 实施把 $D(C)$ 共形地映射到单位圆上去、并且使区域内的一个确定的点 z_0 在这映射下变换成坐标原点的那个函数,我们记作

$$w=f(z,C);f(z_0,C)=0. \tag{1}$$

满足所述条件的函数可以有无限多个,但是它们都仅仅彼此相差一个形如 $e^{i\vartheta}$ 的因子,ϑ 是一个实数. 记号 $f(z,C)$ 我们理解为是这些函数中的任何一个,但在量 ϑ 是很重要的那些问题中,我们将用补充条件来确定它. 在映射(1)下变换成圆周 $|w|=\rho<1$ 的那些闭曲线,我们用 C_ρ 来表示,称它为等高线.

用一条周线 $\tilde{C}$ 来代替周线 C,称作周线 C 的*形变*. 我们假定区域 $D(C)$ 与 $D(\tilde{C})$ 都是对于点 z_0 的*星形区域*,即,假定它们的边界 C 与 $\tilde{C}$,在以 z_0 为极点的极坐标系内,可以借助单值函数 $r(\varphi)$ 与 $\tilde{r}(\varphi)$ 用方程 $r=r(\varphi)$ 与 $r=\tilde{r}(\varphi)$ 来表示. 在周线 C 上,使这两个函数的比 $\dfrac{\tilde{r}(\varphi)}{r(\varphi)}$ 达到最大值的那个点 $z_2=z_0+r_2e^{i\varphi_2}$,及其在周线 $\tilde{C}$ 上的对应点 $\tilde{z}_2=z_0+\tilde{r}_2e^{i\varphi_2}$,我们称做**最大形变点**,数 $\lambda=\dfrac{\tilde{r}_2}{r_2}$ 称为周线的**最大形变**.

基本定性变分原理,所谓**林德勒夫(Lindelöf)原理**,是说:如果仅限于考虑把包含固定点 z_0(在每一个这样的映射下,点 $w=0$ 的原像)的区域映到单位圆上去的那些映射的话,那么,当把区域的边界向内压缩时:1) 所有的等高线都压缩;2) 在点 z_0 处的延伸系数增大;3) 在边界上保持不动的那些点处的延伸系数(因而,特别是,边界的未经形变部分的像的长度)减小;4) 在最大形变点处的延伸系数增大到 $\dfrac{1}{\lambda}$ 倍以上.

换句话说,下述定理成立:

定理 1 *如果区域 $D(\tilde{C})$ 包含在 $D(C)$ 内,那么:*

1) 对于任何一个 ρ $(0<\rho<1)$,区域 $D(\tilde{C}_\rho)$ 都包含在 $D(C_\rho)$ 内,并且只有当 $\tilde{C}$ 与 C 相合时,$\tilde{C}_\rho$ 与 C_ρ 方能相接触;

2) 在点 z_0 处有

$$|f'(z_0,\tilde{C})|\geqslant|f'(z_0,C)|, \tag{2}$$

其中的等号只有当 $\tilde{C}$ 与 C 重合时方能成立;

3) 如果周线 $\tilde{C}$ 与 C 有公共点 z_1,那么在这个点处必有

$$|f'(z_1,\tilde{C})|\leqslant|f'(z_1,C)|, \tag{3}$$

其中的等号只有当 $\tilde{C}$ 与 C 重合时方能成立;

4) 如果这两个区域对于 z_0 都是星形的,那么在最大形变点处有

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C})|\geqslant\frac{1}{\lambda}|f'(z_2,C)|, \tag{4}$$

其中 $\lambda<1$ 是周线的最大形变.

我们引用原理的直接几何证明,这证明清楚地表明它的本质,并且能够获得量的

估计,为此,我们注意,只要就周线 $\tilde{C}$ 与 C 仅在一小段 (a,b) 上不同的情形来证明这定理便够了,在这一小段上 $\tilde{C}$ 是一段圆周弧,其曲率同曲线 C 在 (a,b) 上的曲率很接近,于是 $D(\tilde{C})$ 是从 $D(C)$ 中割去一块小面积 σ 而得到的(图 135).事实上,C 的任何一个变形,都可以由继续施行这种简单的变形而得到,所以,如果对于这种情形,定理已经证明,那么对于一般的情形这定理也将被证明.

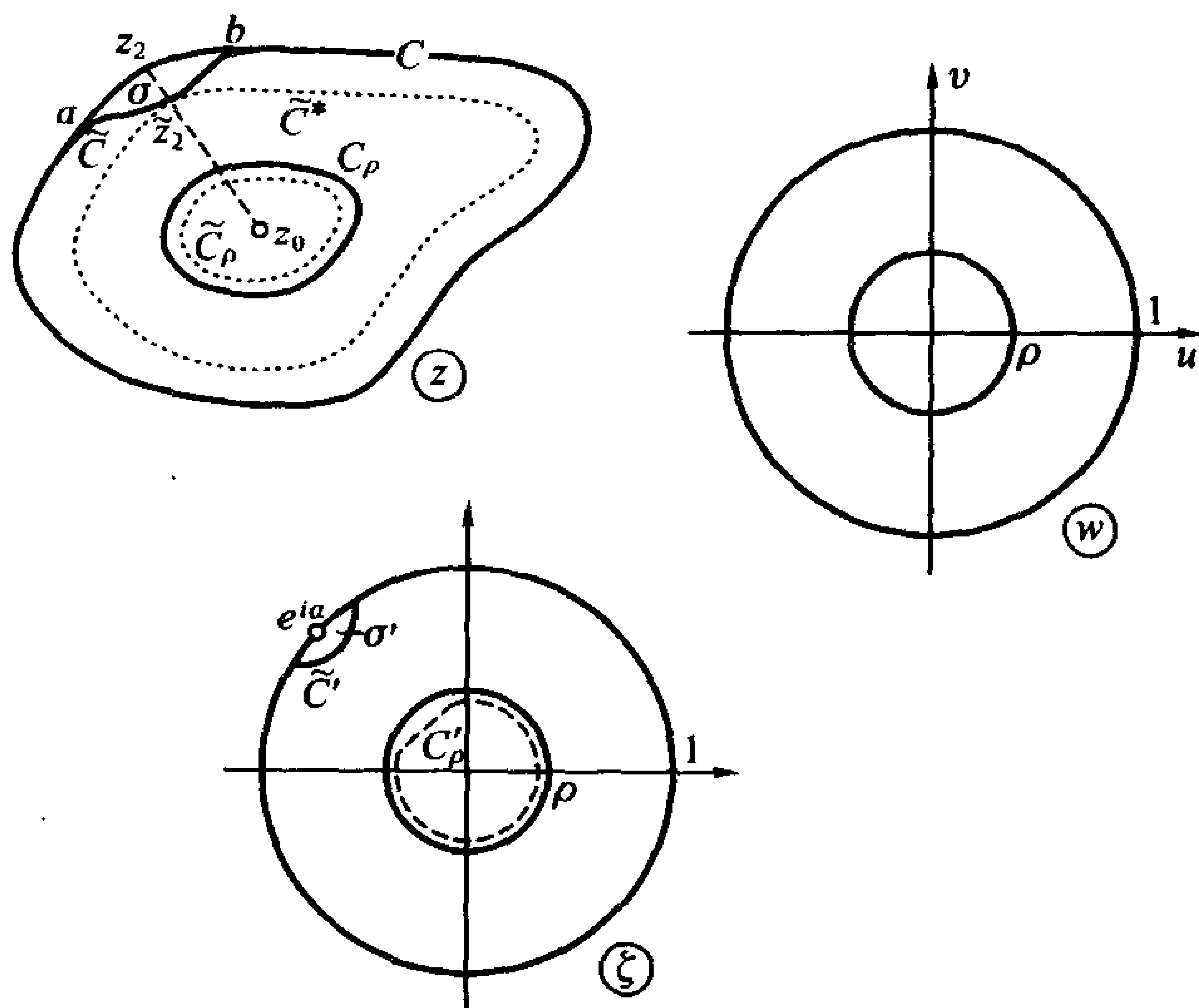


图 135

现在我们引进一个辅助的 ζ 平面,并且用一个共形映射把区域 $D(C)$ 映到单位圆 $|\zeta|<1$ 上:

$$\zeta=f(z,C),\quad f(z_0,C)=0.$$

设这时 $\tilde{C}$ 被变换成曲线 $\tilde{C}'$,包含在 $\tilde{C}'$ 与圆周 $|\zeta|=1$ 之间的那块面积等于 σ'(图 135).我们用一个共形映射把区域 $D(\tilde{C}')$ 映成 w 平面中的单位圆:

$$w=g(\zeta),\quad g(0)=0.$$

因为在不计高阶无穷小的精度内,可以把面积 σ' 看作是圆月牙形*,所以可以把第 34 目中的映射(9)来作为 g:

$$w=g(\zeta)=\zeta\left\{1+\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1+\zeta e^{-i\alpha}}{1-\zeta e^{-i\alpha}}\right\},\tag{5}$$

---

* 当周线 C 的曲率 k 作为此周线的弧长 s 的函数满足赫尔德条件

$$|k(s+h)-k(s)|<A|h|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1$$

时,这个结论可以建立根据的.为了建立根据还要利用映射 $w=f(z)$ 的一系列边界性质.下面我们引入不利用 $f(z)$ 的边界性质的原理的证明.

其中 α 是面积 σ' 中某一个点的辐角. 我们来求 g 的逆映射. 为了这个目的, 我们把(5)式改写成

$$\zeta \approx w\left\{1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1+\zeta e^{-i\alpha}}{1-\zeta e^{-i\alpha}}\right\}$$

的形状(我们利用了下述事实: 在不计高阶无穷小的精度内, 当 η 很小时, $\frac{1}{1+\eta}\approx 1-\eta$). 因为 w 与 ζ 相差一个与 σ' 同阶的无穷小量, 所以可以在含有因子 σ' 的项内用 w 来代替 ζ, 而不改变我们的精确度. 因此

$$\zeta \approx w\left\{1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1+we^{-i\alpha}}{1-we^{-i\alpha}}\right\}. \tag{6}$$

我们把 ζ 平面中在映射 $w=g(\zeta)$ 下与圆周 $|w|=\rho$ 相对应的那条曲线记作 C'_ρ. 为了要得出 C'_ρ 的参数方程, 我们令 $\zeta=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\theta}$, 求表达式(6)的对数,

$$\ln\frac{\zeta}{w}=\ln\frac{r}{\rho}+i(\varphi-\theta)\approx-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1+\rho e^{i(\theta-\alpha)}}{1-\rho e^{i(\theta-\alpha)}},$$

然后把实数部分与虚数部分分开:

$$\left.\begin{aligned} r&\approx\rho\left(1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}\right),\\ \varphi&\approx\theta-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{2\rho\sin(\theta-\alpha)}{1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

由这两个方程中, 可以得出所要证明的定理中的全部结论. 显然, 我们有

$$w=f(z,\tilde{C})=g[f(z,C)]. \tag{8}$$

所以, 在映射 $\zeta=f(z,C)$ 下区域 $D(\tilde{C}_\rho)$ 变换成 $D(C'_\rho)$. 因为在此时区域 $D(C_\rho)$ 变换成圆 $|\zeta|<\rho$, 所以要证明定理的第一部分, 只要证明 $D(C'_\rho)$ 包含在圆 $|\zeta|<\rho$ 内就够了. 可是因为

$$1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2\leqslant(1+\rho)^2,$$

所以根据(7)式, 对于周线 C'_ρ 上所有的点来说都有

$$|\zeta|=r\leqslant\rho\left(1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)<\rho. \tag{9}$$

这样, 定理中的第一个结论已经完全证明.

把不等式(9)除以 ρ, 并令 ρ 趋于 0, 我们得到极限

$$\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|_{w=0}\leqslant 1-\frac{\sigma'}{2\pi}<1.$$

但是这样我们就有 $|g'(0)|>1$, 所以根据(8)式

$$|f'(z_0,\tilde{C})|=|g'(0)|\cdot|f'(z_0,C)|>|f'(z_0,C)|,$$

这便证明了第二个结论.

现在设点 $\zeta=re^{i\varphi}$ 沿着圆周 $|\zeta|=1$ 的半径趋近于这圆周上的一个点 $e^{i\varphi}$，并设 $e^{i\varphi}$ 位于 σ' 的外面. 于是，由于映射是共形的，其对应点 $w=\rho e^{i\theta}$ 也沿着与圆周 $|w|=1$ 的半径相切的方向趋近于点 $e^{i\theta}$，所以我们有：

$$|\Delta\zeta|=|\zeta-e^{i\varphi}|=1-r,$$

$$|\Delta w|=|w-e^{i\theta}|\approx 1-\rho.$$

但是由不等式(9)推出

$$\frac{1-\rho}{1-r}\leqslant\frac{1-\rho}{1-\rho+\dfrac{\sigma'\rho}{2\pi}\dfrac{1-\rho}{1+\rho}}\approx 1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{\rho}{1+\rho},$$

在这式子中取当 $r\to 1$ 时的极限，我们便得到：

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=e^{i\varphi}}=\lim_{r\to 1}\frac{1-\rho}{1-r}\leqslant 1-\frac{\sigma'}{4\pi}.$$

由此就得出了定理中的结论 3).

要证明定理的最后那个结论，我们用 $\tilde{C}^*$ 来记由 C 经过相似变换 $\zeta=z_0+\lambda(z-z_0)$ 所得的那条周线(图 135). 显然，函数

$$w=f(\zeta,\tilde{C}^*)=f\left(z_0+\frac{\zeta-z_0}{\lambda},C\right)\tag{10}$$

实施一个把区域 $D(\tilde{C}^*)$ 映成单位圆的共形映射. 可是 $D(\tilde{C}^*)$ 包含在区域 $D(\tilde{C})$ 内，并且点 $\tilde{z}_2$ 既属于 $\tilde{C}$，也属于 $\tilde{C}^*$，所以根据这定理的结论 3) 有

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}^*)|<|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C})|.$$

但因为由(10)有

$$f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}^*)=\frac{1}{\lambda}f'(z_2,C),$$

所以

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C})|\geqslant\frac{1}{\lambda}|f'(z_2,C)|,$$

于是定理便完全证明了.

下面的所谓蒙泰尔(Montel)原理，是刚才所证明的那个定理的一个简单推论：

定理 2 *设区域 $D(C)$ 与 $D(\tilde{C})$ 都包含点 z_0，并且*

$$C=C_1+C_2,\quad \tilde{C}=\tilde{C}_1+\tilde{C}_2,$$

其中 $\tilde{C}_1$ 位于 $D(C)$ 内，$\tilde{C}_2$ 在 $D(C)$ 外，C_2 在 $D(\tilde{C})$ 内，C_1 在 $D(\tilde{C})$ 外(见图 136). 此外，并设在映射

$$w=f(z,C),\quad w=f(z,\tilde{C})$$

下,弧 C_1 与 $\tilde{C}_1$ 分别变换成弧 ϑ_1 与 $\tilde{\vartheta}_1$,那么在这两段弧的长度之间便有关系式*

$$\tilde{\vartheta}_1 \geqslant \vartheta_1 \tag{11}$$

联系着,其中的等号只有在 C 与 $\tilde{C}$ 重合时方能成立.

为了要证明这定理,我们引入由曲线 $C' = \tilde{C}_1 + C_2$ 所围成的辅助区域 $D(C')$,并把 C_2 在映射 $w = f(z, C')$ 下的像记作 ϑ'. 因为 $D(C')$ 包含在 $D(\tilde{C})$ 内,并且弧 $\tilde{C}_1$ 同时属于 C' 与 $\tilde{C}$,所以根据林德勒夫原理的第三个结论,在 $\tilde{C}_1$ 上的每一个点处都有

$$|f'(z, \tilde{C})| \geqslant |f'(z, C')|.$$

因此,考虑到导数的模的几何意义,我们有

$$\tilde{\vartheta}_1 \geqslant 2\pi - \vartheta'. \tag{12}$$

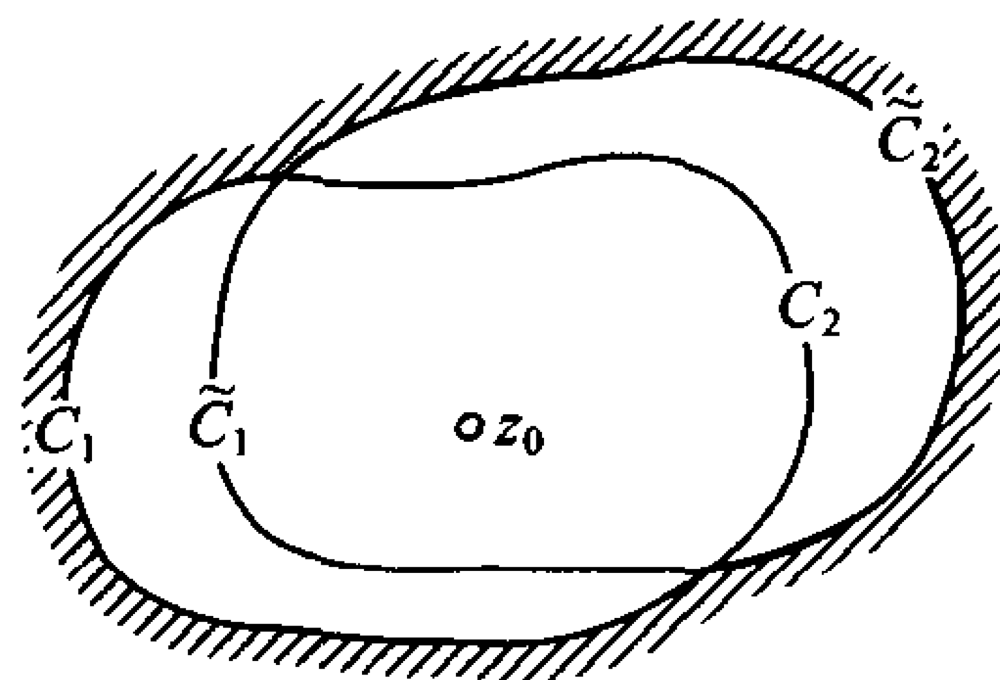


图 136

另一方面,$D(C')$ 位于区域 $D(C)$ 的内部,而弧 C_2 同时属于曲线 C' 与 C,所以基于同一理由有

$$\vartheta' \leqslant 2\pi - \vartheta_1. \tag{13}$$

把不等式(12)与(13)联合起来,我们便得出所求的不等式(11).

结束时我们指出,所证明了的蒙泰尔与林德勒夫变分原理也可以根据施瓦茨引理得到. 事实上,这些原理从如下结论推出,这结论是,函数 $w = g(\zeta)$ 的反函数 $\zeta = h(w)$ 把圆 $|w| < \rho$ 变换到属于区域 $D(C'_\rho)$ 的圆 $|\zeta| < \rho$(我们遵循在定理 1 的证明中所引入的记号). 但是由于函数 $\zeta = h(w)$, $h(0) = 0$ 把圆 $|w| < 1$ 映射到属于圆 $|\zeta| < 1$ 的区域 $D(C')$ 上,所以根据施瓦茨引理,对任何 w, $|w| < 1$,我们有 $|h(w)| < |w|$. 由此也推得结论是,在任何 ρ 下区域 $D(C'_\rho)$ 属于圆 $|\zeta| < \rho$.

这些原理也可以直接从调和函数的极大值原理(第 42 目)中得到. 这种方法在把变分原理推广到比共形映射更一般的,特别是,拟共形映射时有特殊意义(第 56 目),对拟共形映射极大值原理仍然正确.

方法的实质是这样的. 设 $w = f(z)$, $f(z_0) = 0$ 和 $w = \tilde{f}(z)$, $\tilde{f}(z_0) = 0$ 是分别实施把区域 $D(C)$ 和 $D(\tilde{C})$ 映射到单位圆的共形映射. 函数 $P(x, y) = \ln|f(z)|$ 除点 $z = z_0$ 外在区域 $D(C)$ 内是处处调和的,并且 $P(x, y) - \ln|z - z_0|$ 在这区域内是正则的. 因为在 C 上 $|f(z)| = 1$,所以 $P(x, y)$ 在 C 上变为 0. 沿着曲线 C_ρ

$$P(x, y) = \ln \rho, \tag{14}$$

所以可以把(14)看作 C_ρ 的方程.

需要证明,在周线 C 形变到区域 $D(C)$ 内部时,对于任何 ρ, $0 < \rho < 1$,区域 $D(\tilde{C}_\rho)$ 包含在 $D(C_\rho)$ 内. 但是在 $D(C)$ 内按极大值原理处处有 $P(x, y) < 0$,而由于

* 我们用同一字母来表示弧的本身与弧的长度.

在 $\tilde{C}$ 的不与 C 重合的部分上，$\tilde{P}(x,y)=\ln|\tilde{f}(z)|=0$，但是在 C 和 $\tilde{C}$ 的公共部分上这两个函数等于 0，所以在 $D(\tilde{C})$ 内处处有

$$P(x,y)<\tilde{P}(x,y).$$

根据方程(14)和曲线 $\tilde{C}_\rho$ 的类似方程可以断定，在任何 ρ，$0<\rho<1$ 时，$D(\tilde{C}_\rho)$ 包含在 $D(C_\rho)$ 内.

61.原理的推广 在上一目中所证明的那个基本变分原理，也可以推广到那些把区域共形地映射成其他类型典范区域的函数上去.

(1) 圆的外部 我们把在封闭周线 C 外部的那个区域记作 $\Delta(C)$，设函数

$$w=F(z,C),\quad F(\infty,C)=\infty \tag{1}$$

是实施把区域 $\Delta(C)$ 映射到单位圆的外部 $|w|>1$ 上的共形映射. 沿用在上一目中所采用的那些记号，我们可以建立下述定理：

定理 1 如果区域 $\Delta(\tilde{C})$ 包含在区域 $\Delta(C)$ 内，那么

1) 对于任何一个 $\rho>1$，区域 $\Delta(\tilde{C}_\rho)$ 都包含在区域 $\Delta(C_\rho)$ 内；对于无论怎样的一个 ρ，都只有在 $\tilde{C}$ 与 C 重合时，周线 $\tilde{C}_\rho$ 与 C_ρ 方能相接触；

2) 在无穷远点处有

$$|F'(\infty,\tilde{C})|\geqslant|F'(\infty,C)|; \tag{2}$$

3) 在周线 $\tilde{C}$ 与 C 的公共点 z_1 处有

$$|F'(z_1,\tilde{C})|\leqslant|F'(z_1,C)|; \tag{3}$$

4) 如果周线 $\tilde{C}$ 与 C 对于点 $z=0$ 都是星形的，那么在最大形变点 z_2 与 $\tilde{z}_2$ 处有

$$|F'(\tilde{z}_2,\tilde{C})|\geqslant\frac{1}{\lambda}|F'(z_2,C)|, \tag{4}$$

等号只有在 $\tilde{C}$ 与 C 重合时方能成立.

这定理的证明，可以照上一目中所证明的那个定理同样地来进行，不过要用把弃掉月牙形的单位圆外部映射到圆的外部的映射来代替(5). 证明这定理的最简单的方法，是利用变量变换

$$z-z_0=\frac{1}{\zeta},\ w=\frac{1}{\omega},$$

把它化成上一目中已证明的那个定理.

(2) 半平面的情形 设曲线 C 通过无穷远点，并且在无穷远点处具有切线与有限曲率*，于是，当 R 足够大时，圆周 $|z|=R$ 与 C 相交于两个点，并且可以使这两个点的辐角的差与 π 任意接近.

我们还假定，正向半虚轴上的足够远的部分不与 C 相交，并把以 C 为边界的包含了这部分虚轴的那一个区域记作 $D(C)$. 我们规定用

---

* 这便是说，由 C 经变换 $\zeta=\frac{1}{z}$ 而得到的那条曲线 C^*，在点 $\zeta=0$ 处具有切线与有限曲率.

$$w=f(z,C),\quad f(\infty,C)=\infty,\quad |f'(\infty,C)|=1 \tag{5}$$

来记实施把区域 $D(C)$映成上半个平面 $v>0$ 的共形映射的那个函数. 根据存在定理,在这些加给曲线 C 的条件之下,函数 f 存在,并且在可以相差一个实数常数项的精度内被确定. 由于在以后这个相差的常数项并不起什么作用,所以我们可以把 f 理解为这些函数中的任何一个. 最后,设 C_v 与 $\tilde{C}_v$ 分别是在映射 $w=f(z,C)$与映射 $w=f(z,\tilde{C})$下被变换成直线 $v=\text{const}$ 的那两条曲线(图 137). 在这些记号之下,我们有下述定理:

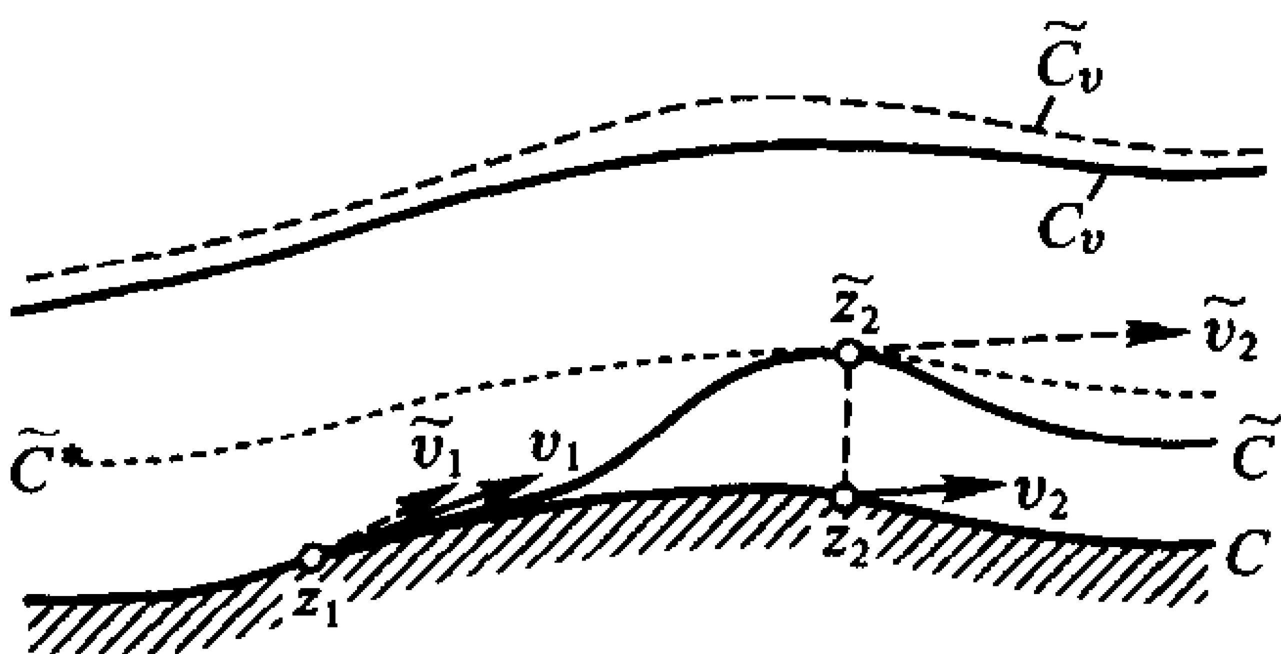


图 137

定理 2 设曲线 $\tilde{C}$ 通过点∞,并且在无穷远处与 C 有共同的切线. 此外如果区域 $D(\tilde{C})$还包含在区域 $D(C)$内,那么

1) 对于任何一个 $v>0$,区域 $D(\tilde{C}_v)$都包含在区域 $D(C_v)$内,并且只有当 $\tilde{C}$ 与 C 重合时,$\tilde{C}_v$与 C_v方能相接触;

2) 如果 C 与 $\tilde{C}$ 有一个公共的正则点 z_1,那么在这个点处便有

$$|f'(z_1,\tilde{C})|\leqslant|f'(z_1,C)|, \tag{6}$$

并且等号只有在 C 与 $\tilde{C}$ 重合时才达到;

3) 如果曲线 C 与 $\tilde{C}$ 由单值函数 $y=y(x)$, $y=\tilde{y}(x)$给出,而 z_2与 $\tilde{z}_2$分别是这两条曲线上使得差 $\tilde{y}(x)-y(x)$达到最大值的那两个点,那么便有

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C})|\geqslant|f'(z_2,C)|, \tag{7}$$

并且等号只有当 $\tilde{C}$ 由 C 作一平行 y 轴的平移而得到时方能成立.

根据在上一目中所举过的理由,我们只需要考虑当 C 与 x 轴重合,$\tilde{C}$ 与 C 仅在无限小的一段$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$上不同,在这段上 $\tilde{C}$ 是一段曲率很小的圆弧时的情形便够了. 可是在这情形下 $f(z,C)\equiv z$,根据第 34 目中的公式(7),在不计高阶无穷小的精度内,

$$f(z,\tilde{C})\approx z+\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{z-a}. \tag{8}$$

它的反函数可以照在上一目中那样来求得,并且其形状是

$$z\approx w-\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{w-a}.$$

在其中令 $w=u+iv$,并把实数部分与虚数部分分开,在固定了 v 时我们便得出曲线 $\tilde{C}_v$的参数方程

$$x\approx u-\frac{\sigma}{\pi}\frac{u-a}{(u-a)^2+v^2},\quad y\approx v+\frac{\sigma}{\pi}\frac{v}{(u-a)^2+v^2}. \tag{9}$$

从参数方程(9)的第二个方程中可以看出,$\tilde{C}_v$位于区域$y>v$ 内,即,位于区域$D(C_v)$内——这便证明了定理中的第一个结论.

要证明结论 2)，我们在 x 轴上取距离 a 较 σ 为远的任何一个点 x，并在这个点处求函数(8)的导数，我们有

$$f'(x,\tilde{C})\approx 1-\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{(x-a)^2}<1,$$

这便是所需要证明的.

要证明结论 3)，我们把 C 按向量 $\tilde{z}_2-z_2$（向上）作平行平移后所得到的那条曲线，记作 $\tilde{C}^*$. 显然，我们有

$$f(z,\tilde{C}^*)=f(z-\tilde{z}_2+z_2,C),$$

因此

$$f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}^*)=f'(z_2,C).$$

另一方面，$D(\tilde{C}^*)$ 属于区域 $D(\tilde{C})$，并且 $\tilde{z}_2$ 是 $\tilde{C}$ 与 $\tilde{C}^*$ 的公共点，所以，根据已经证明的结论 2)，

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}^*)|\leqslant|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C})|.$$

比较最后两个关系式，我们便得出所求的不等式(7). 于是定理就完全证明了.

所证明的这个定理可以有简单的流体力学上的解释. 设有一个很深的具有平面的垂直侧壁的渠道，沿着这渠道流动着理想的、不可压缩的液体，它的底部的截面的形状为曲线 C. 那么，

如果在渠道的某一处底部升高了，那么流的所有流线也便都升高，而且在底部的没有经过形变的点处，流速减小，而在最大形变的点上流速增大(见图 137).

(3) 带形的情形　设 C_0 与 C 是两段弧，除了它们的端点 a_1 与 a_2 之外，没有公共点. 这时我们并不把这两个点 a 中有一个点或两个点与无穷远点 $z=\infty$ 重合的情形除外. 用 $D(C_0,C)$ 来记由曲线 C_0 与 C 所围成的那个区域，并用

$$w=f(z,C_0,C);\quad f(a_1,C_0,C)=-\infty,\quad f(a_2,C_0,C)=\infty \tag{10}$$

来表示实施把区域 $D(C_0,C)$ 共形映射到带形 $0<v<1$ 上去的那个函数. 函数 $f(z,C_0,C)$ 在可以相差一个实常数项的精度内被决定，这常数项暂时我们还不感兴趣. 我们把在映射(10)下变换成直线

$$v=\text{const}\quad(0<v<1)$$

的曲线记作 C_v.

我们还假定，曲线 C_0 与 C 可以借助单值函数 $y=y_0(x)$，$y=y(x)$ 来给出，并且 $|y'_0(x)|$ 与 $|y'(x)|$ 都不超过一个正的常数 m. 我们来考虑平行直线束 $y=kx+b$，其中 $|k|<\dfrac{1}{m}$，这个直线束中的每一条直线，同 C_0 与 C 的交点都不多于一个. 周线 C_0 上使得这直线束的包含在 C_0 与 $\tilde{C}_0$ 之间的直线段达到最大值的那个点 z_2，以及其在曲线 $\tilde{C}_0$ 上的对应点 $\tilde{z}_2$，我们称为(方向 k 的)**最大形变点**.

有下述定理成立：

定理 3　*如果区域 $D(\tilde{C}_0,C)$ 包含在区域 $D(C_0,C)$ 内，那么*

1) 对于任何一个 v $(0<v<1)$，区域 $D(\tilde{C}_v,C)$ 总包含在区域 $D(C_v,C)$ 内，并且只有当 $\tilde{C}_0$ 与 C_0 重合时，曲线 $\tilde{C}_v$ 与 C_v 才有可能相接触；

2) 如果曲线 $\tilde{C}_0$ 与 C_0 有公共点 z_1，那么在这个点处有

$$|f'(z_1,\tilde{C}_0,C)|\leqslant|f'(z_1,C_0,C)|; \tag{11}$$

3) 在曲线 C 的任何一个点 z 处，有

$$|f'(z,\tilde{C}_0,C)|\geqslant|f'(z,C_0,C)|; \tag{12}$$

4) 在最大形变点处有

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}_0,C)|\geqslant|f'(z_2,C_0,C)|. \tag{13}$$

在(11)—(13)中的等号，只有在曲线 $\tilde{C}_0$ 与 C_0 重合时方能成立.

同在前面弄清楚的那些情形中一样，这定理的证明可以在下述假定下来进行：$D(C_0,C)$ 是单位带形 $0<y<1$ (即，C_0 是 x 轴，C 是直线 $y=1$)，$\tilde{C}_0$ 处处与 C_0 重合，仅在很小的一段 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 处除外，在这一段上 $\tilde{C}_0$ 是一段曲率很小的圆弧. 在这样的假定之下，根据第 34 目中的公式(13)，函数 $f(z,\tilde{C}_0,C)$ 的形状是

$$w=f(z,\tilde{C}_0,C)\approx z+\frac{\sigma}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi(z-a)}{2}, \tag{14}$$

其中 σ 是去掉了的那块月牙形的面积. 定理的结论 1) 可以照先前那两个定理中那样地来验证，所以对于它的验证我们就不讨论了. 要证明结论 2) 与 3)，我们来考虑函数(14)的导数. 在 x 轴上我们有

$$f'(x,\tilde{C}_0,C)\approx 1-\frac{\pi\sigma}{4}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi(x-a)}{2}}<1,$$

由此便得出不等式(11). 在直线 $y=1$ 上我们有

$$f'(x+i,\tilde{C}_0,C)\approx 1+\frac{\pi\sigma}{4}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi(x-a)}{2}}>1,$$

由此便得出不等式(12)(在演算过程中我们曾利用了 $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{2}+z\right)=i\operatorname{ch} z$ 这关系式).

为了要证明结论 4)，我们把 C_0 与 C 平移一个向量 $\tilde{z}_2-z_2$ 后所得到的那两条曲线记作 $\tilde{C}_0^*$ 与 $\tilde{C}^*$. 显然，函数

$$w=f(z,\tilde{C}_0^*,\tilde{C}^*)=f(z+z_2-\tilde{z}_2,C_0,C) \tag{15}$$

实施把区域 $D(\tilde{C}_0^*,\tilde{C}^*)$ 映射到带形 $0<v<1$ 上. 因为 $D(C_0,C)$ 包含区域 $D(\tilde{C}_0^*,C)$，并且 $\tilde{C}_0^*$ 与 $\tilde{C}_0$ 有公共点 $\tilde{z}_2$，所以按照(11)，

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}_0^*,C)|\leqslant|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}_0,C)|. \tag{16}$$

另一方面，因为 $D(\tilde{C}_0^*,C)$ 包含在 $D(\tilde{C}_0^*,\tilde{C}^*)$ 内，所以按照(12)式，在那条不经形变的边界 $\tilde{C}_0^*$ 上的任何一个点处，特别是，在点 $\tilde{z}_2$ 处，有

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}_0^*,\tilde{C}^*)|\leqslant|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}_0^*,C)|. \tag{17}$$

把不等式(16)与(17)联合起来,我们便得出

$$|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}_0^*,\tilde{C}^*)|\leqslant|f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}_0,C)|,$$

但是,由(15)我们有

$$f'(\tilde{z}_2,\tilde{C}_0^*,\tilde{C}^*)=f'(z_2,C_0,C),$$

因此不等式(13)便已证明.于是定理3也就完全证明了.

对定理3也可以作流体力学上的解释.设一个具有水平底部的渠道,其侧壁的形状是母线与底部垂直的柱面,并且在渠道中流动着具有固定流量的理想不压缩液体,那么,见图138,当把一面侧壁向内压进时,所有的流线都向对面的侧壁靠近,在第一侧壁的未经形变部分处的流速减小,而在最大形变点处的流速,以及在第二侧壁所有的点处的流速,则都增大.

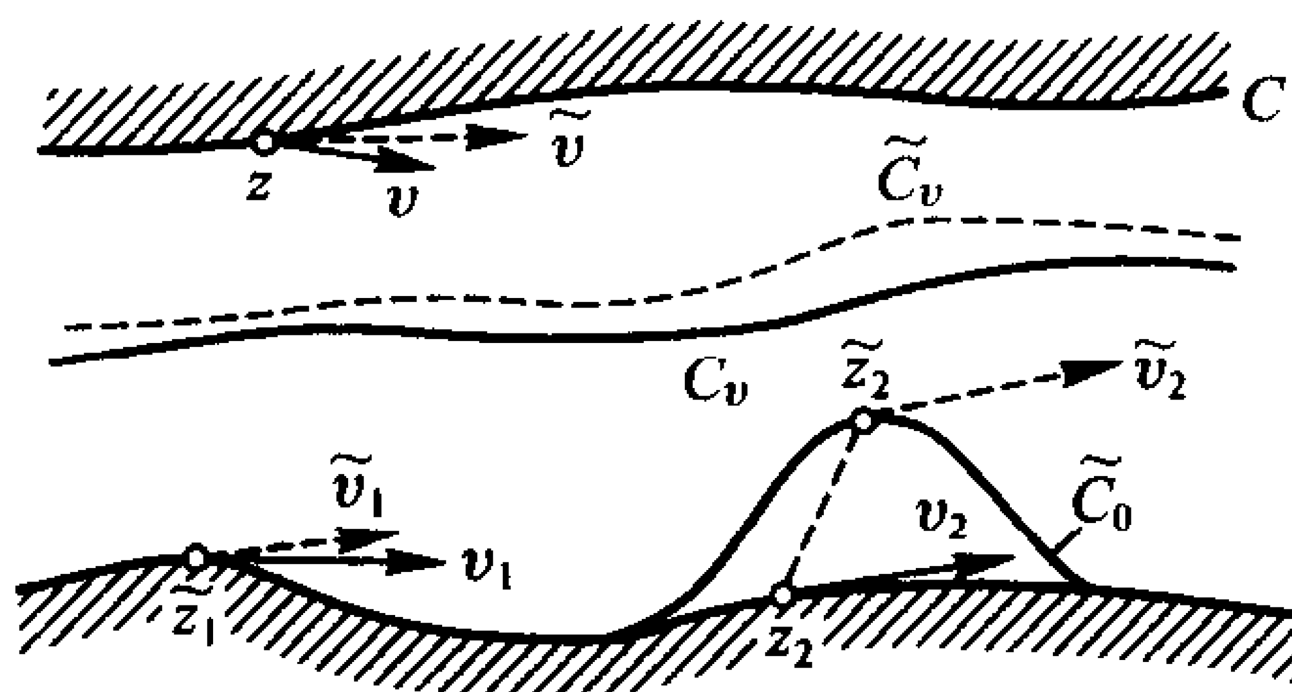


图138

62.边界导数 前面所建立的那些变分原理,使我们可以作各种数量上的精确化.在转向它们之前,我们指出这些原理对于边界导数的估值上的一个简单应用.现在我们回到把一个单连通区域$D(C)$映到单位圆$|w|<1$上、而把其某一个固定点z_0变换成圆心$w=0$的映射情形.

设z_1是C上的任意一个正则点,经过点z_1,作两条与C在点z_1处相切的闭周线C_1与C_2,使得区域$D(C_1)$包含在区域$D(C)$内并且含有点z_0,而区域$D(C_2)$则包含区域$D(C)$.根据第60目中的定理1,我们有

$$|f'(z_1,C_1)|<|f'(z_1,C)|<|f'(z_1,C_2)|. \tag{1}$$

如果取两个可用已知的函数映成单位圆的区域来作为$D(C_1)$与$D(C_2)$,那么所得的不等式(1)就给出了对于$|f'(z,C)|$的自上与自下的具体数值估计.

我们应用这个一般性的考虑,来估计当曲线C与单位圆周很接近时$|f'(z,C)|$的值.

定理1 设曲线C满足下列条件:

1) C属于环形$1-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon$;

2) 在C上与圆周$|z|=1$上辐角相同的点处,C的切线与圆周$|z|=1$的切线所成的角不大于μ;

3) 曲线C的曲率,与1的差不大于ε_1.

在这些条件之下,对于把$D(C)$映射到单位圆的那个函数$w=f(z,C)$,$f(0,C)=0$的边界导数,我们有估值

$$\frac{1-\varepsilon-2\varepsilon_1-\mu^2}{1+\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1}<|f'(z,C)|<\frac{1+\varepsilon+2\varepsilon_1-\mu^2}{1-\varepsilon+\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1}, \tag{2}$$

或者,再粗略些,

$$1-2\varepsilon-\varepsilon_1-\eta<|f'(z,C)|<1+2\varepsilon+\varepsilon_1+\eta, \tag{3}$$

其中 η 是关于$\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon_1^2+\mu^2}$的高阶无穷小.

要得出所求的估值,只需利用前面所说的那个一般方法便够了.

设 $z_1=re^{i\varphi}$是C上的任意一个点,经过点 z_1作一个半径等于 $r_1=1/(1+\varepsilon_1)$的圆周 C_1,与曲线 C 相切,并且,为了简单起见,我们假设,在所考虑的那个映射下,点 z_1与点 $w=1$ 相对应. 我们再求考虑把圆$|w|<1$ 共形地映射到圆 C_1上的那个函数 $z=g(w)(g(0)=0,g(1)=z_1)$. 根据基本变分原理(见第 60 目),有

$$|f'(z_1,C)|>\frac{1}{|g'(1)|}. \tag{4}$$

利用下述的结果,可以简化对 $g'(1)$的计算. 我们来考虑由所有那些把圆$|w|<1$映到圆 C_1上、使得点 w_1变换成圆周 C_1上的一个固定点 z_1、并且在这个点处具有固定的延伸系数的映射所构成的映射族. 显然,这映射族依赖于一个实参数. 我们来证明:圆$|w|<1$ 的任何一个点 w_1在这映射族的所有映射下的像,形成与 C_1相切于点 z_1的某一个圆周 C_0. 要证明这结论,我们把圆$|w|<1$ 与 C_1分别共形地映射到上半平面 $\mathrm{Im}\,\omega>0$ 与 $\mathrm{Im}\,\zeta>0$,使得点 w_1与 z_1都变换成无穷远点. 这时,所考虑的这映射族,便变换成把上半平面映到它本身上、而保持点∞不变、并且在点∞处有固定的延伸系数的一族映射,即,变换成形如 $\zeta=\alpha_0\omega+\beta$ 的那些映射,其中 α_0是个固定的实参数,β 是一个实参变量. 在这映射族中的不同映射之下,一个固定点 ω 的像,显然形成一条平行于轴 $\mathrm{Im}\,\zeta=0$ 的直线. 所以,代回到原来的变量 w 与 z 后,我们便得到了所求证的结论.

考虑到这事实后,我们作一个与 C 相切于点 z_1处并且通过坐标原点的圆周 C_0,并用条件 $g(0)=z_0$来代替条件 $g(0)=0$,其中 z_0表示在 C_0上与 z_1处于同一直径的相反两端的那个点. 把圆周 C_1的圆心记作 a_1,并记 $h=|z_0-a_1|$和 $\alpha_1=\arg(z_1-a_1)$. 我们有(参看图 139):$z_0=a_1-he^{i\alpha_1}$,$z_1=a_1+r_1e^{i\alpha_1}$,并且函数 $z=r_1e^{i\alpha_1}\zeta+a_1$实施一个把圆$|\zeta|<1$ 映到圆 C_1上、并使得点 $\zeta=0,1,-\dfrac{h}{r_1}$分别变换成点 $z=a_1,z_1,z_0$的映射. 另一方面,函数 $\zeta=\left(w-\dfrac{h}{r_1}\right)\Big/\left(1-\dfrac{h}{r_1}w\right)$把圆$|w|<1$ 映到圆$|\zeta|<1$ 上,并使得点 $w=0,1$ 分别变换成点 $\zeta=-\dfrac{h}{r_1},1$.

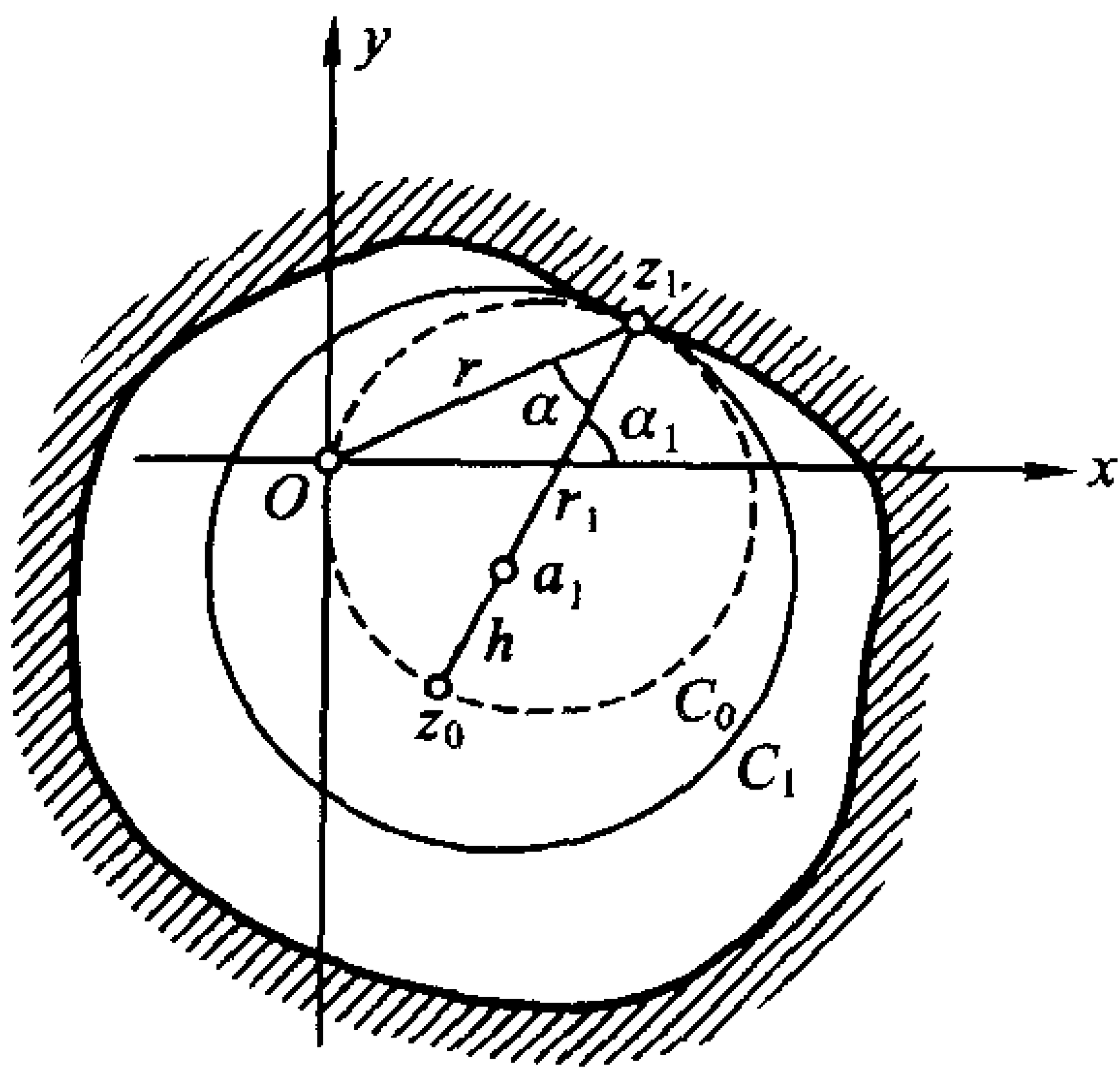


图 139

由此我们得到所求函数 $z=g(w)$　$(g(0)=z_0,g(1)=z_1)$

的表达式是

$$z=g(w)=\frac{r_1 w-h}{r_1-hw}r_1 e^{i\alpha_1}+a_1,$$

和

$$|g'(1)|=\frac{r_1^2-h^2}{(r_1-h)^2}r_1=\frac{r_1+h}{r_1-h}r_1. \tag{5}$$

把向量 z_1 与 z_1-z_0 间的角度记作 α. 由直角三角形 z_0Oz_1 得出 $r=(r_1+h)\cos\alpha$, 从而 $\frac{h}{r_1}=\frac{r}{r_1\cos\alpha}-1$, 所以按照(5)式有

$$|g'(1)|=\frac{1}{\frac{2}{r}\cos\alpha-\frac{1}{r_1}}.$$

回顾到(4)式,我们便得出

$$|f'(z_1,C)|>\frac{2}{r}\cos\alpha-\frac{1}{r_1}. \tag{6}$$

根据定理中的条件, $1-\varepsilon<r<1+\varepsilon$, $|\alpha|<\mu$, 所以 $\frac{2}{r}\cos\alpha\geqslant\frac{2}{1+\varepsilon}\left(1-\frac{\mu^2}{2}\right)$. 又因为 $\frac{1}{r_1}<1-\varepsilon_1$, 所以,在可以不计二阶以上的高阶无穷小的精度内,我们得出

$$\begin{aligned}|f'(z_1,C)|&>\frac{(2-\mu^2)(1-\varepsilon_1)-(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}\\&\approx\frac{1-\varepsilon-2\varepsilon_1-\mu^2}{1+\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1}\\&=1-2\varepsilon-\varepsilon_1-\eta,\end{aligned}$$

其中 η 是一个高于一阶的无穷小.

用半径等于 $r_2=\frac{1}{1-\varepsilon_1}$ 的圆周 C_2 来代替 C_1, 我们便得出类似的自上的估值

$$|f'(z_1,C)|<\frac{2}{r}\cos\alpha-\frac{1}{r_2}\approx\frac{1+\varepsilon+2\varepsilon_1-\mu^2}{1-\varepsilon+\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1}=1+2\varepsilon+\varepsilon_1+\eta.$$

于是定理1便证明了.

由边界导数的模的估值,在补充假设 $f'(0,C)>0$ 下,还可以得出 $|\arg f(z,C)-\arg z|$ 在边界上的估值. 我们先来证明下述引理:

引理 对于任何一个映射 $w=f(z,C)$, $f(0,C)=0$, $f'(0,C)>0$, 在曲线 C 上总可以找到一个在映射下辐角不变的点 $z_0=r_0e^{i\varphi_0}$, 即,总有这样的一个点 z_0 存在,使得

$$f(r_0e^{i\varphi_0},C)=e^{i\varphi_0}.$$

为了要证明这个引理,我们把函数 f 的反函数记作 $g(w)$, 并在单位圆 $|w|<1$

内来考虑函数$\frac{g(w)}{w}$.这函数在这圆内是个解析函数,并且处处不等于0,因为$\lim\limits_{w\to0}\frac{g(w)}{w}=g'(0)>0$,因此,在这个圆内函数$h(w)=\arg\frac{g(w)}{w}=\operatorname{Im}\ln\frac{g(w)}{w}$是个调和函数.我们有$h(0)=\operatorname{Im}\ln g'(0)=0$,而在圆周上有$h(w)=\varphi-\theta$,其中$\varphi=\arg g(\rho e^{i\theta})$.按照对于调和函数的中值定理,

$$0=h(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi-\theta)d\theta,$$

所以,至少存在着一个点,在这个点处$\varphi-\theta=0$.引理于是得证.

现在我们来证明下面的定理:

定理 2　*在定理1中的那些条件与添加的条件$f'(0,C)>0$之下,在边界C上的任何一个点$z=re^{i\varphi}$处都有*

$$|\arg f(z,C)-\arg z|<\pi(3\varepsilon+\varepsilon_1+\eta),\tag{7}$$

其中η是一个关于$\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon_1^2+\mu^2}$的二阶无穷小.

设φ_0是在映射下不变的辐角,$\theta=\arg f(re^{i\varphi},C)$,又$ds$是$C$在点$re^{i\varphi}$处的弧单元.我们有

$$\theta-\varphi_0=\int_{\varphi_0}^{\varphi}|f'(re^{i\varphi},C)|ds.$$

在我们所考虑的条件下,

$$\frac{1}{1+\varepsilon}d\varphi<ds<\frac{1}{1-\varepsilon}d\varphi;$$

所以,考虑到不等式(3)的左边部分,我们得出

$$\theta-\varphi_0>\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{1-2\varepsilon-\varepsilon_1-\eta}{1+\varepsilon}d\varphi=(\varphi-\varphi_0)-(3\varepsilon+\varepsilon_1+\eta)(\varphi-\varphi_0),$$

或者

$$\theta-\varphi>-(3\varepsilon+\varepsilon_1+\eta)(\varphi-\varphi_0).\tag{8}$$

类似地,利用(3)式的右一半,我们得出

$$\theta-\varphi<(3\varepsilon+\varepsilon_1+\eta)(\varphi-\varphi_0).\tag{9}$$

把所得的这两个不等式联立起来,并注意到可以只考虑适合$|\varphi-\varphi_0|<\pi$的那些φ,我们便得到所求的估值(7).

对$|\theta-\varphi|$的估值,也可以不利用不等式(3)而得出,并且是在限制较少的假设之下得出的,例如,可以不必假定ε_1很小.我们将简短地来指出得到这种估值的路径.

也同前面一样,只需估计圆周$|w|=1$上与曲线C的一段弧$\overset{\frown}{z_0z}$相对应的那段弧的长度ϑ的值便够了,其中弧$\overset{\frown}{z_0z}$的一个端点z_0,是那在映射下辐角不变的点.为了要求弧长ϑ的估值,我们用位于区域$D(C)$内而且与弧$\overset{\frown}{z_0z}$相切的一段圆弧C_1,以及

位于 $D(C)$ 的外面而且与曲线 C 在一个位于弧 $\widehat{z_0 z}$ 的外面的点处相切的一段圆弧 C_2，来连接点 z_0 与 z（图 140）. 根据蒙泰尔原理（第 60 目），在由初等函数实现的那个映射 $w = f(z, C_1 + C_2)$（见第 34 目）下，弧 C_1 变换成圆周 $|w| = 1$ 上的一段弧，其长度大于 ϑ. 由此我们便得到了 ϑ 的自上估值. 互换 C_1 与 C_2 的地位，便得出 ϑ 的自下估值. 当 $\varepsilon < \mu < 0.1$ 时，用这途径便得出不等式

$$|\arg f(z, C) - \arg z| < 1.6\mu. \tag{10}$$

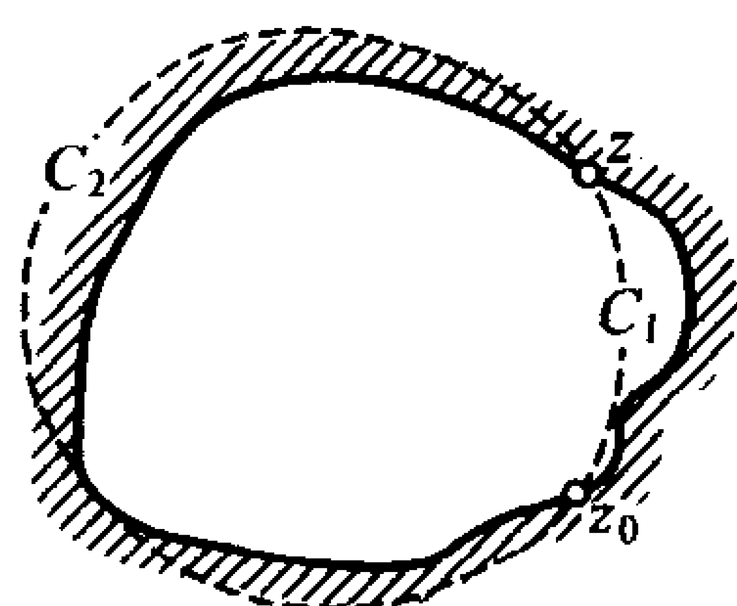


图 140

上面所证的两个定理给出导数模的变分和映射函数的辐角变分的估值依赖于区域边界的变分. 这些定理对边界点已经证明，而且根据极大值原理它们在区域内部也是正确的.

§2 近似区域的映射

现在我们将给出对一些区域的共形映射的近似公式，这些区域与可借助已知的映射来映成典范区域的那些区域，相差很微. 上一目中得到的结果使我们能够估计这些近似公式的精度. 我们先从与单位圆相差甚微的区域开始.

63. 近似于圆的区域 我们仍然设闭曲线 C 在位置上与曲率上都同单位圆周 $|z| = 1$ 很接近，即，在 C 的极坐标方程

$$r = r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi) \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi) \tag{1}$$

中，我们假设

$$|\delta(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon. \tag{2}$$

由第 34 目中对于去掉了一块其角点邻近于 e^{it} 的月牙形面积 σ_t 的圆的映射公式(9)出发，我们可得出 $f(z, C)$ 的主要部分.

$$w \approx z\left\{1 + \frac{\sigma_t}{2\pi}\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right\} = z + \frac{\sigma_t}{2\pi}\eta_t(z) \ (w(0) = 0, w'(0) > 0). \tag{3}$$

我们假定，从圆 $|z| < 1$ 中去掉了两块小月牙形 σ_{t_1} 与 σ_{t_2}，它们的角点分别邻近于 e^{it_1} 与 e^{it_2}. 根据(3)式我们得出把去掉了月牙形 σ_{t_1} 的圆 $|z| < 1$ 映到圆 $|\omega| < 1$ 上去的映射：

$$\omega \approx z + \frac{\sigma_{t_1}}{2\pi}\eta_{t_1}(z). \tag{4}$$

在所取的精确程度内，可以设月牙形 σ_{t_2} 变换成一个面积相同的月牙形，其角点邻近于 $\omega = e^{it_2}$. 现在我们再利用(3)式，按照这公式，函数

$$w \approx \omega + \frac{\sigma_{t_2}}{2\pi}\eta_{t_2}(\omega) \tag{5}$$

把去掉了月牙形 σ_{t_2} 的圆 $|\omega|<1$ 映射到圆 $|w|<1$ 上. 把(4)式中 ω 的表达式代入(5), 并且注意到, 由于有因式 σ_{t_2} 存在, 所以在所取的精度内, 可以在函数 $\eta_{t_2}(\omega)$ 的记号中把 ω 换成 z, 于是我们便得出了把去掉两块月牙形的圆 $|z|<1$ 映成单位圆的映射

$$w \approx z + \frac{\sigma_{t_1}}{2\pi}\eta_{t_1}(z) + \frac{\sigma_{t_2}}{2\pi}\eta_{t_2}(z). \tag{6}$$

如果在圆中所去掉的那些部分在形状上与月牙形不同, (6)式也仍保持有效.

现在我们转向一般的情形——由曲线(1)所围成的区域 D. 我们用一条由圆弧与半径上的线段所构成的折线来代替这曲线(图 141). 所去掉的扇形的面积等于

$$\sigma_k = (1 - r(t_k))\Delta t_k = \delta(t_k)\Delta t_k,$$

其中
$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k,$$

因此, 应用推广到去掉 n 个扇形的情形时的(6)式, 我们得到

$$f(z, C) \approx z + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\delta(t_k)\eta_{t_k}(z)\Delta t_k.$$

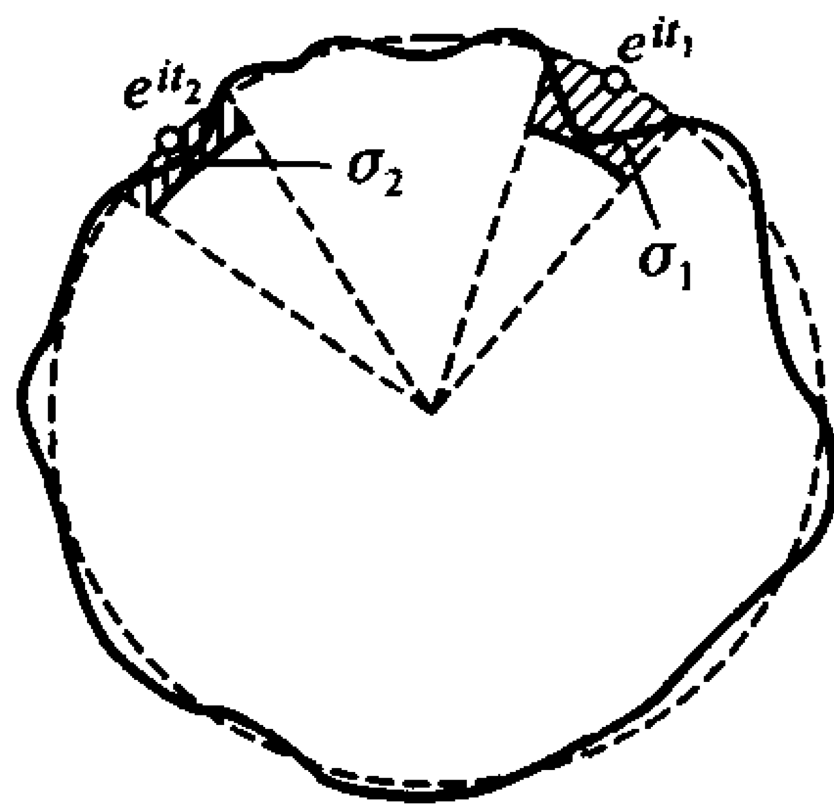


图 141

用积分代替和式, 并把 $\eta_t(z)$ 用它在(3)中的表达式来代替, 我们最后得到把近似于圆的区域映射到圆上的共形映射的近似公式:

$$f(z, C) \approx z\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}dt\right\} \quad (f(0, C) = 0, f'(0, C) > 0). \tag{7}$$

所叙述的公式(7)的推导几何上是直观的. 但是它不是充分严格的, 并且也没有给出这公式所容许的误差的估计, 因此遵循希雷克*, 我们还引入这公式基于 44 目中的施瓦茨积分(4)的分析推导.

我们通过 $z = g(w)$ 表示函数 $w = f(z, C)$ 的反函数. 于是 $g(w)/w$ 将是圆 $|w|<1$ 内的正则、解析不同于 0 的函数, 因此 $\ln\frac{g(w)}{w}$ 可以表示成施瓦茨积分. 如果单位圆周的点 $w = e^{i\theta}$ 的辐角和曲线 C 的点 $z = re^{i\varphi}$ 的辐角的对应关系 $\varphi = \varphi(\theta)$ 认为是已知的, 并且考虑到在圆周上 $\mathrm{Re}\ln\frac{g(w)}{w} = \ln r[\varphi(\theta)]$, 其中 $r = r(\varphi)$ 是 C 的极坐标方程, 那么这积分可写成

$$\ln\frac{g(w)}{w} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln r[\varphi(\theta)]\frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w}d\theta \tag{8}$$

的形状. (在第 44 目公式(4)中, 我们令 $C = 0$, 因为根据所采用的规范条件我们有

* 希雷克. О конформном отображении близких областей// Усцехи мат наук. 1956. Т. 11, вып. 5(71). 57–60 页.

$g'(0)>0$,从而(8)的左边部分在 $w=0$ 时是实的).

为了估计积分(8),我们使用如下引理.

引理 如果在区间 $[0,2\pi]$ 上连续可微实函数 $u(t)$ 满足条件 $u(0)=u(2\pi)$,

$$|u(t)|<\varepsilon,\quad |u'(t)|<\varepsilon, \tag{9}$$

那么施瓦茨积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt \tag{10}$$

对一切 $z,|z|<1$,满足不等式

$$|F(z)|<M\varepsilon, \tag{11}$$

其中 M 为某个常数.

为了证明,首先我们注意,怎样从施瓦茨积分性质推出,对一切 $z,|z|<1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt=1,$$

因此

$$F(re^{i\varphi})-u(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(t)-u(\varphi)]\frac{e^{it}+re^{i\varphi}}{e^{it}-re^{i\varphi}}dt.$$

可是按照引理的条件和根据中值定理 $|u(t)-u(\varphi)|<\varepsilon|t-\varphi|$,因此,根据积分的估值定理

$$|F(re^{i\varphi})-u(\varphi)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}|t-\varphi|\cdot\left|\frac{e^{it}+re^{i\varphi}}{e^{it}-re^{i\varphi}}\right|dt.$$

显然,在右边部分中的积分对一切 $r,0\leqslant r\leqslant 1$,和一切 $\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ 是有界的,而因为根据条件我们有 $|u(\varphi)|<\varepsilon$,所以

$$|F(re^{i\varphi})|\leqslant|F(re^{i\varphi})-u(\varphi)|+|u(\varphi)|\leqslant M\varepsilon,$$

其中 M 为某一个常数.引理得证.

我们回到公式(7)的推导,由条件 $|\delta(\varphi)|<\varepsilon$ 我们有

$$\ln r[\varphi(\theta)]=\ln\{1-\delta[\varphi(\theta)]\}=-\delta[\varphi(\theta)]+O(\varepsilon^2),$$

此外,正如从上一目定理 2 的证明中看到的,在条件(2)中 $\varphi'(\theta)=1+O(\varepsilon)$,因此

$$\{\delta[\varphi(\theta)]\}'=\delta'[\varphi(\theta)]\varphi'(\theta)=O(\varepsilon)$$

和

$$\{\ln r[\varphi(\theta)]\}'=-\frac{\{\delta[\varphi(\theta)]\}'}{1-\delta[\varphi(\theta)]}=-\{\delta[\varphi(\theta)]\}'+O(\varepsilon^2).$$

由此可见,根据已证明的引理,在积分(8)中把 $\ln r[\varphi(\theta)]$ 换成 $-\delta[\varphi(\theta)]$ 引出 $O(\varepsilon^2)$ 阶的误差.

随后,根据上一目的定理 2,$\theta-\varphi=O(\varepsilon)$,因此,在我们的条件下

$$\delta(\varphi)=\delta(\theta)+\delta'(\varphi^*)(\theta-\varphi)=\delta(\theta)+O(\varepsilon^2),$$

$$\begin{aligned}\{\delta[\varphi(\theta)]\}'-\delta'(\theta)&=\delta'(\varphi)[1+O(\varepsilon)]-\delta'(\theta)\\&=\delta'(\varphi)-\delta'(\theta)+O(\varepsilon^2)\\&=\delta''(\varphi^{**})(\varphi-\theta)+O(\varepsilon^2)=O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

(φ^*,φ^{**} 是包含在 θ 和 φ 之间的点). 由此可见,根据引理,在我们所考虑的积分中以采用的精度级还可以把 $\delta[\varphi(\theta)]$换成 $\delta(\theta)$,我们也就得到:

$$\ln\frac{g(w)}{w}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\theta+O(\varepsilon^2) \tag{12}$$

因为根据同一引理,在我们的条件下 $\ln\frac{g(w)}{w}=O(\varepsilon)$,所以

$$\frac{g(w)}{w}=e^{\ln\frac{g(w)}{w}}=1+\ln\frac{g(w)}{w}+O(\varepsilon^2),$$

就可以把(12)式写成

$$z=g(w)=w\left\{1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\theta\right\}+O(\varepsilon^2) \tag{13}$$

从这一公式也容易得出逆映射 $w=f(z,C)$的公式,为此只要把(13)式改写成形状

$$\begin{aligned}w&=\frac{z}{1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\theta}+O(\varepsilon^2)\\&=z\left\{1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\theta\right\}+O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

并且根据关系式 $\delta(\theta)=O(\varepsilon)$和 $w-z=O(\varepsilon)$,注意到,具有所采用的精度级下,在积分号下可以用 z 代换 w. 由此可见,证明了下述定理

定理　*如果具有极坐标方程*

$$r=r(\varphi)=1-\delta(\varphi)$$

的曲线 C 满足条件

$$|\delta(\varphi)|<\varepsilon,\quad |\delta'(\varphi)|<\varepsilon,\quad |\delta''(\varphi)|<\varepsilon,$$

那么,实施把区域 $D(C)$共形映射到单位圆的函数

$$w=f(z,C),\quad f(0,C)=0,\quad f'(0,C)>0$$

可以表示成形状

$$w=f(z,C)=z\left\{1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt\right\}+O(\varepsilon^2) \tag{14}$$

为了实际目的还要指出,在我们的映射下互相对应的点 $z=re^{i\varphi}$与 $w=\rho e^{i\theta}$的极坐标之间的关系:

$$\begin{aligned}r&\approx\rho\left\{1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)\delta(t)}{1-2\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}dt\right\},\\\varphi&\approx\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\rho\sin(\theta-t)\delta(t)}{1-2\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}dt.\end{aligned} \tag{15}$$

这些关系式是通过把公式(13)(见第 44 目)中的实部和虚部分开而得到的,并且它们成立的精确度达到 ε^2阶无穷小. 当 $\rho=\text{const}$ 时,这两个式子便给出在映射下变换成圆周

$$|w|=\rho\quad(0<\rho<1)$$

的原像的那些曲线的参数方程.

公式(15)中的第二个式子在 $\rho=1$ 时也成立

$$\varphi\approx\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\theta-t)\delta(t)}{1-\cos(\theta-t)}dt=\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{\theta-t}{2}\delta(t)dt,$$

从这个式子中得出

$$\Delta\theta\approx\varphi-\theta\approx\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{t-\theta}{2}\delta(t)dt. \tag{16}$$

在(16)式中的积分应当理解为奇积分,因为在点 $t=\theta$ 处被积函数变成一阶的无穷大.我们注意,根据对周期函数的积分的性质,在(16)式中的积分限可以取为从 $\theta-\pi$ 到 $\theta+\pi$,再利用余切是奇函数这个性质,便可得出:这积分的主值等于

$$\int_0^{2\pi}\cot\frac{t-\theta}{2}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\cot\frac{\tau}{2}d\tau=\lim_{\alpha\to0}\left\{\int_{-\pi}^{-\alpha}+\int_{\alpha}^{\pi}\right\}=0.$$

所以(16)式可以改写成

$$\Delta\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\delta(t)-\delta(\theta)\}\cot\frac{t-\theta}{2}dt \tag{17}$$

的形状,其中的积分已经理解为在通常意义下的积分了(见第 52 目,函数 $\delta(t)$满足赫尔法条件,因为它可以微分二次).

公式(16)对于实际应用是最重要的.按照这个公式不仅可以依据 θ 计算 φ 的值,而且在条件(2)下同样也可以计算边界导数的值.事实上,按照公式(17)来表示差 $\Delta\theta=\varphi-\theta$ 并对参数 θ 求导,我们求得:

$$\frac{d\varphi}{d\theta}\approx1+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}dt$$

因为 $\int_0^{2\pi}\cot\frac{t-\theta}{2}dt$ 等于 0.

但是,可以精确到关于 ε 的二阶无穷小,量 $|g'(e^{i\theta})|$ 等于在映射(13)下彼此对应的那些弧的长度的比值,即

$$|g'(e^{i\theta})|\approx(1-\delta(\varphi))\frac{d\varphi}{d\theta}. \tag{18}$$

由此,

$$|g'(e^{i\theta})|\approx1-\delta(\varphi)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}dt, \tag{19}$$

或者在转换到反函数后,

$$|f'(z,C)|\approx1+\delta(\theta)-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}dt. \tag{20}$$

在根据变分 $\delta(\varphi)$来实际计算函数 $f(z,C)$时,最简单的是用三角函数的和给出 δ

$$\delta(\varphi)=\varepsilon(a_0+a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi+a_2\cos2\varphi+b_2\sin2\varphi+\cdots). \tag{21}$$

把这展开式代入公式(14)中,我们转向计算形如

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt,\quad I_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nt\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt$$

的积分,为了计算这些积分,我们注意到,在 $\zeta=e^{it}$ 的单位圆上,我们有 $\cos nt=\mathrm{Re}\,\zeta^n$ 和 $\sin nt=\mathrm{Re}(-i\zeta^n)$. 因此,利用第 44 目的施瓦茨积分可以断定,对于 $|z|<1$ 这些积分分别等于 $I_1=z^n$ 和 $I_2=-iz^n$.

考虑到这些结果,由(14)求出实施把区域 $D(C)$ 映射到单位圆的函数的近似表达式:

$$f(z,C)=z+\varepsilon z[a_0+(a_1-ib_1)z+(a_2-ib_2)z^2+\cdots]+O(\varepsilon^2).\tag{22}$$

用通常的方式求得反函数的近似表达式,并且有形状

$$g(w)=w-\varepsilon w[a_0+(a_1-ib_1)w+(a_2-ib_2)w^2+\cdots]+O(\varepsilon^2),$$

由此容易求出

$$g'(w)=1-\varepsilon[a_0+2(a_1-ib_1)w+3(a_2-ib_2)w^2+\cdots]+O(\varepsilon^2)$$

并且,特别,在边界上的延伸

$$\begin{aligned}|g'(e^{i\theta})|&=e^{\mathrm{Re}\ln g'(e^{i\theta})}\\&=1-\varepsilon[a_0+2(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)+3(a_2\cos 2\theta+b_2\sin 2\theta)+\cdots]+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{23}$$

同时边界点的辐角的关系式

$$\begin{aligned}\varphi&=\theta+\mathrm{Im}\ln\frac{g(w)}{w}\\&=\theta-\varepsilon(a_1\sin\theta-b_1\cos\theta+a_2\sin 2\theta-b_2\cos 2\theta+\cdots)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{24}$$

在 $\delta(\varphi)$ 以公式(22)—(24)的三角多项式形状给出的情形中对计算是十分方便的.

例 考虑把带有半轴 $a=1+\varepsilon$ 和 $b=1$ 的椭圆映射到单位圆的映射. 由于椭圆方程是 $x=(1+\varepsilon)\cos\varphi, y=\sin\varphi$, 所以 $\rho=\sqrt{(1+\varepsilon)^2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1+\varepsilon\cos^2\varphi+O(\varepsilon^2)$, 因而 $\delta(\varphi)=-\varepsilon\cos^2\varphi=-\frac{\varepsilon}{2}(1+\cos 2\varphi)$, 并且按照公式(22)

$$f(z,C)=z-\frac{\varepsilon}{2}z(1+z^2)+O(\varepsilon^2).\tag{25}$$

最后我们注意到,公式(14)—(17)对于把接近于圆的区域的外部映射到单位圆的外部的共形映射

$$w=F(z,C),\quad F(\infty,C)=\infty$$

仍然有效,只要 $\delta(\varphi)$ 由形如

$$r=r(\varphi)=1+\delta(\varphi)\tag{26}$$

的曲线 C 的方程定出. 这个说明由下列情况推出,即上面指出的公式(14)—(17)的推导是建立在公式(3)的基础上的,而公式(3)对区域外部也是成立的. 但是,对于导数的公式有一些改变. 事情在于,如果 $\omega=f(\zeta)$ 是把 C 内部映射到圆,那么把 C 的

外部映到圆的外部的映射有形状 $F(z)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ 和 $|F'(z)|=\dfrac{|f'(\zeta)|}{|f(\zeta)|^2}\cdot\dfrac{1}{|z|^2}$. 在周线 C 上我们有 $|f(\zeta)|=1$, $|f'(\zeta)|$ 由(20)定出,而 $\dfrac{1}{|z|^2}=\dfrac{1}{(1+\delta(\varphi))^2}\approx 1-2\delta(\varphi)$, 因此,代替(20)我们将有

$$|F'(z,C)|\approx 1-\delta(\varphi)-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\dfrac{t-\theta}{2}}dt. \tag{27}$$

64. 近似于已知区域的区域 在这一目中,将给出下述这个在应用上很重要的问题的一个近似解答:

设已给定一个包含点 z_0 的单连通区域 $D(C)$, 具有满足李雅普诺夫条件的边界 C (见第 29 目), 并设把 $D(C)$ 共形映射到单位圆上去的那个函数

$$\omega=f(z,C);\quad f(z_0,C)=0,\quad f'(z_0,C)>0 \tag{1}$$

是已知的. 要求找出一个共形映射

$$\omega=f(z,\tilde{C});\quad f(z_0,\tilde{C})=0,\quad f(z_0,\tilde{C})>0, \tag{2}$$

把近似于 $D(C)$ 的一个区域 $D(\tilde{C})$ 映到同一个单位圆.

利用在上一目中所得到的那些公式,我们可以给出所提的问题的简单解答. 设 z_1 是 C 上的在映射(1)下被变换成点 $\omega=1$ 的那个点. 我们把周线 C 在点 z_1 与任意点 z 之间的那一段弧的长度记作 s. 当 z 由点 z_1 出发,循正方向沿着周线 C 运动时,数值 s 从 0 变到 l, 这里 l 是周线 C 的长度.

因为 C 满足李雅普诺夫条件,所以映射(1)在边界上是共形的(见第 29 目), 如果用 θ 表示在圆周 $|\omega|=1$ 上的点 $\omega=f(z,C)$ 的辐角,那么

$$\frac{d\theta}{ds}=|f'(z,C)| \text{ 和 } \theta(s)=\int_0^s|f'(z,C)|ds. \tag{3}$$

现在设周线 $\tilde{C}$ 在下述的意义下接近于 C. 我们把周线 C 在 z 点的法线上夹在 C 与 $\tilde{C}$ 之间的那一线段的长度记作 $\delta(s)$. 如果这段线段属于区域 $D(C)$, 长度 $\delta(s)$ 便取"+"号,反之便取"-"号(图 142); 我们假定

$$|\delta(s)|<\varepsilon,\quad |\delta'(s)|<\varepsilon,\quad |\delta''(s)|<\varepsilon, \tag{4}$$

其中 ε 是一个固定的很小的数值.

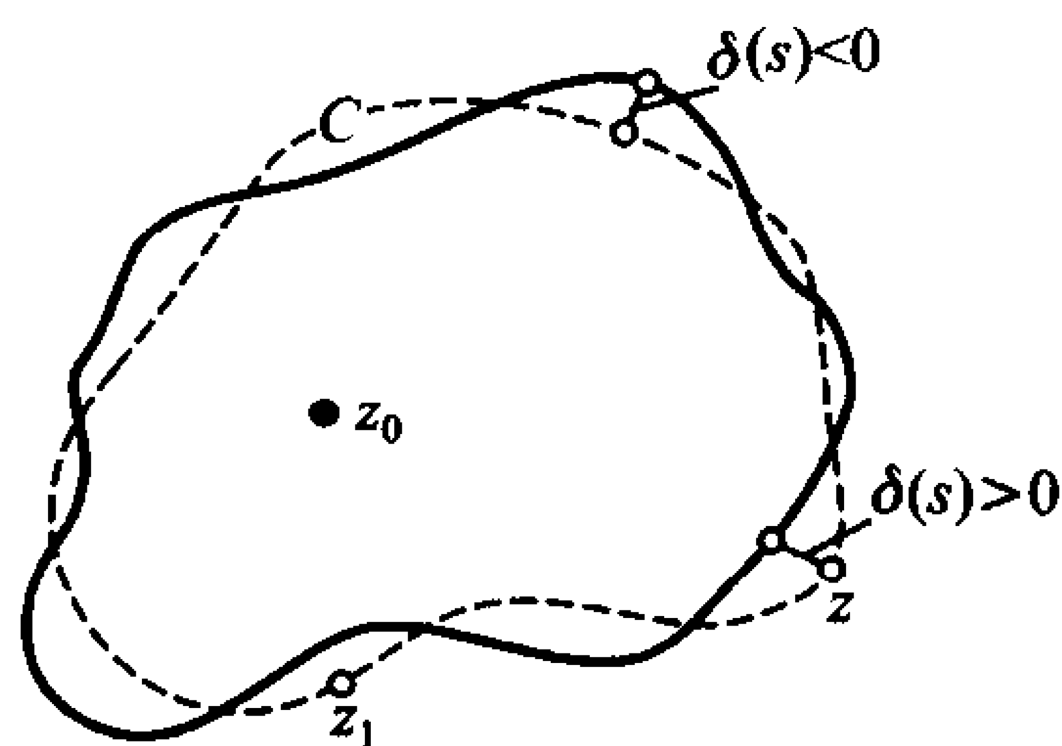


图 142

在平面 $\omega=\rho e^{i\theta}$ 上作一条接近于单位圆周的周线 $\tilde{C}^*$, 这条周线由极坐标方程

$$\rho=1-|f'(z,C)|\delta(s)=1-\delta^*(s)$$

决定. 其中 s 是 θ 的函数, 由(3)式来确定. 设

$$w=f(\omega,\tilde{C}^*),\ f(0,\tilde{C}^*)=0,\ f'(0,\tilde{C}^*)>0 \tag{5}$$

是按照上一目中的公式(7), 而把其中的 $\delta(t)$ 换成 $\delta^*(t)$ 所定出的函数, 于是, 所求的那个把区域 $D(\tilde{C})$ 映成单位圆的映射, 显然可以

按照下面的公式来构成*:

$$w = f(z,\tilde{C}) \approx f[f(z,C),\tilde{C}^*]$$
$$\approx f(z,C)\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta^*(t)\,\frac{e^{it} + f(z,C)}{e^{it} - f(z,C)}dt\right\}. \tag{6}$$

利用上一目中的公式(16)与(19),也可以在由所给的映射换到相近的映射时,求出边界对应关系的变分与导数的变分.

我们还要谈一下刚才所研究的那问题的一个重要的特例:当周线 $\tilde{C}$ 与 C 仅在以 C 上的点 a 为中心的一小段弧上不同时的情形(所谓**局部变分**的情形).

把包含在 C 与 $\tilde{C}$ 之间的那块面积记作 σ,如果 $\tilde{C}$ 在 $D(C)$ 的内部,我们便把 σ 取"+"号,反之便取"-"号.对于局部变分的情形来说,公式(6)的形状是

$$f(z,\tilde{C}) \approx f(z,C)\left\{1 + \frac{\sigma}{2\pi}|f'(a,C)|^2\cdot\frac{e^{i\theta_0} + f(z,C)}{e^{i\theta_0} - f(z,C)}\right\}, \tag{7}$$

其中 θ_0 是圆周 $|\omega| = 1$ 上的在映射 $\omega = f(z,C)$ 下对应于变分中心 a 的那个点的辐角.其实,在这情形中,可以利用上一目中的公式(3)来代替上一目中的公式(7),这时在公式中应当用

$$\sigma^* = |f'(a,C)|^2\sigma$$

来代替 σ.由(7)式中直接得出:*映射 f 的变分,与面积 σ 成正比,而且在周线的变分地点附近,与到这变分地点的距离成反比.*

在局部变分的情形下,当函数 $\delta(\varphi)$ 仅在圆周 $|\omega| = 1$ 上那个点 $e^{i\theta_0}$ 的附近长度为 η 的一段上不等于 0 时,第 63 目中关于在边界上的延伸系数的那个公式(19),具有如下的形式

$$\left|\frac{d\omega}{dw}\right| \approx 1 + \frac{\delta^*(\theta_0)}{4\pi}\,\frac{\eta}{\sin^2\dfrac{\theta - \theta_0}{2}} \approx 1 + \frac{\sigma^*}{4\pi}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta - \theta_0}{2}} \tag{8}$$

(我们假定,$\omega = e^{i\theta}$ 位于边界的未经形变的部分上,即,$\delta(\theta) = 0$).进一步,按照复合函数的求导公式,有:

$$|f'(z,\tilde{C})| = \left|\frac{dw}{d\omega}\right|\cdot\left|\frac{d\omega}{dz}\right| = \frac{|f'(z,C)|}{\left|\dfrac{d\omega}{dw}\right|},$$

把(8)式代入这式子中,结果我们得出边界导数

$$|f'(z,\tilde{C})| \approx |f'(z,C)|\cdot\left\{1 - \frac{\sigma}{4\pi}|f'(a,C)|^2\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta - \theta_0}{2}}\right\}, \tag{9}$$

其中 θ_0 与 θ 分别是在圆周 $|\omega| = 1$ 上的在映射

$$\omega = f(z,C)$$

* 为了可以应用公式(6),我们应当假定:不但 δ,δ',δ'' 很小,而且 $\delta^*,\delta^{*\prime},\delta^{*\prime\prime}$ 也很小.如果原来的周线足够光滑,例如,具有可以二次可微的曲率,那么这假定总是成立的.

下与周线 C 上的点 a 与 z 相对应的那两个点的辐角.

由(9)式可以知道：函数 f 的边界导数的变分，与面积 σ 成正比，并且在变分地点的附近与到变分地点的距离的平方成反比.

65. 结果的推广 所有在前面所叙述的那些命题与公式，都可以移用到把区域映成其他典范区域的共形映射的情形中去. 这样的移用，或者是借助于一个把圆映成其他典范区域的共形映射，或者是直接借助于第 60 目中的变分原理，便可以实现.

我们从与此有关的那些公式之中，举出一些最值得注意的：

(1) 半平面的情形 我们沿用在第 60 目中所采用的记号，并假设曲线 C 是由方程

$$y = y(x)$$

所确定的，而且

$$|y| < \varepsilon, \quad |y'| < \varepsilon, \quad |y''| < \varepsilon, \quad \lim_{x \to +\infty} x \cdot y(x) = 0. \tag{1}$$

在这些条件之下，实施把区域 $D(C)$ 映到上半平面上的那函数

$$w = f(z, C), \quad f'(\infty, C) = 1,$$

可以用下面这个近似公式来表达

$$w = f(z, C) \approx z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{z - t} dt \tag{2}$$

(参看第 34 目的(7)式). 对于 $f(z, C)$ 的反函数 $g(w)$，我们由(2)得出

$$g(w) \approx w - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)dt}{w - t}. \tag{3}$$

这个式子对于所有那些满足不等式 $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ 的 w 值都是成立的，特别是，令 $w = u$，我们便得出在曲线 C 上的点与在 u 轴上的点之间的关系

$$x \approx u - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)dt}{u - t} \tag{4}$$

以及导数的近似公式

$$|g'(u)| \approx 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t) - y(u)}{(t - u)^2} dt \tag{5}$$

(参看上一目中公式(19)的推演过程).

所有上面举出的这些公式，都是在可以不计关于 ε 的高阶无穷小的精度内成立的*.

(2) 带形的情形 完全类似，根据第 58 目中的变分原理与第 34 目中的公式(13)，我们可以很容易地得出把近似于带形 $0 < y < 1$ 的区域映到带形 $0 < v < 1$ 上去的共形映射的近似公式. 设已经给定了两条曲线 $C_0 : y = y_0(x)$ 与 $C : y = y(x)$，其中

---

* 积分(4)与(5)，以及当 z 与 w 是实数时的积分(2)与(3)，都应当理解为奇积分.

$y_0(x)$与 $y(x)$都是单值函数,并且

$$|y_0|<\varepsilon,\quad |y'_0|<\varepsilon,\quad |y''_0|<\varepsilon,$$
$$|y-1|<\varepsilon,\quad |y'|<\varepsilon,\quad |y''|<\varepsilon. \tag{6}$$

在这些条件之下,函数

$$w=f(z,C_0,C);\quad f(\pm\infty,C_0,C)=\pm\infty$$

精确到关于 ε 的二阶无穷小,可以由下面这个式子来定出:

$$f(z,C_0,C)\approx z+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(t)\operatorname{cth}\frac{\pi(z-t)}{2}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{1-y(t)\}\operatorname{th}\frac{\pi(z-t)}{2}dt, \tag{7}$$

而 f 的反函数 $z=g(w)$,则可以由式子

$$z=g(w)$$
$$\approx w-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(t)\operatorname{cth}\frac{\pi(w-t)}{2}dt$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{1-y(t)\}\operatorname{th}\frac{\pi(w-t)}{2}dt \tag{8}$$

来定出.式(8)是在闭带形 $0\leqslant v\leqslant 1$ 内成立的.特别如,令 $w=u$,我们便得出在 u 轴上的点与在曲线 C_0上的点之间的对应关系:

$$x\approx u-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(t)\operatorname{cth}\frac{\pi(u-t)}{2}dt$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{1-y(t)\}\operatorname{th}\frac{\pi(u-t)}{2}dt. \tag{9}$$

为了对奇积分(9)进行微分,我们以如下方式来进行.注意到积分的主值

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{cth}\frac{\pi(u-t)}{2}dt=-\frac{2}{\pi}\lim_{\substack{M\to\infty\\ \alpha\to 0}}\left\{\left[\ln\left|\operatorname{sh}\frac{\pi(u-t)}{2}\right|\right]_{-M}^{u-\alpha}+\left[\ln\left|\operatorname{sh}\frac{\pi(u-t)}{2}\right|\right]_{u+\alpha}^{M}\right\}$$
$$=-\frac{2}{\pi}\lim_{M\to\infty}\ln\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(u-M)}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\pi(u+M)}{2}}\right|=2u,$$

把公式(9)改写成形状

$$x\approx u-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{y_0(t)-y_0(u)\}\operatorname{cth}\frac{\pi(u-t)}{2}dt-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{1-y(t)\}\operatorname{th}\frac{\pi(u-t)}{2}dt-y_0(u)u.$$

现在对 u 求导,我们便得出其导数的近似表达式

$$|g'(u)|\approx 1-y_0(u)+\frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0(t)-y_0(u)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi(t-u)}{2}}dt-\frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-y(t)}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi(t-u)}{2}}dt. \tag{10}$$

($-y'_0(u)u$ 这一项与对第一个积分进行求导时所得的那一项相抵消)*

我们还要指出当变分具有局部性时的两个公式. 设在 x 轴上所有点处,除了一个以点 a 为中心的小区间外,都有

$$y(x)\equiv 1,\quad y_0(x)=0,$$

并设 σ 是包含在 x 轴与曲线 $y=y_0(x)$ 之间具有相应符号的那块面积($y_0(x)$ 沿 x 轴的积分).

在这些条件之下,在点 a 的一个邻域的外面,我们便有

$$\begin{aligned}|f'(x,C)|&\approx 1-\frac{\pi}{4}\frac{\sigma}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi(x-a)}{2}},\\ |f'(x+i,C)|&\approx 1+\frac{\pi}{4}\frac{\sigma}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi(x-a)}{2}}.\end{aligned}\tag{11}$$

由(11)式中可以知道,在带形的情形,局部变分的影响,如 e^{-l} 一样减弱,其中 l 是到变分地点的距离.

施行上面所说的局部变分足够多次,可以证明下述更一般的命题成立:

局部化原理 设 $d(z)$ 表示与曲线 C_0 在点 z 处相切并且整个包含在带形 $D(C_0,C)$ 内的最大的圆的直径,假设对于这曲线上所有的点 z 都有

$$d(z)=\theta d_{\text{cp}},\quad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,\tag{12}$$

其中 $d_{\text{cp}},\theta_1>0$ 与 $\theta_2<\infty$ 是某三个常数. 于是,对于带形 $D(C_0,C)$ 的在圆 $|z-z_0|\leqslant l$ 外面的任何一个变分来说,那个把带形 $D(C_0,C)$ 映成带形 $0<v<h$ 的共形映射的在点 z_0 处的延伸系数的变分,都满足不等式

$$\delta|f'(z_0,C_0,C)|<Me^{-m\frac{l}{d_{\text{cp}}}},\tag{13}$$

其中 M 与 m 都是常量.

可以计算出,如果变分地点离开点 z_0 的距离大于带形宽度的 4 倍,那么 $\ln|f'(z_0,C_0,C)|$ 的变分便小于 1%.

由(13)式也可以知道,在比导出(10)式时所用的那些条件更宽一点的条件下,(10)式也仍有可能应用. 例如,若

$$\max\{|y_0|,|y-1|,|y_0'|,|y'|,|y_0''|,|y''|\}<\varepsilon\{|x-x_0|^{\mu}+1\},\tag{14}$$

其中 μ 是任意一个正数,那么在点 $z_0=x_0+iy_0(x_0)$ 处,

$$|f'(z_0,C_0,C)|=1-\frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0(t)-y_0(x_0)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi(t-x_0)}{2}}dt$$

---

* 本书第一版中公式(10)的推导有错误,斯捷潘诺夫(Г. Ю. Стецанов)友好地给我们指出.

$$+\frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-y(t)}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi(t-x_0)}{2}}dt+R, \tag{15}$$

并且剩余项 R 的值可由不等式

$$|R|<k\varepsilon^2 \tag{16}$$

来估计,其中 k 是一个常量,仅与 μ 及 $\max|y(z)-y_0(x)|$ 有关.

(3) *狭窄带形* 把给定的带形映到直线带形上去的共形映射的导数,其在一个边界点处的值,是依赖于这个点的位置以及这带形的全部边界的.在狭窄带形或者其曲率变动很小的带形的情形,我们可以给出 $|f'(z,C_0,C)|$ 的边界值的一个近似的公式,在这公式中仅包含带形的宽度、C_0 与 C 之间所成的角度以及这两条曲线的曲率,并且所有这些量都是在其中一条曲线上一个给定的边界点 z 处、与另一条边界曲线上的某一个(由点 z 来确定的)点 z' 处来取的.我们来讨论狭窄带形的情形.

设已经给定了一个带形 $D(C_0,C)$,并设 z_0 是曲线 C 上的任意一点.仿照着月牙形情形(见第 34 目),我们把曲线 C 在点 z_0 处的法线上那段线段 z_0z_0' 的长度记作 $n=n(z_0)$,把由 C_0 在点 z_0 处的法线与 C 在点 z'_0 处的法线所成的角度记作 $\vartheta=\vartheta(z_0)$,把 C 与 C_0 在这两个点处的曲率记作 $k(z_0)$ 与 $k_0(z'_0)$.

设函数

$$w=f(z,C_0,C;h);\quad f(\pm\infty,C_0,C;h)=\pm\infty$$

实施把 $D(C_0,C)$ 映射成狭窄带形 $0<v<h$.在这些记号下,有下述定理成立:

定理 *如果 h 是一个很小的正数,曲线 C_0 与 C 满足条件*

$$\begin{gathered}a_1h<n<a_2h;\ |\vartheta|<a_3h,\left\{\left|\frac{k-k_0}{h}\right|,\ |k|,|k_0|\right\}<a_4,\\ \left\{\left|\frac{dk}{ds}\right|,\left|\frac{dk_0}{ds}\right|\right\}<a_5,\ \left\{\left|\frac{d^2k}{ds^2}\right|,\left|\frac{d^2k_0}{ds^2}\right|\right\}<a_6,\end{gathered} \tag{17}$$

其中那些 a_ν 都是与 h 无关的常数,那么

$$|f'(z,C_0,C;h)|=\frac{h}{n}\left\{1+\frac{n}{6}k_0+\frac{n}{3}k+\frac{n^2}{12}k^2+\frac{1}{3}\vartheta^2\right\}+R, \tag{18}$$

并且剩余项 R 的值可以由不等式

$$|R|<Ah^3 \tag{19}$$

来估计,其中 A 是仅依赖于常数 a_ν 的一个常数.

经过点 z_0 与 z'_0 分别作曲线 C 与 C_0 的密切圆周 $\tilde{C}$ 与 $\tilde{C}_0$,我们用 $D(\tilde{C}_0,\tilde{C})$ 来记包含在这两个圆周之间的那个月牙形(图 143).由于按照第 34 目中的(18)式,在把 $D(\tilde{C}_0,\tilde{C})$ 映成宽度等于 h 的带形的那个映射下,在点 z_0 处的延伸系数是

$$|f'(z_0,\tilde{C}_0,\tilde{C};h)|=\frac{h}{n}\left\{1+\frac{n}{6}k_0+\frac{n}{3}k+\frac{n^2}{12}k^2+\frac{1}{3}\vartheta^2\right\}+O(h^3), \tag{20}$$

所以,要证明这定理,我们只要证明 $|f'(z_0,\tilde{C}_0,\tilde{C};h)|$ 与 $|f'(z_0,C_0,C;h)|$ 的差是

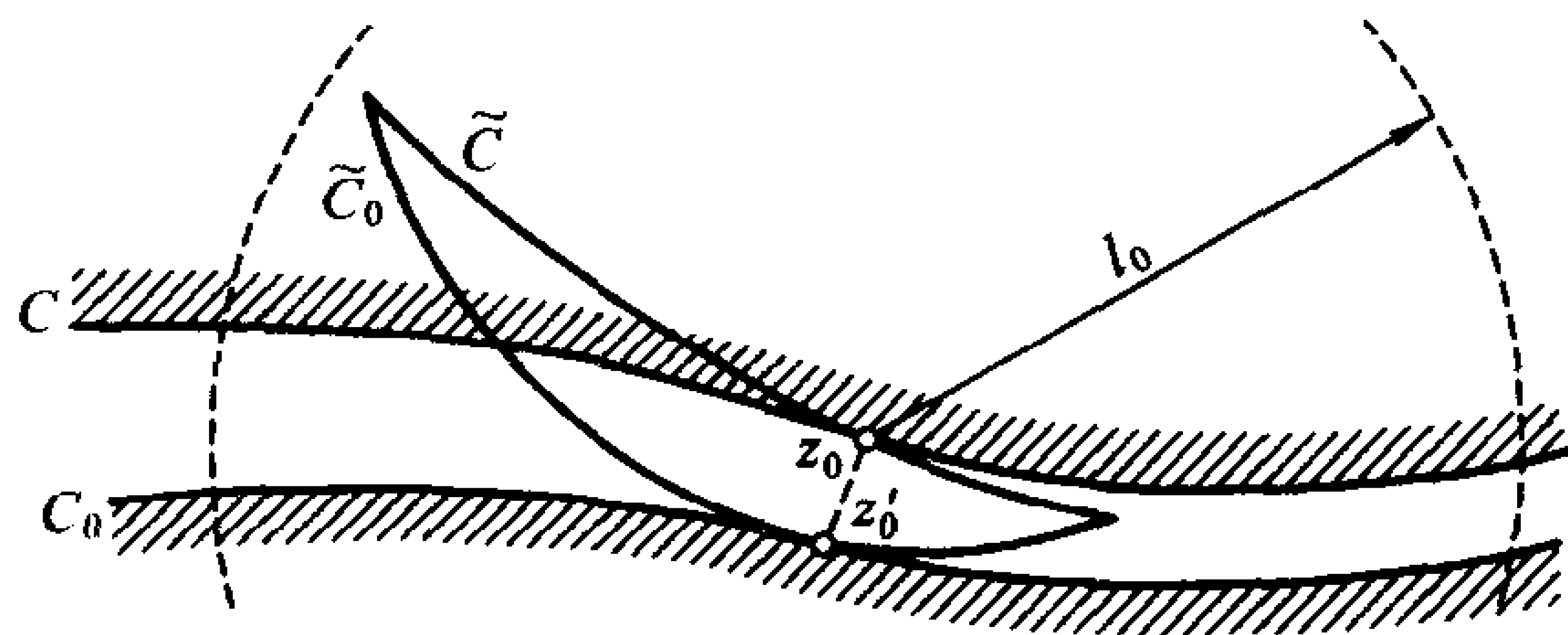


图 143

一个其阶不比 h^3 低的无穷小便够了.

在这个所要证明的定理的条件下,曲线 C_0 与 C 的曲率都是有限的,并且它们的差是一个与 h 同阶的无穷小量.因此,根据初等的计算,便可以知道:月牙形 $D(\tilde{C}_0,\tilde{C})$的两个角点都位于离点 z_0有限距离处*.根据本目第(2)部分中的局部化原理,如果 $e^{-m\frac{l}{h}}\leqslant Mh^3$,即,如果 $l\geqslant\frac{h}{m}\left(3\ln\frac{1}{h}-\ln M\right)$的话,这区域的在圆 $|z-z_0|\leqslant l$ 的外面的任何一个形变,都将使延伸系数 $|f'(z_0,C_0,C)|$ 产生一个其阶不低于 h^3 的无穷小的改变**.所以,在我们的估值的精度下,可以认为:在圆

$$|z-z_0|\leqslant l_0=\frac{3h}{m}\ln\frac{1}{h}$$

的外面,区域 $D(C_0,C)$与月牙形 $D(\tilde{C}_0,\tilde{C})$相重合.首先我们假定,在圆 $|z-z_0|\leqslant l$ 内,曲线 $\tilde{C}_0$ 与 C_0 相重合.实施一个把月牙形 $D(\tilde{C}_0,\tilde{C})$映到在平面 $\zeta=\xi+i\eta$ 中的带形 $0<\eta<h$ 上去的共形映射,把 $\tilde{C}_0$变换成这带形的下沿 $\tilde{\Gamma}_0$,把 $\tilde{C}$ 变换成带形的上沿 $\tilde{\Gamma}$,并且把点 z_0变换成点 $\zeta_0=ih$.这时曲线 C 变换成在点 $\zeta_0=ih$ 处与直线 $\tilde{\Gamma}$ 相密切的某一条曲线 Γ.根据(20)式,在我们的映射中,延伸系数是有上界与下界的,所以,我们只需要证明:当 $|\xi|<l_0$时,把带形 $D(\Gamma_0,\Gamma)$映成带形 $0<v<h$ 的那个映射在点 ζ_0处的延伸系数,与数 1 (这是在把带形 $D(\tilde{\Gamma}_0,\Gamma)$映到它本身上的那个映射中的延伸系数)仅相差一个其阶不低于 h^3 的无穷小.

我们在点 $\xi=0$ 的邻域内,把曲线 Γ 的方程按照泰勒公式来表示 $\eta=h+\alpha\xi^3+\beta\xi^4+o(\xi^4)$ (其中 ξ 与 ξ^2 的系数等于 0,因为 Γ 与直线 $\tilde{\Gamma}$ 是相密切的).对 $|\xi|<l_0$,

---

* 用计算可以证明,月牙形的半底的平方为

$$d^2=\frac{\alpha}{1+k_0k\alpha}\left(1-\frac{kh}{2}\right)(2+k_0h)\left(1+\frac{k_0k\alpha}{2}\right).$$

其中 $\alpha=\frac{h}{k-k_0}$是一个有界量.

** 在我们的条件下,这原理显然可以应用,并且可以取

$$d_{cp}=h.$$

展开式中的剩余项是一个其阶较 $h^4\ln^4\frac{1}{h}$ 高的无穷小,这就是说,在我们所取的精度内,可以把它略去.

我们来试图选择常数 a 与 b,以使得函数

$$\zeta = w + aw^2 + bw^4 \tag{21}$$

实施把带形 $0<v<h$ 映到 ζ 平面中的一个由 ξ 轴与(至少当 $|\xi|<l_0$ 时)曲线 $\eta = h+\alpha\xi^3$ 所围成的带形上去的映射. 如果 a 与 b 都是实数,那么对于那些实数值 $w=u$,对应的 ζ 的值也将是实数,这就是说,这两个带形的下沿彼此互相对应. 当 $w=u+ih$ 时,我们有

$$\eta = h + 2ahu + 4bhu(u^2-h^2),$$
$$\xi = u + a(u^2-h^2) + b(u^4-6h^2u^2+h^4),$$

所以,令 $a=2bh^2$,$4bh=\alpha$ 后,我们便得出:

$$\eta = h + \alpha u^3,$$
$$\xi = u + \frac{\alpha}{4h}(u^4-4h^2u^2-h^4).$$

由第二个方程中可以知道,$u=\xi+O\left(h^3\ln^3\frac{1}{h}\right)$,因此,就我们所取的精度来说,在第一个方程内可以取 $u=\xi$,于是得到 $\eta=h+\alpha\xi^3$,这就是我们所需要的. 把所求得的 a 与 b 的值代入(21),便得出所求的映射就是

$$\zeta = w + \frac{\alpha h}{2}w^2 + \frac{\alpha}{4h}w^4. \tag{22}$$

由(22)式知道,对应于点 $\zeta_0 = ih$ 的那个点是

$$w_0 = ih + o\left(h^3\ln^3\frac{1}{h}\right),$$

所以,映射(22)在这个点处的延伸系数是

$$\left[\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|\right]_{w_0} = \left[\left|1+\alpha hw+\frac{\alpha}{h}w^3\right|\right]_{w_0} = 1 + o\left(h^4\ln^3\frac{1}{h}\right),$$

这便是我们所需要证明的.

类似地可以选择常数 c 与 d,使得函数 $\zeta = w + cw^3 + dw^5$ 实施一个把带形 $0<v<h$ 映到由 ξ 轴与曲线 $\eta = h+\beta\xi^4$ 所围成的带形上去的映射. 当 $w=u+ih$ 时,我们有

$$\eta = h + ch(3u^2-h^2) + dh(5u^4-10h^2u^2+h^4),$$
$$\xi = u + cu(u^2-3hu) + du(u^4-10h^2u^2+5h^4),$$

所以,当令 $3c=10dh^2$,$5dh=\beta$ 后,我们便得到

$$\eta = h + \beta u^4 - \frac{7}{15}\beta h^4, \quad \xi = u + O\left(h^4\ln^4\frac{1}{h}\right),$$

于是在我们所采取的精度内,$\eta = h+\beta\xi^4$. 因此,所求的那个映射的形状是

$$\zeta = w + \frac{2}{3}\beta h w^3 + \frac{\beta}{5h} w^5, \tag{23}$$

而它在点 $w_0 = ih + o\left(h^4 \ln^4 \frac{1}{h}\right)$ 处的延伸系数等于

$$\left[\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|\right]_{w_0} = \left[\left|1 + 2\beta h w^2 + \frac{\beta}{h} w^4\right|\right]_{w_0} = 1 + O(h^3).$$

显然，在所需要的精度内，映射

$$\zeta = w + \frac{\alpha h}{2} w^2 + \frac{\alpha}{4h} w^4 + \frac{2}{3}\beta h w^3 + \frac{\beta}{5h} w^5$$

与把带形 $0 < v < h$ 映到带形 $D(\Gamma_0, \Gamma)$ 上去的那个映射相重合，并且它在对应于 $\zeta_0 = ih$ 的那个点 w_0 处的延伸系数等于 $1 + O(h^3)$. 对于曲线 C_0 在圆 $|z - z_0| < l_0$ 内与 $\tilde{C}_0$ 相重合时的情形，定理已经证明了.

曲线 C 与 $\tilde{C}$ 相重合时的情形，可以完全类似地来讨论. 至于一般情形，则可以化成这两种已讨论过的情形，因为可以先从区域 $D(C_0, C)$ 变换到区域 $D(C_0, \tilde{C})$ 上，然后再从 $D(C_0, \tilde{C})$ 变换到 $D(\tilde{C}_0, \tilde{C})$ 上. 因此定理已经全部证明.

在结束时，我们再举一个由公式(18)得出的结果，这结果可以通过初等估计而得到.

设曲线 C_0 与 x 轴相重合，而曲线 $C: y = y(x)$ 满足下列诸条件:

$$\begin{gathered} a_1 h < y(x) < a_2 h, \\ |y'| < a_3 h^{\frac{3}{2}}, \quad |y''| < a_4 h, \quad |y'''| < a_5 h^{\frac{1}{2}}. \end{gathered} \tag{24}$$

在这样的条件之下，在曲线 C 上的任何一点处我们都有:

$$|f'(z, C_0, C; h)| = \frac{h}{y(x)}\left\{1 + \frac{1}{3} y y''\right\} + R, \quad |R| < A h^{\frac{5}{2}}, \tag{25}$$

其中 A 仅依赖常数 a_ν.

为了证明只要指出，在采纳的条件下，并且具有公式(18)中所采用的精度可以写出

$$\vartheta = \arctan y' \approx y', \; n = \frac{y}{\cos\vartheta} \approx y, \; k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y'',$$

同样把包含 $n^2 k^2$ 和 ϑ^2 的项略去.

§3 应用

在这里我们将给出变分原理对于连续介质力学中若干问题的应用.

66. 浮力的计算 理想流体这种模型，仅是在描述现实的液体或气体的运动时的第一近似. 因此，例如，在第 49 目中所得出的那个求浮力大小的公式，其实是不精确的：当考虑到流体的黏性、可压缩性等等时，除了浮力以外还会出现有害的阻力、流的

不均匀性以及其他的许多因素,而且这些因素,在颇大的程度上是与沿着机翼的气流的速度的分布特性有关的.由于这个原因,当从事解决有关改进机翼质量的问题时,用来计算当由一个已知断面 C 换到近似的一个断面 $\widetilde{C}$ 时的速度分布的简单方法,具有很大的意义.

因此,我们产生了下面这个问题:

依据断面 C 的形状的变分,来确定关于这断面的速度与浮力的变分.

根据对于近似区域的共形映射的那些近似公式,可以给出这问题的简单解答.设已经给定了一条具有一个角点 a 的周线 C,以及一条在位置上与曲率上都同 C 很接近的周线 $\widetilde{C}$.此外,我们还假定:点 a 属于 $\widetilde{C}$,并且 $\widetilde{C}$ 在点 a 处的那两条切线,也是 C 的切线(图 144).

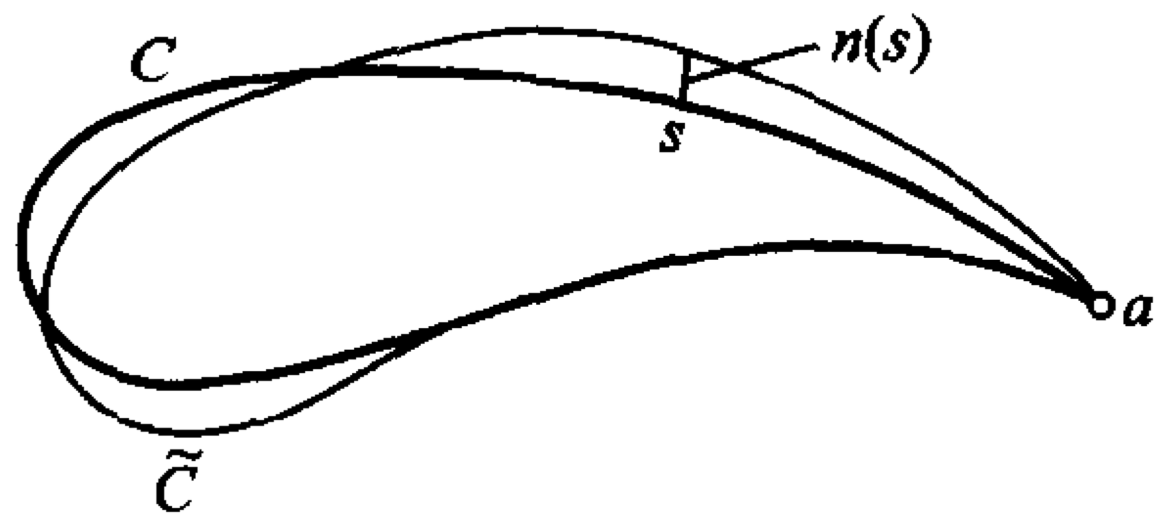


图 144

而且,我们还假定,绕 C 流的气流是已知的,于是我们可以认为气流速度 V 也是已知的,把它看作是周线 C 的弧长 s 的函数.取点 a 作为计算 s 的起点,并设 s 的增大是对应于按正方向沿 C 绕行的($0\leqslant s\leqslant l$).此外,我们还假设把周线 C 的外部映到单位圆的外部 $|\zeta|>1$ 上去的那个共形映射

$$\zeta=F(z,C);\quad F(\infty,C)=\infty \tag{1}$$

也是已知的,特别是,在 C 上的点与在圆周 $\zeta=e^{i\theta}$ 上的点之间的对应关系

$$\theta=\theta(s);\quad s=s(\theta) \tag{2}$$

是已知的.我们用 $n(s)$ 来记 C 的法线的包含在 C 与 $\widetilde{C}$ 之间那一段线段的长度,这 $n(s)$ 的取"-"号或取"+"号,视这一段法线位于 C 的内部或外部而定.在映射(1)下,曲线 $\widetilde{C}$ 变换成一条曲线 $\widetilde{C}^*$,在不计关于

$$\max|n(s)|$$

的高阶无穷小的精度内,$\widetilde{C}^*$ 的极坐标方程将有形状:

$$\rho=1+n[s(\theta)]\frac{d\theta}{ds}=1+\delta(\theta) \tag{3}$$

(我们令 $\zeta=\rho e^{i\theta}$).把 $\widetilde{C}$ 的外部映到单位圆外部 $|w|>1$ 上去的那个映射,显然可以表示成

$$w=F(z,\widetilde{C})=F[F(z,C),\widetilde{C}^*],\quad F(\infty,\widetilde{C})=\infty \tag{4}$$

的形状,其中 $w=F(\zeta,\widetilde{C}^*)$,$F(\infty,\widetilde{C}^*)=\infty$ 是把 $\widetilde{C}^*$ 的外部映到 $|w|>1$ 上去的映射.根据求复合函数的导数的公式,由此便有

$$|F'(z,\widetilde{C})|=|F'(\zeta,\widetilde{C}^*)|\cdot|F'(z,C)|, \tag{5}$$

而且在这式子的右端,函数 $|F'(z,C)|$ 是已知的,$|F'(\zeta,\widetilde{C}^*)|$ 可以用第 63 目中的近似表达式(27)来确定

$$|F'(\zeta,\widetilde{C}^*)|\approx 1-\delta(\theta)-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}dt \tag{6}$$

(见第 63 目末所提出的注). 如果注意到,映射(4)把对于 $\tilde{C}$ 的绕流问题化成了对于圆柱面的绕流问题,那么,在周线 $\tilde{C}$ 上的点 z 处的流速的大小,便可以按照第 49 目中的(9)式来确定:

$$|\tilde{\mathbf{V}}| = \frac{2v_\infty}{|F'(\infty,\tilde{C})|}\cdot|\sin\tilde{\theta}-\sin\tilde{\theta}_0|\cdot|F'(z,\tilde{C})|,$$

其中 v_∞ 是在无穷远处的流速*,而 $\tilde{\theta}=\theta+\Delta\theta$ 与 $\tilde{\theta}_0=\theta_0+\Delta\theta_0$ 分别是点 z 与 a 在映射(4)下的像的辐角. 拿这个式子来同那个用来表示在 C 上那些点处的流速的同样的公式

$$|\mathbf{V}| = \frac{2v_\infty}{|F'(\infty,C)|}\cdot|\sin\theta-\sin\theta_0|\cdot|F'(z,C)|$$

相比较,并利用(5)式与(6)式,我们得到

$$|\tilde{\mathbf{V}}| \approx \frac{|\mathbf{V}|}{|F'(\infty,\tilde{C}^*)|}\cdot\left|\frac{\sin\tilde{\theta}-\sin\tilde{\theta}_0}{\sin\theta-\sin\theta_0}\right|\cdot\left\{1-\delta(\theta)-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}dt\right\}. \tag{7}$$

但是,把第 63 目中的(7)式对 z 微分,然后再取 $z\to\infty$ 时的极限,我们便得到

$$|F'(\infty,\tilde{C}^*)| \approx 1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)dt. \tag{8}$$

另一方面,

$$\frac{\sin\tilde{\theta}-\sin\tilde{\theta}_0}{\sin\theta-\sin\theta_0} \approx \frac{\sin\theta+\cos\theta\Delta\theta-\sin\theta_0-\cos\theta_0\Delta\theta_0}{\sin\theta-\sin\theta_0}$$

$$=1+\frac{\cos\theta\Delta\theta-\cos\theta_0\Delta\theta_0}{\sin\theta-\sin\theta_0},$$

其中的 $\Delta\theta$ 与 $\Delta\theta_0$ 照第 63 目中的(16)式来确定:

$$\Delta\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)\cot\frac{\theta-t}{2}dt,\quad \Delta\theta_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)\cot\frac{\theta_0-t}{2}dt \tag{9}$$

(在这两个式子中我们改换了符号,因为我们所关心的,是在第 63 目中的那些记号下记作 $\theta-\varphi$ 与 $\theta_0-\varphi$ 的那两个量). 把所求得的值代入(7)式内,并略去高阶无穷小,最后我们便得出

$$|\tilde{\mathbf{V}}| = |\mathbf{V}|\left\{1-\delta(\theta)+\frac{\cos\theta\Delta\theta-\cos\theta_0\Delta\theta_0}{\sin\theta-\sin\theta_0}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)dt-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}dt\right\}. \tag{10}$$

公式(10)说明了在周线 $\tilde{C}$ 与 C 的位于 C 的同一条法线上的点处的流速之间的关系.

我们注意,按照第 63 目中所说的,在根据公式(10)作实际计算时,最好是用三角

---

* 我们认为,在无穷远处流速的方向是沿着实轴的,这就是说,在第 49 目的那些记号下,$\vartheta=0$.

函数的多项式来近似表达 $\delta(t)$,

$$\delta(t)=\varepsilon(a_0+a_1\cos t+b_1\sin t+a_2\cos 2t+b_2\sin 2t+\cdots),\tag{11}$$

来进行计算. 在这时,用第 63 目中的(23)式来代替(6)式比较方便(同时也注意到 $F'(\zeta,\widetilde{C}^*)=\dfrac{1}{g'(e^{i\theta})}$),于是代替公式(10)我们得到

$$|\widetilde{\boldsymbol{V}}|=|\boldsymbol{V}|\left\{1+\frac{\cos\theta\Delta\theta-\cos\theta_0\Delta\theta_0}{\sin\theta-\sin\theta_0}\right.$$
$$\left.-\varepsilon[2a_0+2(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)+3(a_2\cos 2\theta+b_2\sin 2\theta)+\cdots]\right\},\tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta\theta&=\varepsilon(a_1\sin\theta-b_1\cos\theta+a_2\sin 2\theta-b_2\cos 2\theta+\cdots),\\ \Delta\theta_0&=\varepsilon(a_1\sin\theta_0-b_1\cos\theta_0+a_2\sin 2\theta_0-b_2\cos 2\theta_0+\cdots)\end{aligned}\tag{13}$$

(参看第 63 目中的(23)式与(24)式).

公式(12)与(13)也可以用来解下述的逆问题:

根据已给定的在机翼处的流速的变分,求出其所对应的机翼断面的变分.

我们来考虑周线 C 的变分中的一种特殊情形,此时 $\widetilde{C}$ 与 C 仅在以点 s_1 为中心的一小段弧上不同(*局部变分*). 在这样的情形下,我们令

$$\theta_1=\theta(s_1),\quad \int_0^{2\pi}\delta(t)dt=\sigma,$$

于是在变分地点的外面,在可以不计关于 σ 的高阶无穷小的精度内,代替公式(9)与(10)我们有

$$\Delta\theta=\frac{\sigma}{2\pi}\cot\frac{\theta-\theta_1}{2},\quad \Delta\theta_0=\frac{\sigma}{2\pi}\cot\frac{\theta_0-\theta_1}{2},\tag{14}$$

$$|\widetilde{\boldsymbol{V}}|=|\boldsymbol{V}|\left\{1+\frac{\sigma}{2\pi}\left[\frac{\cos\theta\cot\dfrac{\theta-\theta_1}{2}-\cos\theta_0\cot\dfrac{\theta_0-\theta_1}{2}}{\sin\theta-\sin\theta_0}+1-\frac{1}{2\sin^2\dfrac{\theta-\theta_1}{2}}\right]\right\}.$$

我们转向讨论浮力的变分的计算. 要计算浮力的变分,最简单的是利用第 49 目中的茹科夫斯基公式(8),根据这个公式,作用在周线 C 上的浮力的大小等于

$$P=4\pi\rho\frac{v_\infty^2}{|F'(\infty,C)|}\sin\theta_0.\tag{15}$$

把这个公式应用到周线 C 与 $\widetilde{C}$ 上,我们得出

$$\widetilde{P}=P\cdot\frac{\sin\tilde{\theta}_0}{\sin\theta_0}\left|\frac{F'(\infty,C)}{F'(\infty,\widetilde{C})}\right|=P\cdot\frac{\sin\tilde{\theta}_0}{\sin\theta_0}\cdot\frac{1}{|F'(\infty,\widetilde{C}^*)|},\tag{16}$$

或者利用(8)式,并施行代换 $\sin\tilde{\theta}_0=\sin\theta_0+\cos\theta_0\Delta\theta_0$,我们便得到

$$\widetilde{P}=P\left\{1+\cot\theta_0\Delta\theta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)dt\right\}.\tag{17}$$

在局部变分的情形,公式(17)取

$$\widetilde{P}\approx P\left\{1+\frac{\sigma}{2\pi}\left[\cot\ \theta_0\cot\frac{\theta_0-\theta_1}{2}+1\right]\right\} \tag{18}$$

的形状.由(18)式可以得出下面的定性的结果:

设流体绕着断面 C 而流,具有正的浮力 P,而且它的会合点与分支点分别是 a_0 与 a_1. 当用断面 $\widetilde{C}$ 来代替 C 时:1) 如果 $\widetilde{C}$ 同 C 在下面那段弧 $\overset{\frown}{a_0ba_1}$ 上相重合,而在上面那段弧 $\overset{\frown}{a_0b'a_1}$ 的上方,则浮力增大;2) 如果 $\widetilde{C}$ 同 C 在上面那段弧上相重合,而在下面那段弧的下方,则浮力减小(图 145).

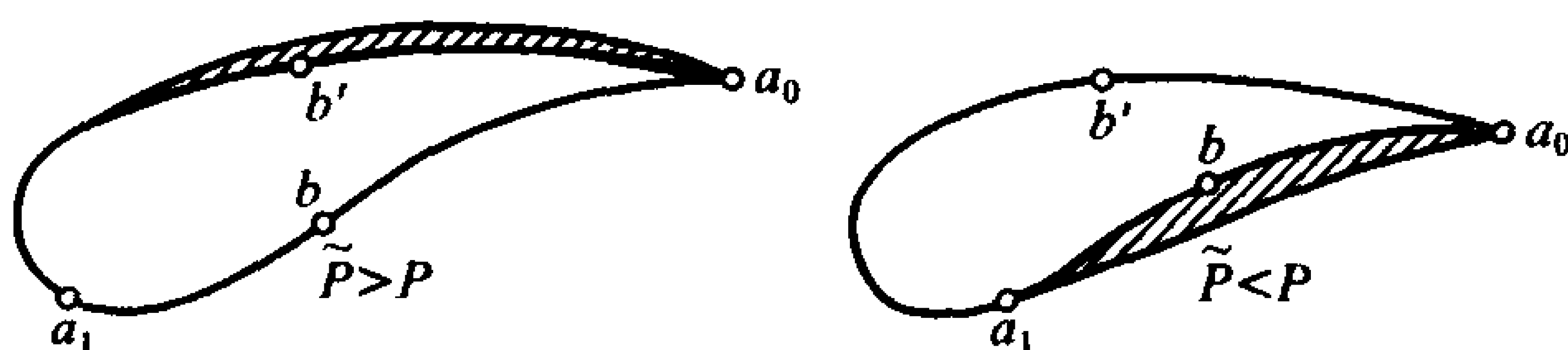


图 145

要证明这个结果,我们可以把周线 C 的变分看作是一连串的局部变分.因为在我们的条件下,$P>0$,并且 $\sigma>0$*,所以根据(18)式,浮力的变分 $\delta P=\widetilde{P}-P$ 的符号,与表达式

$$\Delta=1+\cot\ \theta_0\cot\frac{\theta_0-\theta_1}{2} \tag{19}$$

的符号相同,并且 θ_0 在第四象限内(为了确定起见,我们设 $-\frac{\pi}{2}<\theta_0<0$),所以 $\cot\ \theta_0<0$.

我们先来考虑情形 1).在映射(4)下,局部变分的中心在这时对应于圆周上的一个点 θ_1,这个点位于上面那段弧 $\overset{\frown}{\theta_0\theta_0'}$ 上,其中 θ_0' 是对应于流的分支点 a_1 的圆周上的点,即,$0<\theta_1-\theta_0<\pi+2|\theta_0|$,(见 49 目例 2).当 $0<\theta_1-\theta_0\leqslant\pi$ 时,我们有 $\cot\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\leqslant 0$,所以,$\Delta\geqslant 1$.当 $\pi<\theta_1-\theta_0<\pi+2|\theta_0|$ 时,我们可以令 $\frac{\theta_1-\theta_0}{2}=\frac{\pi}{2}+\alpha$,其中 $0<\alpha<|\theta_0|$,于是 $\cot\frac{\theta_0-\theta_1}{2}=\tan\alpha$,(19)式中第二项的模等于 $\frac{\tan\alpha}{\tan|\theta_0|}$,不大于 1,所以 $\Delta>0$.因此,在情形 1)中,浮力的变分 $\delta P>0$.

类似地,在情形 2)中,我们有 $0<\theta_0-\theta_1<\pi-|\theta_0|$,令 $\frac{\theta_0-\theta_1}{2}-\frac{\pi}{2}=\alpha$,于是有 $|\theta_0|<\alpha<\frac{\pi}{2}$.(19)式中第二项的模等于 $\frac{\tan\alpha}{\tan|\theta_0|}$,大于 1,而这一项的符号显然是负

* 由于周线 $\widetilde{C}$ 位于周线 C 的外面,所以知道 σ 是正的(参看前面所采取的条件).

的. 所以,在情形 2)中,浮力的变分 $\delta P<0$. 上面所陈述的那个命题于是便完全证明了.

67. 浓厚流体内的波 我们考虑一条无限长的没有掩盖的渠道,具有矩形的截面与水平的底部. 设在这渠道内充满了浓厚的流体,它的运动服从下述条件:1) 运动是平行于平面的——流速场平行于垂直的侧壁,并且在所有与这二侧壁平行的流内,都是同样的;2) 设直角坐标系(x,y) (x 轴位于渠道的底部,并且与侧壁平行,y 轴的方向是垂直向上的)以固定的速度 v_0按照 x 轴的方向移动. 我们将假定,在坐标系(x,y)内,流体的自由面以及流速场,都与时间 t 无关.

服从上面所说那些条件的流体运动,我们称为流体在渠道内的*稳定波动*,数 v_0 称为波动的传播速度. 按照我们这个定义,由一个固定在坐标系(x,y)上的观测者的观点看来,这个速度场给出了流体的在通常意义下的稳定运动.

在渠道内的稳定波理论的一般问题,是用下述方式来提出的:假定流体是理想流体,*要求定出它所有可能的稳定波动*.

所提的这个问题可以化成某一个共形映射理论中的问题. 为了这个目的,我们要引进几个附加的参数. 设 $C: y=y(x)$是流体的自由面为平面(x,y)所截而得出的截痕;我们称数

$$H=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}y(x)dx \tag{1}$$

为渠道的平均深度.

再设 g 是重力加速度,ρ 是流体的密度,以及 $h=v_0H$.

有了这些之后,我们可以转移到问题的数学提法上来. 根据第 48 目,由流体是理想流体与运动在平面(x,y)内是稳定的这两个条件,可以得出:复势能

$$\zeta=f(z,C,h),\quad f(\pm\infty,C,h)=\pm\infty \tag{2}$$

是把区域 $D(C): 0<y<y(x)$共形地映射到直线带形上去的函数;这带形的宽度应当等于 h,因为按照所给的条件,流体的通量等于 $v_0H=h$. 在自由面(波面)上,压力应当保持不变,等于大气压力. 所以,按照流体力学中著名的伯努利定理,在曲线 C 上的每一个点处,都应当有关系式

$$p=A-\frac{1}{2}\rho|f'(z,C,h)|^2-g\rho y=\text{const} \tag{3}$$

成立,其中 p 是压力,A 是某一个常量.

因此,我们的问题已经化成下面的问题:

要求构造所有这样的曲线 $C: y=y(x)$,使得把区域 $D(C): 0<y<y(x)$映到一个已知其宽度为 h 的带形 $0<y<h$ 上去的那些共形映射$f(z,C,h)$,在 C 上的每一个点处都满足关系式(3).

由于条件(3)不是线性的,要十分完整地解这个问题遇到了很大的困难,并且一直到现在也还没有得出这样的解. 我们在下面将叙述它的一个近似解,那是根据共形

映射理论中的近似公式而得出的. 在我们这类特殊问题中，是要寻求那些与直线 $y=H$ 偏差很小的具有周期性的偶曲线 $y=y(x)$.

为了进一步计算方便起见，在令 $z=Hz_1$ 和 $\zeta=h\zeta_1$ 后，我们完成流平面和复势能的类似变换. 这时关系式(3)转变为关系式

$$\left|\frac{d\zeta_1}{dz_1}\right|^2+2\nu y_1=C \tag{4}$$

其中 c 为某一常量，

$$\nu=g\frac{H^3}{h^2}=\frac{gH}{v_0^2}, \tag{5}$$

为一个无量度参数.

我们将考虑当 $\alpha=\nu-1$ 是很小正数时的情形. 引入变量 $z_2=\alpha z_1$，$\zeta_2=\alpha\zeta_1$，并且假设，在平面 z_2 中曲线 C 的像满足条件

$$a_1\alpha<y_2<a_2\alpha,\ |y'_2|<a_3\alpha^{\frac{3}{2}},\ |y''_2|<a_4\alpha,\ |y'''_2|<a_5\alpha^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

其中 a_k 是某些常量，根据 65 目的公式(25)我们于是得到近似表达式

$$\left|\frac{d\zeta_2}{dz_2}\right|=\frac{\alpha}{y_2}\left(1+\frac{1}{3}y_2y''_2\right)+O(\alpha^{\frac{5}{2}})$$

或者在转为变量 z_1 和 ζ_1 后是

$$\left|\frac{d\zeta_1}{dz_1}\right|=\frac{1}{y_1}\left(1+\frac{1}{3}y_1y''_1\right)+O(\alpha^{\frac{5}{2}}).$$

把这表达式代入公式(4)中，考虑到条件(6)，我们得到具有精确度到 $O(\alpha^{\frac{5}{2}})$阶的无穷小，沿着对应于平面 z_1 中 C 的曲线的近似公式：

$$\frac{1}{y_1^2}\left(1+\frac{2}{3}y_1y''_1\right)+2\nu y_1=c. \tag{7}$$

我们还采取直线 $y=H$ 作为平面 z 的新的实轴，也就是令 $y=H(1+\eta)$，或者同样 $y_1=(1+\eta)$，此时方程(7)转变为方程

$$\frac{2}{3}\eta''+2\nu(1+\eta)^2+\frac{1}{1+\eta}-c(1+\eta)=0.$$

如果选择常数 c 这样，使得 $\eta=0$ 是最后方程的解($c=2\nu+1$)，并且利用恒等式

$$\frac{1}{1+\eta}=1-\eta+\eta^2-\frac{\eta^3}{1+\eta},$$

那么这一方程可以改写成形状

$$\eta''+3(\nu-1)\eta+\frac{3}{2}(2\nu+1)\eta^2-\frac{3}{2}\frac{\eta^3}{1+\eta}=0, \tag{8}$$

因为我们所找的解偏离直线 $y=H$ 很小，所以可以认为 η 是很小的量. 我们假设，$\max|\eta|$ 与 α 同阶，那么在采用的精确度下(8)式左边部分中最后一项可以去掉. 引入

量 $\alpha=\nu-1$ 取代 ν 和略去 $\alpha\eta^2$ 一项,最终我们得到*

$$\eta''+3\alpha\eta+\frac{9}{2}\eta^2=0. \tag{9}$$

以后的叙述我们将在两个不同的假设下来进行.

(1) 线性理论　我们首先假设,数 $\max|\eta|$ 同 α 比较起来是很小的(振幅很小的波). 于是在弃掉非线性项后,方程(9)便可以线性化:

$$\eta''+3\alpha\eta=0 \tag{10}$$

因为根据以前所采用的条件 $\alpha>0$,所以作为它的解,我们得到线性波

$$\eta=\frac{a}{H}\cos(\sqrt{3a}\cdot x_1).$$

其中 a 为一任意常数. 在变量 x,y 中,这种波的方程具有形状

$$y=H+a\cos\frac{\sqrt{3\alpha}}{H}x, \tag{11}$$

在代入值 $\nu=\alpha+1$ 以后,波的周期由公式(5) 记成形状 $T=\dfrac{2\pi H}{\sqrt{3\alpha}}=\dfrac{2\pi H}{\sqrt{3\left(g\dfrac{H}{\nu_0^2}-1\right)}}$,

由此

$$v_0=\sqrt{\frac{gH}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2\pi H}{T}\right)^2}} \tag{12}$$

因此,当给定了波的传播速度 v_0,并且给定了周期 T 时,问题有无数多个解存在,这些解依赖于一个参数——波的振幅.

这时渠道平均深度 H 由关系式(12)来确定. 由关系式(12)也推出:线性波的传播速度随着其波长一同增大,但任何时候都不会超过 $\sqrt{gH}$. 在(12)中略去一项 $(2\pi H/T)^2$,我们便得出拉格朗日公式

$$v_0=\sqrt{gH}.$$

(2) 长波　现在我们来讨论 $\max|\eta|$ 具有与 α 同阶量的情形. 这时我们必须考虑完整形状的方程(9),于是问题便成为是非线性的.

显然,方程(9)允许第一个积分

$$\left(\frac{d\eta}{dx_1}\right)^2=A-3\alpha\eta^2-3\eta^3, \tag{13}$$

其中 A 是一个任意常数. 我们在波峰处,亦即 $x_1=0$ 时,我们有 $\eta=\eta_0>0$. 便得出 A 的值

---

* 在本书第一版中推导方程(9)时犯了一系列错误,莫依赛耶夫(Н. Н. Моисеев)友好地指出了这些错误.

$$A=3\eta_0^2(\alpha+\eta_0).$$

要方程(9)的周期解存在,还必须找出一个使$\frac{d\eta}{dx_1}=0$的值 $\eta=\eta_1<\eta_0$ (波谷——波的具有最小纵坐标的点). 根据(13),数 η_1应当是方程 $\eta^3+\alpha\eta^2-\eta_0^2(\alpha+\eta_0)$的一个根. 这个方程有一个根是 $\eta=\eta_0$,把它的左端用 $\eta-\eta_0$来除后,我们得到

$$\eta^2+(\alpha+\eta_0)\eta+\eta_0(\alpha+\eta_0)=0.$$

由此,

$$\eta_{1,2}=-\frac{\alpha+\eta_0}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+\eta_0)^2-4\eta_0(\alpha+\eta_0)}. \tag{14}$$

因此,要有周期解存在,必须在根号下的那个表达式$(\alpha+\eta_0)^2-4\eta_0(\alpha+\eta_0)\geqslant 0$,即,$-\alpha\leqslant\eta\leqslant\frac{\alpha}{3}$. 因为我们这里采用 $\eta_0>0$,那么这条件有形状

$$\eta_0\leqslant\frac{\alpha}{3}. \tag{15}$$

由在这条件下能改写成形状$\frac{d\eta}{dx_1}=H\frac{d\eta}{dx}=\sqrt{A-3\alpha\eta^2-3\eta^3}$的关系式(13)求出所讨论的波的半周期

$$\frac{T}{2}=H\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{A-3\alpha\eta^2-3\eta^3}}. \tag{16}$$

在 $\eta_0<\frac{\alpha}{3}$时根号下的表达式在积分区间的端点 η_0和 η_1处有单根,所以量 T 是有限的. 也容易写出(在 $0\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}$一段上)波的一半的方程

$$x=H\int_{\eta}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{A-3\alpha\eta^2-3\eta^3}}. \tag{17}$$

直接可看出,条件 $\eta_0<\frac{\alpha}{3}$是有波特征的方程(9)的解存在的充分条件. 不同于线性情形波的振幅不可以认为是任意的,而在固定速度 v_0时它依赖于周期 T.

我们指出所得到的解的一些定性的性质,这些性质都可以由上面所列举的那些式子导出.

1) 波的周期 T,随着波的纵坐标 η_0的增大而增大,也随着波的振幅 $\eta_0-\eta_1=2a$ 的增大而增大. T 的最小值$T=\frac{2\pi H}{\sqrt{3\alpha}}$,对应于 η_0是个无穷小量时的线性波的情形. 当 η_0接近于$\frac{\alpha}{3}$时,T 无限制增大,而当

$$\eta_0=\frac{\alpha}{3}$$

时,周期解便蜕化成一条在 $x=0$ 时有唯一极大值的曲线,且具有渐近线(图 146):

$$\eta=-\frac{2}{3}\alpha.$$

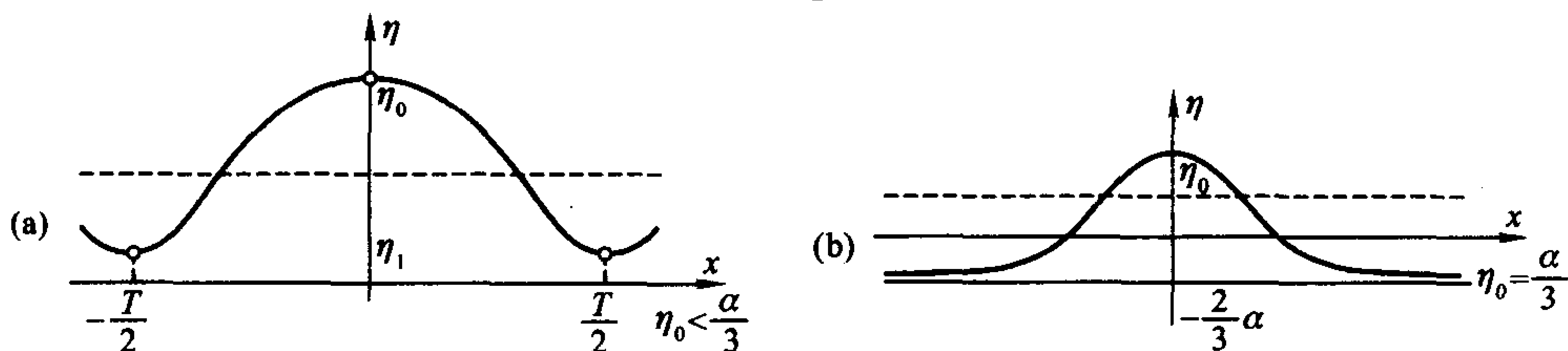


图 146

在后一种情形解容易仔细地写出显式,如果注意到,在 $\eta_0=\frac{\alpha}{3}$时由(14)式我们得出 $\eta_{1,2}=-\frac{2\alpha}{3}$,从而方程(13)采取形状

$$\frac{d\eta}{dx_1}=\sqrt{3(\eta_0-\eta)}(\eta-\eta_1).$$

这个具有分开变量的微分方程可以用初等函数求积分的,并且它在 $x_1=0$ 时取值 $\eta=\eta_0=\frac{\alpha}{3}$的解有形状

$$\eta=\alpha\left(\frac{1}{3}-\operatorname{th}^2\frac{\sqrt{3\alpha}}{2}x_1\right),$$

或者用变量 x 和 y 表示有形状

$$y=H+\alpha H\left(\frac{1}{3}-\operatorname{th}^2\frac{\sqrt{3\alpha}}{2H}x\right). \tag{18}$$

所作出的那个非周期解叫做**孤波**.

2) *波在波峰处的曲率,总大于其在波谷处的曲率.*

3) *当 α 增大时,波的传播速度逐渐减小.*

最后,我们来看一下,对于使所取的$|f'|$的近似表达式对真值的偏差很小的那些条件(见第 65 目),我们所作出的解能满足到什么程度.为此目的,我们需要估计函数 η 的值与它的前三阶导数的值.我们有

$$-\alpha^*<\eta<\frac{1}{2}\alpha^*.$$

但是此时根据(14)与(9),便有

$$|\eta'|<k_1\alpha^{*\frac{3}{2}},|\eta''|<k_2\alpha^{*2},|\eta'''|<k_3\alpha^{*\frac{5}{2}},$$

其中 k_1,k_2,k_3是三个数值常量.因此,在用$|f'|$的近似表达式来代替$|f'|$时,我们可能会有 $\alpha^{*\frac{5}{2}}$阶的误差.

利用所构成的近似解与一般的变分定理,可以严格地证明前面所有描述的各组波都存在,并且可证明我们的近似解与正确解仅有高阶无穷小的偏差.

68. 具有流股障碍的绕流 具有流股障碍的绕流问题,在第 48 目中已经提出了.在这里我们将举出它的一个近似解,以及以前面所导出的那些变分原理为基础的一些定性方面的研究结果(见 M.A.Лаврентьев[1]).为了简单起见,我们只限于讨论具有一条对称轴、所绕流的那些物体都是关于这条轴对称的那种流动的情形.首先我们来讨论对于对称的翼剖面的绕流问题.按照第 48 目,这问题可以化成下面这个共形映射理论的问题:

*设在上半 z 平面内,给定了连接 x 轴上点 $x_1\leqslant 0$ 与 y 轴上点 ib 的一段弧 γ_1.要求把点 ib 与 $z=\infty$ 用一条位于上半平面内的曲线 γ_2 连接起来,并且使得把位于曲线 $\gamma=(-\infty,x_1)+\gamma_1+\gamma_2$ 上方的区域 $D(\gamma)$ 共形映射到上半平面上去的那个函数**

$$w=f(z,\gamma);f(\infty,\gamma)=\infty,f'(\infty,\gamma)=1 \tag{1}$$

在弧 γ_2 上满足条件

$$|f'(z,\gamma)|=c=\text{const} \tag{2}$$

(图 147).

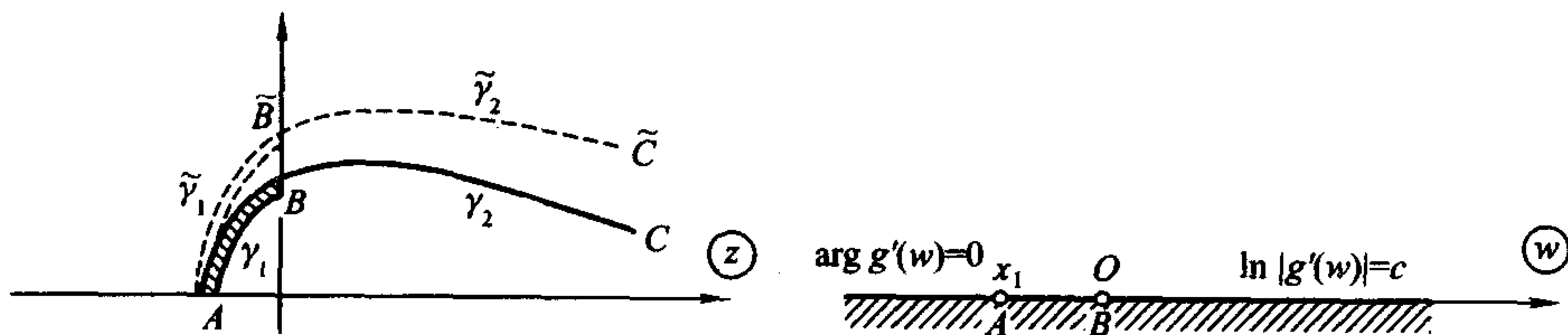


图 147

我们来勾勒解这问题的一种近似方法.把所求函数(1)的反函数记作 $z=g(w)$.因为函数(1)实施一个映到上半平面上的共形映射,所以 $g'(w)$在这上半平面内是解析的,并且不等于 0,因此,函数

$$\ln g'(w)=\ln|g'(w)|+i\arg g'(w) \tag{3}$$

在上半平面内也是解析的.显然,在 u 轴的对应于 x 轴上的射线$(-\infty,x_1)$的那条射线$(-\infty,A)$上,我们有 $\arg g'(u)=0$,而在对应于 γ_2的那条射线(B,∞)上,有 $\ln|g'(u)|=c_1$,其中 c_1是某个常数(见图 147).在对应于 γ_1的那段线段(A,B)上,$\arg g'(u)$是未知的,因为(A,B)上的点与 γ_1上的点之间的对应关系还不曾知道.但是我们可以自己来给定(A,B)上的点与 γ_1上的点之间的一种对应关系 $\zeta=\zeta(u)$,于是我们便能求得

$$\arg g'(u)=\arg\zeta'(u)=\varphi(u). \tag{4}$$

现在,求函数 $\ln g'(w)$这问题,便化成了对于上半平面的一个混合边值问题,因为在射线$(-\infty,A)$上,$\text{Im}\ln g'(w)$是已知的,而在射线(A,∞)上,$\text{Re}\ln g'(w)$是已知的.解这个边值问题,例如,用第 54 目中的凯尔迪什-谢道夫公式来解,我们便得到一个函数

$$z=\tilde{g}(w), \tag{5}$$

这函数实施一个把上半平面映到区域 $D(\tilde{\gamma})$上去的共形映射,其中 $\tilde{\gamma}=(-\infty,x_1)+\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2$ (见

* 由(1)中可以看到,我们限于考虑的流,其在无穷远处的速度都等于 1 而且方向是沿 x 轴的.一般的情形很容易化成这种情形.

图 147).

根据函数(5)的构成，它的反函数 $w=f(z,\tilde{\gamma})$解决了带有流股障碍的翼剖面 $\tilde{\gamma}_1$ 的绕流问题. 如果 $\tilde{\gamma}_1$ 与 γ_1 相差得太多，我们便应当把(4)中函数 $\varphi(u)$的给定加以修改. 为了要更适宜地进行这个修改，我们应当具备一些关于当弧 γ_1 经受形变时函数(1)将怎样改变的定性知识. 我们将举出一些与此有关的基本结果，而不予证明.

(1) *如果 γ_1 由有限多段具有有界曲率的弧所构成，且每一条直线 $x=x_0$ $(x_1<x_0\leqslant 0)$都与 γ_1 或者仅相交于一点，或者在一段线段上相重合，那么这个流股问题的解必定存在，而且是唯一的.*

这时可以设曲线 γ_2 从某一个点 $x=\xi>0$ 起，同 x 轴相重合. 我们把这样的曲线的方程记作

$$y=y(x;\xi). \tag{6}$$

在这个情形下，速度(2)在射线(ξ,∞)上等于常量这个条件，可以用下面的条件来代替：从上面与从下面趋近于这射线时，速度的值相同的条件，即，具有流股障碍绕行 Γ_1 (弧 Γ_1 是由 γ_1 以及关于 x 轴与 γ_1 对称的那段弧所构成的)，时流的复势能(1)的单值性条件. 换句话说，可以设流在绕行弧以后合拢起来.

(2) *如果在某一个值 $x=x_2$ 处，γ_2 上的点的纵坐标等于 0，那么当 $x>x_2$ 时，弧 γ_2 必同 x 轴相重合*(换句话说，$x_2=\xi$).

(3) *在$(0,\xi)$这段上，弧 γ_2 是解析弧.*

(4) *在 γ_2 上，切线的斜率不可能达到极大值或极小值.*

(5) *当 $\xi<\infty$ 时，曲线 γ_2 上不可能有任何点，其纵坐标大于曲线 γ_1 上的点的最大纵坐标.*

(6) *如果曲线 γ_1 上的点的最大纵坐标对应于 $x=0$，那么 $\xi=\infty$，即，γ_2 具有无穷远分支.*

(7) *设当横坐标相同时，曲线 $\tilde{\gamma}_1$ 上的点的纵坐标都大于或等于 γ_1 上的点的纵坐标，并且这两条曲线具有公共的端点，那么 $\tilde{\xi}\leqslant\xi$，和*

$$y(x;\tilde{\xi})\leqslant y(x;\xi), \tag{7}$$

并且当 $0<x<\xi$ 时，式中的等号只有在 γ_1 同 $\tilde{\gamma}_1$ 重合的情形下方能成立(参看图 148).

所有的这些结果都可以利用复变函数论的方法来得出，特别是，可以利用第 61 目中的变分原理来得出. 关于这些结果的证明，读者可以在 М. А. Лаврентьев[5]这篇论文中找到.

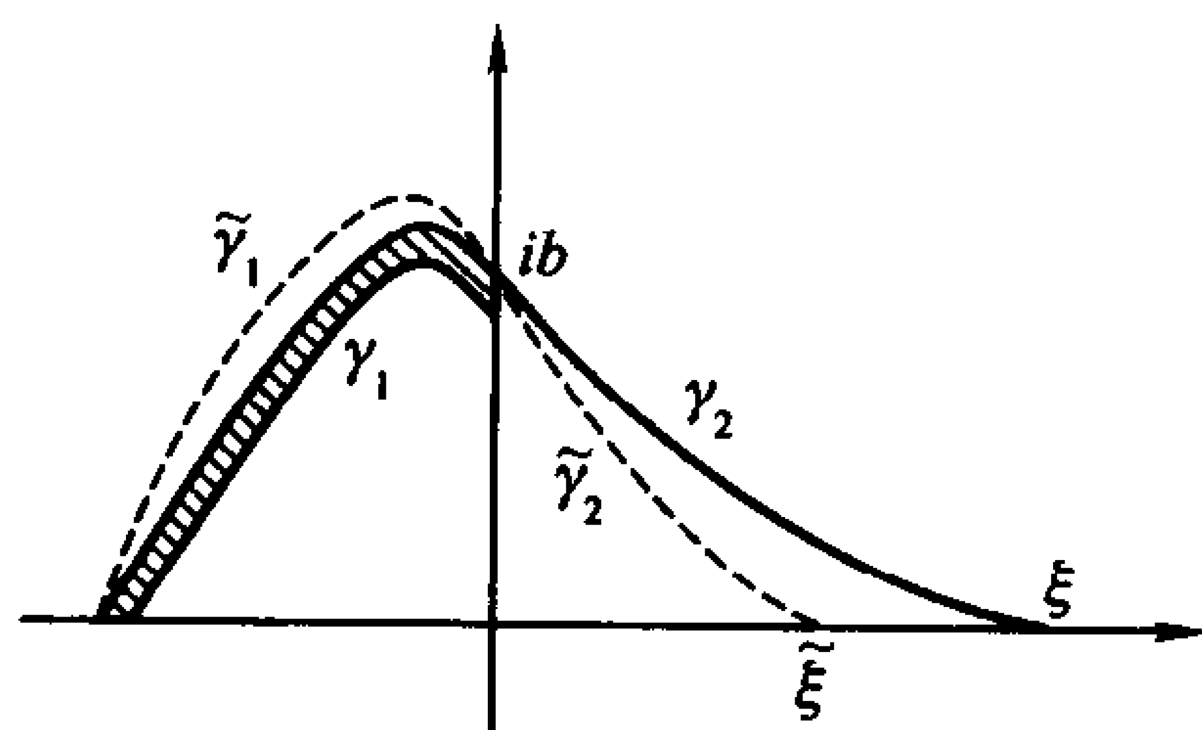


图 148

由结果(7)中可以得出，$y(x;\xi)$永远小于 $y_b(x)$——这里 $y_b(x)$是绕着垂直线段$(0,ib)$流的流股的纵坐标，——这是基尔霍夫(Kirchhoff)所研究过的情形. 由同一结果(7)中还可以知道，在结果(7)中的那些条件之下，作用于弧 $\Gamma_1=\gamma_1+\gamma'_1$上(其中 γ'_1是 γ_1的关系于 x 轴的镜面映像)的压力的合力 $P(\Gamma_1)\leqslant P(\tilde{\Gamma}_1)$，其中 $\tilde{\Gamma}_1=\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}'_1$.

在结束时，我们再举几个有关对凸周线的对称绕流的结果，也不予证明. 设已经给定了一条关于 x 轴对称的封闭的凸周线 C，它与 x 轴相交于点 $x_1<0$ 及 $x=0$. 设 γ_t 是周线 C 的位于 x 轴上线段(x_1,t)的上方的那一部分$(x_1<t<0)$. 显然上面所弄清的那个问题的对于弧 γ_t 的解是

$$y=y_t(x;\xi), \tag{8}$$

显然，如果曲线(8)完全在 C 的外面，那么这个解(8)便给出了绕具流股障碍的闭周线 C 而行的流

的一支自由流股.

有下列这些命题成立:

(1) 周线 C 上在对称绕流中有可能发生流股障碍的那些点的集合,是一段弧 C_0,它的中心在点 x_1 处,它的端点位于周线 C 上的具有极大纵坐标(或极小纵坐标)的点的左面(图 149).

(2) 对应于两个不同的对于 C 的绕流的自由流股,彼此没有公共点.

(3) 在两个不同的具有流股障碍的对 C 的绕流中,对应于较先的流股障碍的那个流体,它的在 C 上的流体压力要比较大一些.

这些命题的证明,读者可以在本书末所引证的论文 M. A. Лаврентьев[5]中找到.

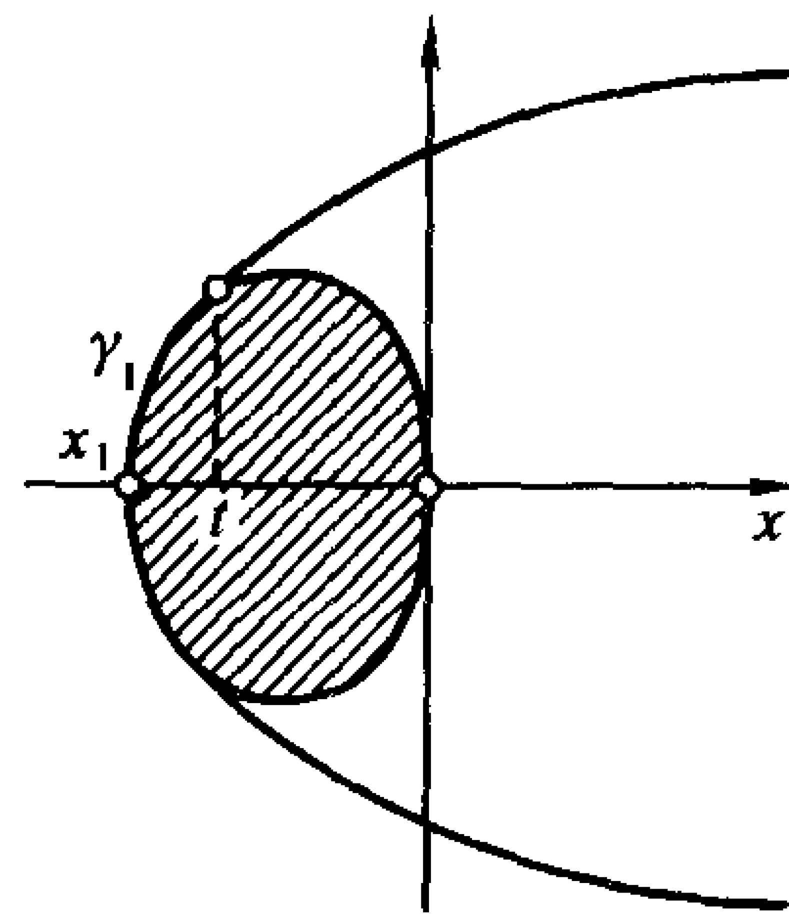


图 149

69. 地下水的运动　经验证明,在同样的土壤中,地下水的运动充分精确地遵循着理想液体的运动规律. 同以前一样,我们只限于讨论平面的情形,我们设液体渗透过一个充满着土壤的区域 D,并且假定其运动是稳定的. 把在区域 D 中任意一个点 z 处的压力记作 $p(z)$. 有下述的经验定律(达尔西)成立: *在点 z 处液体质点的速度,与压力的梯度成正比,而它的方向则与 p 的梯度的方向相反*

$$\boldsymbol{V} = -\kappa \operatorname{grad} p. \tag{1}$$

比例系数 κ 仅与土壤的性质有关,称为**过滤系数**. 对达尔西定律再加上液体是不可压缩的条件

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0, \tag{2}$$

我们便得出:渗透过区域 D 的液体的运动的速度场,具有势能

$$u(z) = -\kappa p(z), \tag{3}$$

这是一个调和函数,在区域 D 内是正则的.

在堤坝的设计中,下述问题的解,是设计的计算中最主要的因素之一.

给定一个区域 D,它的边界 C 是由下面那些直线段所构成的:

1) 直线 $y = -h_0$ (堤基),

2) x 轴上的射线$(-\infty, 0)$,

3) 线段$(0, l)$ (护坦),

4) x 轴上的射线(l, ∞),

5) 由护坦上的点 $x_1 = 0, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 出发所作的 n 条垂直线段(凹沟)c_j,其长度分别为 l_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$.

区域 D 中充满了过滤系数为 κ 的可透水的土壤. 在护坦$(0, l)$上面建立了一个建筑物 A. A 的左面在 x 轴的上面有一层自由液体,其厚度等于 H_2,在 A 的右面也有一层自由液体,其厚度等于 H_1 $(H_1 < H_2)$. 建筑物 A 的侧壁、护坦、凹沟以及堤

基，都假定是不透水的(参看图 150).

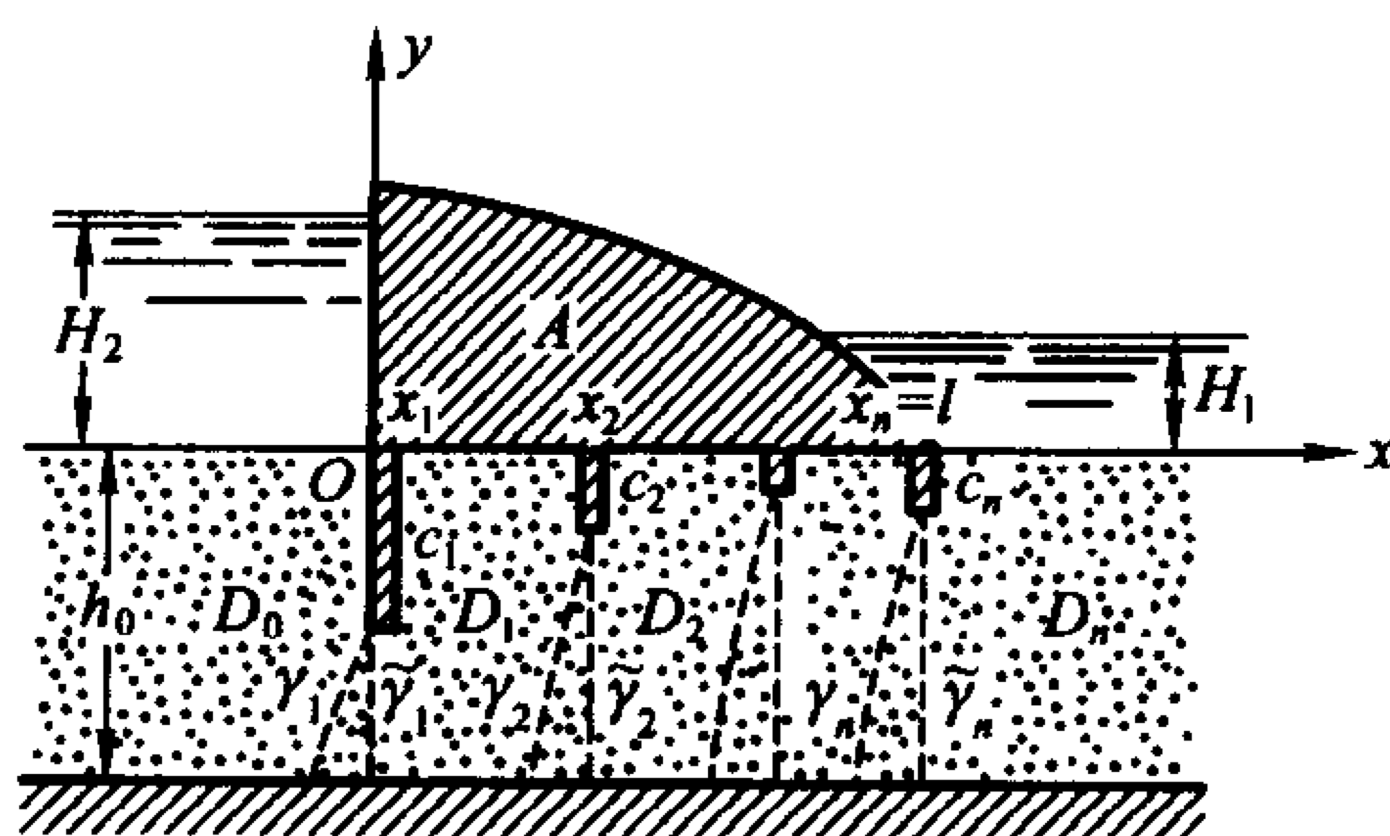


图 150

在上面所列举的那些条件之下，要求定出液体在区域 D 内的稳定运动．这时设计者所关心的主要是下面那三个量：1) 液体的通量，2) 在护坦上的最大压力与普通压力，3) 在射线(l,∞)上的最大“渗出”速度．

我们来寻求速度场的势能 u 所应当满足的边值条件．由于假定堤基 $y=-h_0$、护坦与那些凹沟都是不透水的，在 C 的对应于这些因素的部分上，都应当发生绕流，即，应当满足关系式

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0. \tag{4}$$

除此之外，在$(-\infty,0)$与(l,∞)这两段上，压力 p 应当是常量：在左边那段上 $p=\rho H_2+p_0$，在右边那段上 $p=\rho H_1+p_0$，其中 ρ 是液体的密度，p_0是大气压力．所以，沿着$(-\infty,0)$有

$$u=-\kappa(\rho H_2+p_0)=u_2, \tag{5}$$

沿着(l,∞)有

$$u=-\kappa(\rho H_1+p_0)=u_1. \tag{6}$$

因此，在建筑物下面的地下水的运动问题，可以化为第 55 目中对于调和函数的混合边值问题的一个特例．

我们提出考虑到边值条件(4)，(5)，(6)的特性的、解这问题的两个方法：

(1) 把流体的流函数记作 v．根据条件(4)，v 沿着堤基$y=-h_0$保持常数值 v_0，沿着护坦与那些凹沟保持常数值 $v=v_1$．复势能 $u+iv$ 实施一个把区域D 映到由直线$u=u_0,u=u_1,v=v_0,v=v_1$所围成的矩形上去的共形映射，并且点$-\infty,0,l,\infty$变换成矩形的四个顶点．由于一个矩形可以用椭圆正弦来映射成上半平面(见第 39 目，例题 1)，我们可以只讨论把区域 D 映到上半平面 $\operatorname{Im}\zeta>0$ 上去的映射

$$\zeta=f(z). \tag{7}$$

设在这个映射下点 $0,-\infty,\infty,l$ 变换成点a_1,a_2,a_3,a_4．我们可以用一个辅助的线

性变换,把这四个点再变换成点 $-\frac{1}{k},-1,1,\frac{1}{k}$.换句话说,可以预先设定

$$f(\pm\infty)=\pm 1,f(0)=-\frac{1}{k},f(l)=\frac{1}{k}.$$

于是所求的复势能的形状是

$$u+iv=\frac{u_1-u_2}{2K}\operatorname{sn}^{-1}(\zeta,k)+\frac{u_1+u_2}{2},\tag{8}$$

其中 sn^{-1} 表示椭圆正弦的反函数(见第39目).矩形的边长等于 u_1-u_2 和 $v_1-v_0=\frac{K'}{2K}(u_1-u_2)$,其中

$$2K=2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\quad K'=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

它的高

$$v_1-v_0=\frac{K'}{2K}\kappa\rho(H_2-H_1),$$

便给出了在建筑物下的液体的通量.

(2) 在映射(7)下,函数 $u(z)$ 与 $v(z)$ 变换成函数

$$u[g(\zeta)]=U(\zeta),\quad v[g(\zeta)]=V(\zeta),\tag{9}$$

其中 $z=g(\zeta)$ 是(7)的反函数,并且函数 U 在线段 $\left(-\frac{1}{k},-1\right)$ 与 $\left(1,\frac{1}{k}\right)$ 外乃是处处正则的,在这两段线段上分别取值 u_2 与 u_1,而函数 V 在线段 $\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$,$(-1,1)$ 与 $(1,\infty)$ 外乃是处处正则的,并在这三个线段上分别取值 v_1,v_0,v_1.所以 $U(\zeta)+iV(\zeta)$ 的表达式可以按照第54目中的凯尔迪什-谢道夫公式来得出.

对于所考虑的这个问题,应用变分原理,可以很容易地得出当建筑物的那些因素在数量上有所改变时,有关通量、渗出速度以及压力的改变特征的一系列的结论.

1) *如果使一条或几条凹沟的长度增加,那么所有的流线便都降低,通量减小,渗出速度也减小.如果要想使渗出速度减低,那么,以加长最右端的那条凹沟为最有效.*

2) *如果使一条凹沟的长度增加,那么护坦上在这条凹沟之左边处的压力便增大,而在其右边处的压力则减小;特别是,加长最右端的那条凹沟,便使得在护坦上处处压力都增大.*

前面那些定理及其所对应的公式,还给我们有可能来论证并精确各种用来求这问题的数值解的近似方法.

在最广泛使用的那些用来近似地确定势能 u 的方法中,有一种就是所谓**断片法**,是由巴甫洛夫斯基(Н. Н. Павловским)院士在1922年提出的(见[9]).我们来说明这方法的实质.

经过那些凹沟 c_j 的端点,作势能为 $u=n_j$ 的等势能线 γ_j,以把这些端点同堤基连

接起来,使得 c_j 与 γ_j 在一起形成一条与堤基正交的光滑曲线. 这些曲线 γ_j 把区域 D 分成 $n+1$ 个部分——"断片" $D_0, D_1, \cdots, D_n$ (图 150). 在断片 D_0 内,势能 u 满足条件

$$u=\begin{cases}U_0, \text{在}(-\infty,0)\text{上},\\ u_1, \text{在 } \gamma_1\text{上},\end{cases}$$

而在其边界的其余部分上 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. 在断片 D_n 内,

$$u=\begin{cases}U_n, & \text{在}(l,\infty)\text{上},\\ u_n, & \text{在 } \gamma_n\text{上},\end{cases}$$

而在其边界的其余部分上 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. 对于断片 D_j $(j=1,2,\cdots,n-1)$,边值条件的形状是

$$u=\begin{cases}u_j, & \text{在 } \gamma_j\text{上},\\ u_{j+1}, & \text{在 } \gamma_{j+1}\text{上},\end{cases}$$

在其边界的其余部分上 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

现在我们注意,如果在相邻的凹沟之间的距离,同凹沟的长度比较起来是很大的,那么曲线 γ_j 与那些垂直于堤基的直线段 $\tilde{\gamma}_j$ 的差异便很小. 由在 D_j 中把 γ_j 与 γ_{j+1} 换成直线段 $\tilde{\gamma}_j$ 与 $\tilde{\gamma}_{j+1}$ 所得到的那个矩形,我们记作 $\tilde{D}_j$,这时区域 $\tilde{D}_0$ 与 $\tilde{D}_n$ 都是半个带形(图 150).

我们转到势能 u 的近似表达式的构造上来. 首先,我们在每一个矩形 $\tilde{D}_j$ 内根据下述的已知边界条件构造一个调和函数 $\tilde{u}_j(z)$

$$\tilde{u}_j(z)=\begin{cases}0, & \text{在 } \tilde{\gamma}_j\text{上,对于 } j=1,\cdots,n \text{ 和在}(-\infty,0)\text{上对于 } j=0,\\ 1, & \text{在 } \tilde{\gamma}_{j+1}\text{上,对于 } j=0,\cdots,n-1 \text{ 和在}(l,\infty)\text{上对于 } j=n.\end{cases} \tag{10}$$

而在 $\tilde{D}_j, j=0,\cdots,n$ 的边界的其余那些部分上 $\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial n}=0$. 显然,$\tilde{u}_j$ 的构造可以归结到把矩形映到半平面上去的映射和应用凯尔迪什-谢道夫公式,并且由于所给的边值条件很简单,这公式的形状也极简单.

我们取下面这个函数来作为所求的函数 u 在区域 $\tilde{D}_j$ 内的近似值:

$$\tilde{u}\approx(u_{j+1}-u_j)\tilde{u}_j(z)+u_j \quad (j=0,1,2,\cdots,n); \quad u_0=U_0, \quad u_{n+1}=U_n \tag{11}$$

这函数在矩形 $\tilde{D}_j$ 内显然满足边值条件(10),并且 $\tilde{\gamma}_j$ 与 $\tilde{\gamma}_{j+1}$ 同 γ_j 与 γ_{j+1} 相差愈小,它同 u 的真值的相差也愈小.

在(11)式中含有 n 个未知的参数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$,它们可由液体的流量在相邻的断片内相等这个条件来确定. 设 $\tilde{v}_j(z)$ 是 $\tilde{u}_j(z)$ 的共轭函数,而

$$m_j=\int_{-h_0}^{-l_j}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x}dy, \quad m_{j+1}=\int_{-h_0}^{-l_{j+1}}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x}dy \tag{12}$$

是它在线段 $\tilde{\gamma}_j$ 与 $\tilde{\gamma}_{j+1}$ 上的增量. 于是, $u(z)$ 的共轭函数 $v(z)$ 在区域 $\tilde{D}_j$ 内便近似地等于 $(u_{j+1}-u_j)\tilde{v}_j(z)$, 所以, 流量在断片 $\tilde{D}_{j-1}$ 与 $\tilde{D}_j$ 内相等这个条件, 可以写成

$$m_{j-1}(u_j-u_{j-1})=m_j(u_{j+1}-u_j)\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{13}$$

的形状*. 方程组(13)是一组含有 n 个未知量 u_j 的 n 个线性方程. 从这方程组中定出 u_j, 再把它们的值代入(11)内, 我们便得出了所求的函数 $u(z)$ 在全部断片内的近似表达式.

在前面已经指出过, 断片法的精确度, 依赖于曲线 γ_j 对直线段 $\tilde{\gamma}_j$ 的偏差量. 我们指出一个估计误差的数值的方法. 我们取第 j 条凹沟来考虑. 设 D' 是区域 D 的在这条凹沟 c_j 左边的部分, 而 D'' 是 D 的在 c_j 右边的部分. 我们用关于 c_j 与 D' 对称的那个区域 D''_1 来代替 D''. 对于区域 $D_1=D'+D''_1$ 来说, 曲线 γ_j 显然就同直线段 $\tilde{\gamma}_j$ 相重合. 利用那些变分定理, 我们可以估计出当由 D_1 换成 D 时, 实施把区域 D_1 映到半平面上去的共形映射的那个函数 $f(z)$ 的变分的值, 同时也得出了 $\tilde{\gamma}_j$ 对 γ_j 的偏差的估值. 我们的问题是要估计那依赖于 $\tilde{\gamma}_j$ 对 γ_j 的偏差的, 或者说, 依赖于区域 D_j 对矩形 $\tilde{D}_j$ 的偏差的, u 与 $\tilde{u}$ 的差的值, 但是这个估值是可以利用第 64 目中对于相近区域的共形映射的那些公式来得出的.

依据了对于相近区域的共形映射的那些公式, 还可以对断片法给出实质性的精确化. 我们取振幅等于 b_j 的正弦曲面上连接 c_j 的端点与直线 $y=-h_0$ 的一段半波形为 $\tilde{\gamma}_j$. 认为区域 $\tilde{D}_j$ 是接近于矩形的区域, 我们便可以有效地建立起一个把区域 $\tilde{D}_j$ 映成半平面的映射, 从而便可以构成一个函数 $\tilde{u}_j$, 使它在 $\tilde{\gamma}_{j+1}$ 上等于 1, 在 $\tilde{\gamma}_j$ 上等于 0, 而在边界的其余部分上它的法线方向的导数都等于 0. 函数 u_j 与正弦曲面的参数 b_j, b_{j+1} 有线性依赖关系. 同前面一样, 根据函数 $u_j(z)$ 我们可以构成所求的势能 $u\approx(u_{j+1}-u_j)\tilde{u}_j+u_j$.

在所构成的 u 的表达式中, 有 $2n$ 个参数 u_j 与 b_j. 方程组(13)给出了 n 个方程. 如果我们要求从 $\tilde{D}_{j-1}$ 中经过 $\tilde{\gamma}_j$ 的上半部流出的液体的流量, 等于经过 $\tilde{\gamma}_j$ 的同一部分流到 $\tilde{D}_j$ 中去的液体的流量的话, 那么我们可以得到还有 n 个方程.

应用第 65 目中把相近区域映到半平面上去的映射的那些公式, 可以得出在已知的结构换到相近的结构时, 计算 u 的值的方法.

在结束时, 我们还要指出一种对于凹沟的*逐次映射方法*, 这方法极完整地引入在 П. Ф. 菲里察科夫(П. Ф. Фильчаков)的论文[10]中.

为了简单起见, 我们来讨论护坦的长度为 l 并具有两条凹沟的情形, 虽然方法是类似的, 而就精确性的意义上说, 这甚至于比更多凹沟的情形还要好一些. 设护坦的长度是 l, 而凹沟的长度是 $l_1=1$ 与 l_2(图 151).

---

* 我们还令 $u_0=0$, $u_{n+1}=2u_n$.

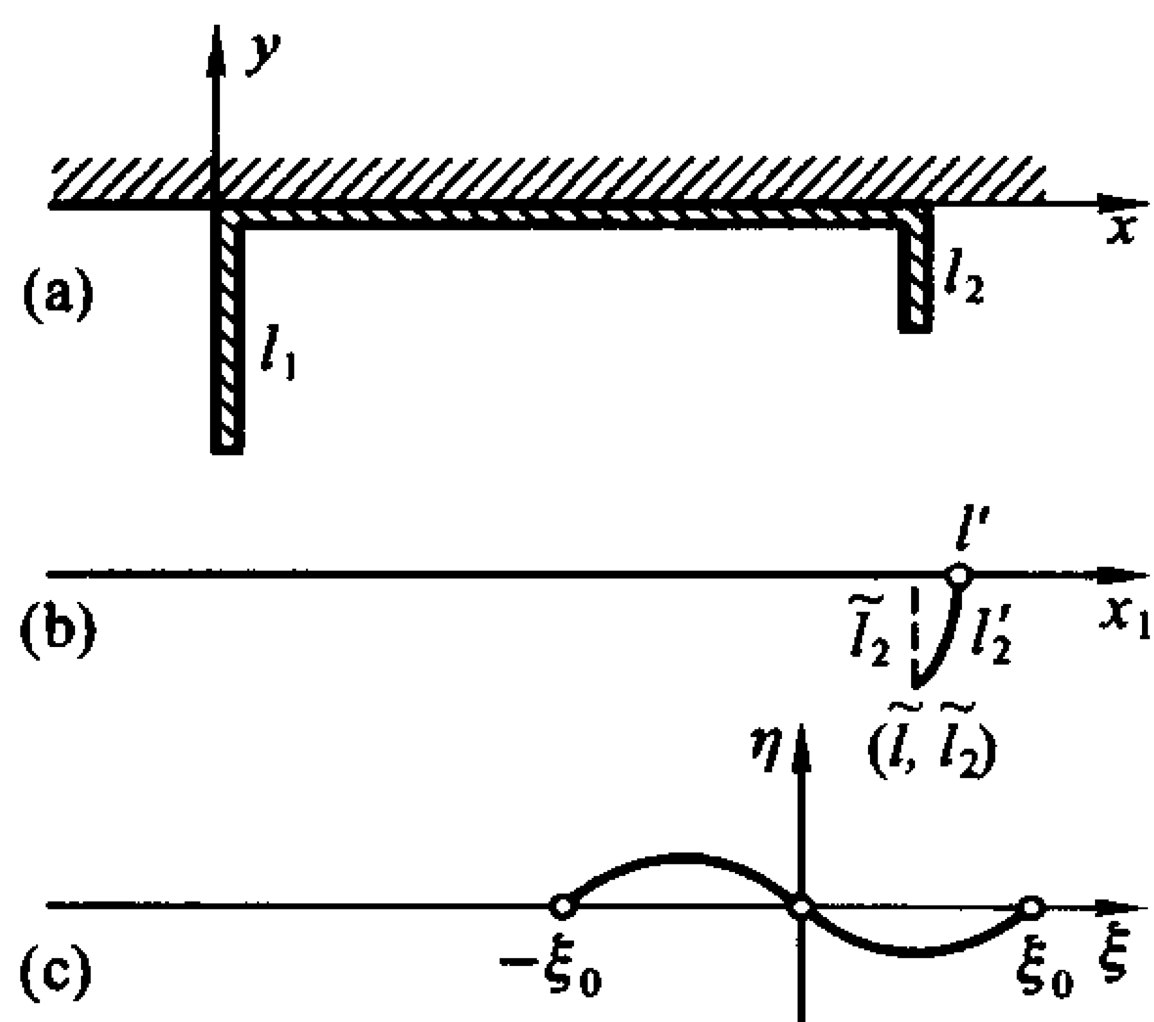


图 151

我们实施一个把去掉了凹沟 l_1 的下半平面映到下半 z_1 平面上去的共形映射

$$z_1=\sqrt{1+z^2}. \tag{14}$$

在这映射下，凹沟 l_2 变换成一条曲线凹沟 l'_2，由实轴 x_1 上的点 $l'=\sqrt{1+l^2}$ 处引出. l'_2 的方程是

$$x_1=l\sqrt{\frac{l'^2+y_1^2}{l^2+y_1^2}}. \tag{15}$$

因为由这方程有 $l\leqslant x_1\leqslant\sqrt{1+l^2}$，所以当 l 很大时，曲线 l'_2 便同直线段相差很小. 我们用 $(\tilde{l},\tilde{l}_2)$ 来表示曲线凹沟 l'_2 的端点的坐标(图 151). 应用泰勒公式，可以得出表示 l'_2 上的点的横坐标的近似方程

$$x_1-\tilde{l}\approx(l'-\tilde{l})\left\{1-\left(\frac{y}{l_2}\right)^2\right\}(1-y^2k_1), \tag{16}$$

其中参数 y $(0>y>-l_2)$ 是凹沟 l_2 上的点的纵坐标，而

$$k_1=\frac{l^2(3\tilde{l}_2+2l')-\tilde{l}_2^3}{\tilde{l}_2^3(l+\tilde{l}_2)^2}$$

是一个常数，当 l 很大时这常数很小，因为 $k_1\approx\frac{1}{l^2}$ (见[10]). 在凹沟的两个端点处，即，当 $y=0$ 时及 $y=l_2$ 时，公式(16)都是完全正确的等式，而不是近似的.

现在我们用经过点 $(\tilde{l},\tilde{l}_2)$ 引出的直线凹沟 $\tilde{l}_2$* 来代换曲线凹沟 l'_2，并且用一个共形映射把去掉了线段 $\tilde{l}_2$ 的下半 z_1 平面映到下半 ζ 平面上去

$$\zeta=\sqrt{1+\left(\frac{z_1-\tilde{l}}{\tilde{l}_2}\right)^2}. \tag{17}$$

* 在图 151(b)中用虚线来表示.

去掉了一段曲线凹沟 l_2' 的那下半 z_1 平面，在这共形映射下变换成一个同半平面相差很小的区域(图 151(c))：它的边界只在线段 $(-\xi_0, \xi_0)$* 上与 ξ 轴不同，在这一段线段上，边界的方程可以近似地表示成

$$\eta \approx \pm \frac{\tilde{l}(l'-\tilde{l})l_2}{l}\xi\sqrt{\xi_0^2-\xi^2} \tag{18}$$

的形状(当 ξ 是负数时取"+"号，当 ξ 是正数时取"−"号). 注意到纵坐标(18)在 $\xi = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}$ 时达到极大值，并且这个极大值等于

$$\eta_{max} = \frac{\tilde{l}(l'-\tilde{l})}{2l} l_2 \xi_0^2,$$

我们可以把(18)表示成

$$\eta \approx \pm \frac{2\eta_{max}}{\xi_0^2}\xi\sqrt{\xi_0^2-\xi^2} \tag{19}$$

的形状.

利用对近似于半平面的区域的映射的公式(见第 65 目中的(2)式)，П. Ф. 菲里察科夫曾经证明：**逐次映射方法(在其中用直线凹沟 $\tilde{l}_2$ 来代替曲线凹沟 l'_2)的误差，与凹沟长度 l_2 的立方成正比，与凹沟之间的距离 l 的立方及横坐标 ξ 成反比.**

这就是，横坐标 ξ 的正确值，与它的由(14)式与(17)式所得出的近似值之间的差，不超过

$$\delta = \frac{\sqrt{2}l_2^3}{2\pi l(l^2+1)\xi} \tag{20}$$

(见[10]).

* 点 $\pm\xi_0$ 是点 $z_1 = l'_2$ 在映射(17)下的像.

第五章　函数论在分析上的应用

在这一章里，我们将讨论函数论在分析上的一些对于物理学者具有极大兴趣的应用.

其中§1将讲述用无穷级数与无穷乘积来表示一些常被利用于各种问题中的函数.在§2里，将给出计算实变函数与复变函数的积分的方法，以及计算一个解析函数在某些给定区域内的零点个数的方法，这些方法对于振动理论是很重要的.最后，在§3里，将指出一些得出函数对于变元的甚大值时的近似表达式——即所谓渐近公式——的方法，这些方法在应用上非常有用.

§1　展开成级数与无穷乘积

首先，我们要读者回忆起关于展开函数为泰勒级数和洛朗级数的基本规则，且将在一系列的例子中，阐明实际求得这些展开式的方法.

70. 泰勒级数与洛朗级数　在第一章里，我们已证得：任意一个在圆$|z-a|<R$内解析的函数，在这圆内可表为自己的泰勒级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

它的系数由下列公式来确定

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{1}$$

其中C是包围点a且位于圆内的任意一条简单闭周线(参看第18目).

洛朗级数是泰勒级数的推广.借助于它们可将在环形$r<|z-a|<R$　($r\geqslant 0$,

$R\leqslant\infty$)内解析的函数表示为:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

洛朗级数的系数由下列公式来确定:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),\tag{2}$$

其中 C 是位于环形内部且包含环形的内圆周的任意一条简单闭周线(第 21 目).

公式(1)与(2)很少用来得到具体的展开式.通常是借助于对幂级数的运算,间接地求出函数的泰勒与洛朗展开式.同时,有时将间接得到的系数,与直接应用这两组公式而得到的系数相比较,会引出有益的关系式.

我们将举出几个函数展开成泰勒级数与洛朗级数的例子.

例 1 某些用积分来表达的非初等函数的泰勒展开式,可以非常简单地得出.

*误差的概率函数*由下列积分来定义

$$\operatorname{erf} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\zeta^2}d\zeta,\tag{3}$$

它不能用初等函数来表达.要得出 erf z 的中心在点 $a=0$ 的泰勒级数展开式,只需在 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\zeta}$ 的展开式中以 $-\zeta^2$ 替代 ζ,再将后者逐项求积分:

$$\operatorname{erf} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{z^{2k+1}}{2k+1},\tag{4}$$

所得到的展开式对于所有有限的 z 都收敛.当 x 沿着正半轴趋于∞时,函数趋于极限 *

$$\operatorname{erf}\infty=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=1,$$

而且收敛得非常地迅速:erf 2 与 erf ∞仅相差 0.5%.

但是,当 z 任意地趋于∞时,erf z 的极限不存在.因为从得到的展开式,显然可见 $z=\infty$是 erf z的本性奇点.对于实值的自变量,函数 erf x 的图像被描绘在图 152 中,虚线表示它的导数的图像.

与函数 erf 一起,常常也考虑把它补足到 1 的补函数:

$$\operatorname{Erf} z=1-\operatorname{erf} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta.\tag{5}$$

类似地,可得出*积分正弦*的展开式

$$\operatorname{si} z=\int_0^z\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\tag{6}$$

它对于所有有限的 z 都收敛.对于实值的自变量,si x 的图像被描绘在图 153 中,虚线表示它的导数的图像.当 x 沿着正半轴趋于∞时,si x 趋于极限**

---

* 积分(5)——所谓泊松(Poisson)积分——在各种分析教程中都有计算.例如,可参看 Фихтенгольц,卷Ⅲ,279 页.

** 积分(7)——所谓欧拉积分——在各种分析教程中都有计算,也可参看第 73 目,例 2.

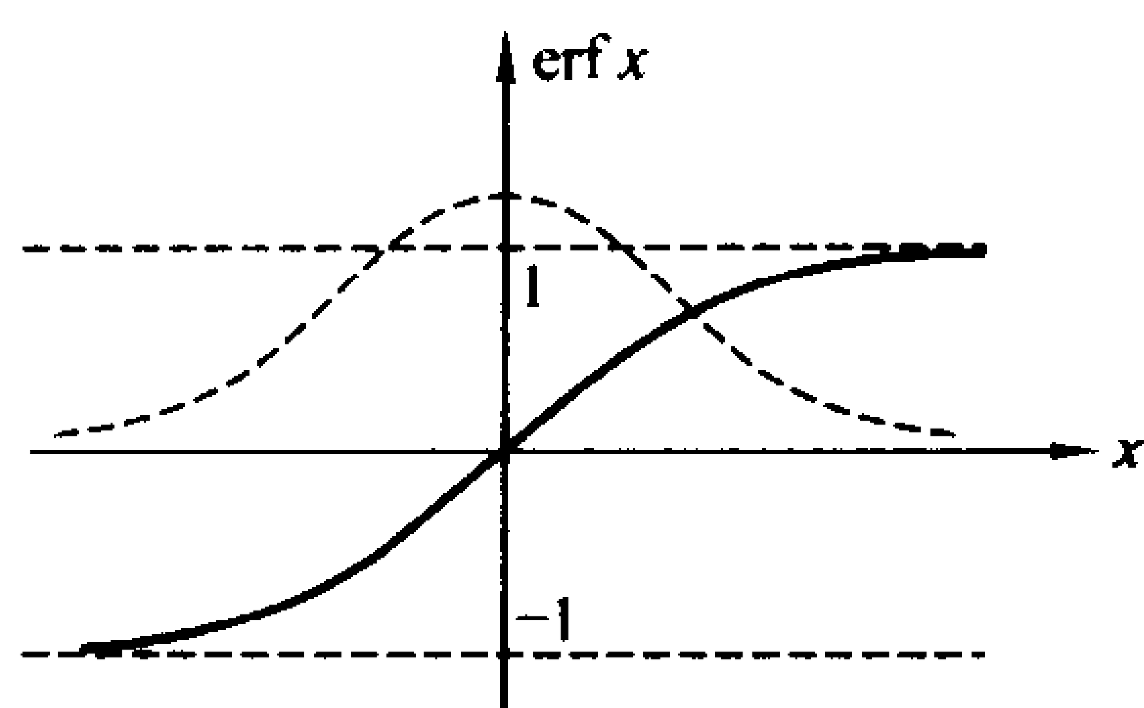


图 152

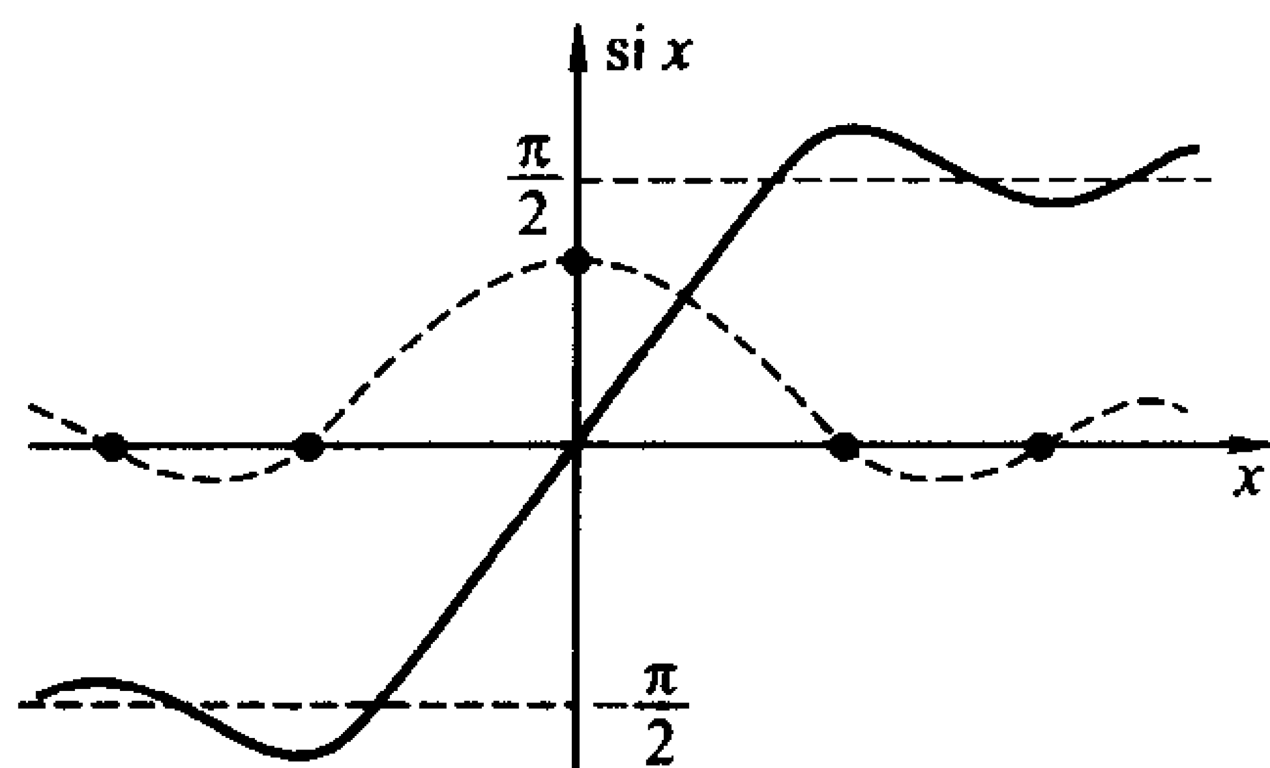


图 153

$$\mathrm{si}\ \infty=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

但 $\lim_{z\to\infty}\mathrm{si}\ z$ 不存在,因为 $z=\infty$ 是 si z 的本性奇点.同样与函数 si 一起考虑函数

$$\mathrm{Si}\ z=\int_\infty^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=\mathrm{si}\ z-\frac{\pi}{2},$$

也同样考虑积分余弦

$$\mathrm{Ci}\ z=\int_\infty^z \frac{\cos\zeta}{\zeta}d\zeta.$$

例 2　勒让德多项式 $P_n(z)$ 定义为泰勒展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zw+w^2}}=1+P_1w+P_2w^2+\cdots+P_nw^n+\cdots \tag{8}$$

中 w^n 项的系数.要确定这些系数,将(8)对于 w 来微分:

$$\frac{z-w}{\sqrt{(1-2zw+w^2)^3}}=P_1+2P_2w+\cdots+nP_nw^{n-1}+\cdots,$$

再将得到的展开式与(8)相比较:

$$(1-2zw+w^2)(P_1+2P_2w+\cdots+nP_nw^{n-1}+\cdots)=(z-w)(1+P_1w+P_2w^2+\cdots+P_nw^n+\cdots).$$

现在使 w 的同次幂的系数相等,得

$$P_1=z,\quad 2P_2-2zP_1=-1+zP_1,\text{或 } P_2=\frac{3z^2-1}{2},$$

并且往后

$$(n+1)P_{n+1}-2nzP_n+(n-1)P_{n-1}=zP_n-P_{n-1},$$

或

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)zP_n+nP_{n-1}=0. \tag{9}$$

利用这个递推公式,当已知最前面两个多项式 P_1 与 P_2 后,其余的都可以求出.

例 3　切比雪夫多项式 $T_n(z)$ 定义为展开式

$$\frac{4-w^2}{4-4zw+w^2}=1+\sum_{n=1}^\infty T_n(z)w^n \tag{10}$$

中的项 w^n 的系数.我们将证明:对于任何一个正整数 n,都有

$$T_n(z)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos z). \tag{11}$$

为了证明,令 $z=\cos\zeta$,分解(10)的左边部分为简单分式,有

$$\frac{4-w^2}{4-4w\cos\zeta+w^2}=-1+\frac{1}{1-\frac{w}{2}e^{-i\zeta}}+\frac{1}{1-\frac{w}{2}e^{i\zeta}}.$$

对于任意固定的 ζ，且 w 的模为足够小的数值时，两个分式都可按照 w 的乘幂展开为几何级数，于是就有

$$\frac{4-w^2}{4-4w\cos\zeta+w^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\zeta}{2^{n-1}}w^n.$$

将这展开式与表达式(10)比较，得 $T_n(\cos\zeta)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\zeta$，这正是所要证明的.

例 4 整数阶 n 的第一类圆柱函数 $J_n(z)$ 定义为洛朗展开式

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)w^n \tag{12}$$

中的 w^n 项的系数. 函数 $J_n(z)$ 可表示为幂级数的形式. 为此，只需将 $e^{\frac{z}{2}w}$ 与 $e^{-\frac{z}{2}\frac{1}{w}}$ 的级数相乘，有：

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n w^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n\frac{1}{w^n}.$$

由此 w^n 项 $(n=0,1,2,\cdots)$ 的系数等于

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!\ k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \tag{13}$$

而 $\frac{1}{w^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 项的系数等于 $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$. 现在，直接利用洛朗级数的系数公式(2)，求得 $J_n(z)$ 的表达式为

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{z}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}\frac{d\omega}{\omega^{n+1}}. \tag{14}$$

我们将变换这表达式，为此，选取圆周 $|\omega|=1$ 作为 C，且设 $\omega=e^{it}$，得

$$\begin{aligned}J_n(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}e^{iz\sin t}e^{-nit}i\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt-z\sin t)dt-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt-z\sin t)dt.\end{aligned}$$

但在第二个积分中，根据周期函数的积分的性质积分的区间 $(0,2\pi)$ 可以换成区间 $(-\pi,\pi)$，而被积函数是奇函数，故这个积分为 0. 因此，

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt-z\sin t)dt. \tag{15}$$

所得到的关系式——称为*贝塞尔积分*——给出了圆柱函数的积分形式的表示式，在某些数学物理的问题中很为有用(参看第七章).

幂级数相除. 假设给定了两个幂级数

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, \tag{16}$$

且 $f_2(0)=b_0\neq 0$ (为书写简单起见，我们认为级数(16)的中心与坐标原点相重合). 设 R 是 $f_1(z)$，$f_2(z)$ 的奇点的模与 $f_2(z)$ 的零点的模中的最小值，则在圆 $|z|<R$ 内，显然这两个级数的商仍可表示成幂级数的形式

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n. \tag{17}$$

要实际上确定 c_n，最好利用关系式

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

从这关系式，比较系数后，得出

$$b_0 c_0 = a_0, \quad b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1, \cdots, b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0 = a_n, \cdots. \tag{18}$$

方程组(18)可逐次地就 $c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots$ 一个一个解出，因为在每一个新方程中，新系数 c_n 带有乘数 $b_0 \neq 0$ 而出现.

例如，对于函数 $f(z) = \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$，有 $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, b_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}, b_{2k+1} = 0$，因而从(18)求得

$$w = \tan z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \cdots \tag{19}$$

(系数的构成的一般规律十分复杂).

最后，我们将指出洛朗级数与分析中著名的傅里叶级数间的联系. 设函数 $f(z)$ 在环形 $1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$ 内为解析的，于是在这环形内它可表示为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \tag{20}$$

特别是，对于单位圆周上的点 $z = e^{it}$，得

$$\varphi(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \tag{21}$$

级数(21)表示函数 $\varphi(t)$ 写成复数形式的傅里叶级数. 实际上，我们有

$$\varphi(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{22}$$

其中 $c_0 = \dfrac{a_0}{2}, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$，因此根据(20)

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin n\theta d\theta. \end{gathered} \tag{23}$$

因此，在单位圆周上 $f(z)$ 的洛朗级数就是函数 $\varphi(t) = f(e^{it})$ 的傅里叶级数.

例　求出函数

$$\varphi(t) = \frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2} \quad (|a| < 1)$$

的傅里叶级数的展开式. 为此，令 $e^{it} = z$ 且求出所得的函数

$$f(z)=\frac{1-z^2}{2i\left\{z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right\}}$$

的洛朗级数的展开式.分母的根等于 $z_1=a, z_2=\frac{1}{a}$.分解 $f(z)$为简单分式,得

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left\{-1+\frac{1}{1-\frac{z}{a}}+\frac{1}{1-az}\right\}.$$

将$\frac{1}{1-az}$与$\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=\frac{-1}{\frac{z}{a}\left(1-\frac{a}{z}\right)}$表示成几何级数和的形式.由于条件$|a|<1$,当$|z|=1$时它们是收敛的,我们有

$$f(z)=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right).$$

以 $z=e^{it}$代入,便得出所要求的傅里叶展开式

$$\frac{a\sin t}{1-2a\cos t+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin nt. \tag{24}$$

一般地,任一具有复系数和复变量 z 的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz), \tag{25}$$

经代换 $e^{iz}=\zeta$ 后变为洛朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\zeta^n, \tag{26}$$

其中 $c_0=\frac{a_0}{2}, c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}, c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$.由于按照第 21 目中所证明的,洛朗级数在某一环形 $r<|\zeta|<R$ 内收敛,故三角级数(25)在平行于实轴的带形 $\ln r<-y<\ln R$ 内收敛(我们设 $z=x+iy$,则$|\zeta|=e^{-y}$).在这带形内,级数(25)的和是解析函数.

在实际上最重要的是下述情况:当 $r=R=1$ 时,就是说,当带形退化为一条直线——实轴时.在这种情形,如从分析中知道的,如果级数(25)是收敛的,那么它不但可以表示非解析的函数,甚至也可以表示不连续的函数.

结束时我们指出对应用有益的泰勒级数的拓广,所谓的**布尔曼-拉格朗日级数**.这些级数是在解析函数按另一个解析函数 $w(z)$的幂展开时得到的

$$f(z)=d_0+d_1w(z)+\cdots+d_nw^n(z)+\cdots \tag{27}$$

我们得到布尔曼-拉格朗日级数的系数公式,泰勒级数的系数的拓广公式.设 $f(z)$和 $w(z)$在某个点 a 是正则的,并且 $w(z)$在此点有第一阶零点.我们选一条限定区域 D 的闭周线C 这样,使得 D 包含点a,两个函数在 $\bar{D}$ 内都正则的,并且 $w(z)$在 $\bar{D}$ 内取到自己的值只有一次.在 D 的内部固定任意点z,并考虑积分

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)w'(\zeta)}{w(\zeta)-w(z)}d(\zeta).$$

按照所采纳的假设条件，被看成依赖于 ζ 的被积函数在 D 内有一个奇点 $\zeta=z$，它是带有留数 $\frac{f(z)w'(z)}{w'(z)}=f(z)$ 的一阶极点（见第 23 目）. 根据留数定理所考虑的积分，因此等于 $f(z)$，我们也就得到公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)w'(\zeta)}{w(\zeta)-w(z)}d\zeta, \tag{28}$$

拓广了柯西积分公式.

我们还假设，点 z 选成如此地接近 a，对 C 上所有点 ζ 有 $\left|\frac{w(z)}{w(\zeta)}\right|\leqslant q<1$（在上面所作的假设基础上这总是能够达到的）. 此时(28)式中被积函数可以展开成一致收敛函数

$$\frac{f(\zeta)w'(\zeta)}{w(\zeta)}\cdot\frac{1}{1-\frac{w(z)}{w(\zeta)}}=\frac{f(\zeta)w'(\zeta)}{w(\zeta)}\left\{1+\frac{w(z)}{w(\zeta)}+\cdots+\frac{w^n(z)}{w^n(\zeta)}+\cdots\right\},$$

对它进行逐项积分，我们得到布尔曼－拉格朗日级数(27)，并且看到，它的系数

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)w'(\zeta)}{w^{n+1}(\zeta)}d\zeta, n=0,1,2,\cdots. \tag{29}$$

这些公式推广了泰勒级数的系数的柯西公式.

注意到，在我们的假设条件下被积函数在 C 内有唯一奇点——$n+1$ 阶极点以后，很容易变换这些公式. 根据第 23 目中的公式计算留数，我们求出布尔曼－拉格朗日级数的系数的表达式

$$d_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{f(z)w'(z)(z-a)^{n+1}}{w^{n+1}(z)}\right\}, n=0,1,2,\cdots, \tag{30}$$

推广了著名的泰勒公式.

当 $n\geqslant1$ 时公式(29)可以通过分部积分来变换：

$$d_n=-\frac{1}{2n\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{1}{w^n(\zeta)}\right\}d\zeta=\frac{1}{2n\pi i}\int_C \frac{f'(\zeta)}{w^n(\zeta)}d\zeta,$$

此时，取代(30)，用类似方法得到

$$d_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{f'(z)\frac{(z-a)^n}{w^n(z)}\right\}, n=1,2,\cdots. \tag{31}$$

作为例子，我们考虑 $f(z)=e^{bz}$ 按 $w=ze^{-z}$ 的幂的展开式. 取 $a=0$，我们得 $d_0=f(0)=1$，并且按照公式(31)

$$d_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{be^{bz}\left(\frac{z}{ze^{-z}}\right)^n\right\}=\frac{b(b+n)^{n-1}}{n!}.$$

由此推出，所求展开式有形状

$$e^{bz}=b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b+n)^{n-1}}{n!}z^ne^{-nz}.$$

作为下一个例子，我们把布尔曼－拉格朗日级数应用到幂级数反演问题. 设给出

级数

$$w=c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots,\quad c_1\neq 0,\tag{32}$$

它在点 $z=0$ 的某个邻域内收敛,并要求由这级数决定的函数 $z(w)$按 w 的幂展开:

$$z=d_1w+d_2w^2+\cdots+d_nw^n+\cdots.\tag{33}$$

这是布尔曼-拉格朗日级数所解问题的特殊情况.按照公式(31)我们得到级数(33)的系数

$$d_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z}{w}\right)^n,n=1,2,\cdots,\tag{34}$$

因为在我们假定的情形中 $f(z)\equiv z$ 和$f'(z)=1$,公式(34)就解了所提出的问题.

例 要求求出超越方程

$$w=ze^{-az}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n!}z^{n+1}$$

的解 $z(w)$的级数展开式.根据公式(34)我们求出

$$d_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}e^{anz}=\frac{(an)^{n-1}}{n!}$$

并且所要找的展开式有形状

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(an)^{n-1}}{n!}w^n.$$

71.展开亚纯函数为最简单分式 假若函数 $f(z)$的所有有限奇点都是极点,在第22目里我们已称这种函数为亚纯函数.由于在任意有限区域内这种函数只可能有有限多个极点(参看第22目),故它的所有的极点是可重新编号的.例如,可按模非降的顺序编号:

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$
$$|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant\cdots.$$

我们用 $g_n(z)$表示 $f(z)$在极点 a_n处的主要部分

$$g_n(z)=\sum_{k=1}^{m_n}\frac{c_{-k}^{(n)}}{(z-a_n)^k},\tag{1}$$

且用

$$g(z)=\sum_{k=1}^{m}c_kz^k\tag{2}$$

表示它在无穷远处的主要部分(假若无穷远点也是个极点的话).函数 $g_n(z)$在分析上称为 $f(z)$的**简单分式**,而 $g(z)$称为 $f(z)$的**整函数部分**.在分析上证得:任意有理分式函数可分解为整函数部分与最简单分式.我们将引入一个更强的定理:

定理1 假若亚纯函数 $f(z)$只有有限多个极点 $a_1,a_2,\cdots,a_l$,除此之外,$a_{l+1}=\infty$或是正则点或是极点,则这个函数可表示为它们的主要部分的和*

* 只有当 $z=\infty$是极点时,函数 $g(z)$才进入展开式(3)中.

$$f(z)=c_0+g(z)+\sum_{n=1}^{l}g_n(z),\tag{3}$$

因此是有理分式函数.

为了证明,我们来讨论差

$$\varphi(z)=f(z)-g(z)-\sum_{n=1}^{l}g_n(z).$$

函数 $\varphi(z)$在任一个点 a_n处都是正则的,因为 $f(z)$在点 a_n的邻域内的洛朗展开式中,由于减去 $g_n(z)$而消去了在点 a_n处的主要部分,而余下的 $\varphi(z)$的项在这个点处是解析的.对于点 $z=\infty$可作相同的论断,而在点 $z\neq a_n$, $z\neq\infty$处,$\varphi(z)$的所有各项都是解析的.因此,函数 $\varphi(z)$在闭平面 z 内是解析的,因而按照第 24 目的刘维尔定理,它是一个常数.公式(3)被证明了.从它推得:在把所有的分式通分、使其具有公共分母后,$f(z)$是两个多项式的比,就是说,是有理分式函数.

对于任意的亚纯函数,也能构造这一类型的展开式.但是在一般的情形下,它具有无穷多个主要部分,而(3)的有限和将由级数来替代,因而发生这级数是否收敛的问题.一般说来,级数(3)是发散的,因而为了保证收敛性,不能不附加某些表达式于主要部分*.

我们将仅就最有实际价值的情况来证明这论断.为便于叙述起见,把所谓的正则周线族$\{C_n\}$我们将理解为符合下述条件的闭曲线的集合:1) C_1含有点 $z=0$ 在它的内部,周线 C_n位于由周线 C_{n+1}所围成的区域的内部;2) 自坐标原点至 C_n的最短距离 d_n,当 n 增大时,无限制地增大;3) 曲线 C_n的长度 l_n与 d_n的比值始终保持有界

$$\frac{l_n}{d_n}\leqslant A.\tag{4}$$

我们有

定理 2(柯西)　设亚纯函数 $f(z)$在某一正则的周线族$\{C_n\}$上增大不比 z^p快,就是说,在所有的 C_n上

$$|f(z)|\leqslant M|z|^p,\tag{5}$$

其中 M 是一个常数,$p\geqslant0$ 是个整数,并设 $z=0$ 不是 $f(z)$的极点.在这些条件下,$f(z)$可表示成

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{g_n(z)-h_n(z)\}\tag{6}$$

的形式,其中 $g_n(z)$是 $f(z)$在它的极点 a_n处的主要部分,且

$$h(z)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k,\quad h_n(z)=\sum_{k=0}^{p}\frac{g_n^{(k)}(0)}{k!}z^k\tag{7}$$

---

* 在公式(6)中,多项式 $h_n(z)$就是这种表达式.

是次数不高于 p 的多项式*. 对于适当的求和顺序,级数(6)在 $f(z)$ 的任何正则点处都收敛,且在任何有界区域内,如果在级数内去掉在这区域内有极点的有限多项,这收敛是一致的.

为了证明,我们考虑积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$,其中 z 是位于周线 C_N 内部且异于 $f(z)$ 的极点的任何一个点,且用 $\varphi(z)$ 表示在所有位于 C_N 内部的那些极点处的主要部分 $g_n(z)$ 的和

$$\varphi(z)=\sum_{(C_N)}g_n(z).$$

被积函数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$,视为依赖于 ζ 的函数,以点 a_n 为它的奇点,并以点 $\zeta=z$ 为它的具有留数 $f(z)$ 的一阶极点. 在 C_N 内部的那些点 a_n 处,$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 的留数,显然等于函数 $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}$ 在这些点处的留数. 我们来计算它们的总和 s. 函数 $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}$ 是有理分式函数,且除了 a_n 这些点之外,它只有一个奇点 $\zeta=z$,在这点处的留数是 $\varphi(z)$,故按照关于留数总和的定理有:$s+\varphi(z)+c_{-1}=0$,其中 c_{-1} 是 $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}$ 在无穷远处的留数(见第 24 目). 但由于分子 $\varphi(\zeta)$ 的次数低于分母的次数,故在 $\zeta=\infty$ 的邻域内有 $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{c_{-2}}{\zeta^2}+\frac{c_{-3}}{\zeta^3}+\cdots$,所以 $c_{-1}=0$,从而

$$s=-\varphi(z)=-\sum_{(C_N)}g_n(z).$$

因此,按照留数定理,我们的积分等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=f(z)-\sum_{(C_N)}g_n(z).\tag{8}$$

假若当 $N\to\infty$ 时,积分(8)趋于 0,则函数 $f(z)$ 已表示为简单分式的收敛级数 $\sum g_n(z)$. 但是由于我们的条件,$f(z)$ 在周线族 $\{C_n\}$ 上可以如同 $|z|^p$ 一样增大,故一般地说,积分(8)不趋于 0. 下面所叙述的由(8)来得出趋于 0 的积分的巧妙方法属于柯西. 因为按照条件,点 $z=0$ 是 $f(z)$ 的正则点,且位于 C_N 的内部,故在等式(8)及它的关于 z 的逐次导数中,可令 $z=0$,因而得出方程组

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k+1}}=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+\sum_{(C_N)}\frac{g_n^{(k)}(0)}{k!}\quad(k=0,1,\cdots,p)\tag{9}$$

* 多项式 $h(z)$ 与 $h_n(z)$ 代表 $f(z)$ 与 $g_n(z)$ 的以 $z=0$ 为中心的泰勒展开式的前 p 项(参看本目末尾的注意). 若 $z=0$ 是 $f(z)$ 的极点,且在此点处有主要部分 $g_0(z)$,则展开式(6)对于函数 $f(z)-g_0(z)$ 成立.

(参看第 17 目中关于高阶导数的公式). 乘等式(9)以 z^k, 且将它们的和从(8)中减去,得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\left\{\frac{1}{\zeta-z}-\sum_{k=0}^{p}\frac{z^k}{\zeta^{k+1}}\right\}f(\zeta)d\zeta = f(z)-h(z)-\sum_{(C_N)}\{g_n(z)-h_n(z)\}.$$

在最后这式子中,将位于积分号下的几何级数求和,我们便把这积分表示为下列形式

$$R_N=\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{f(\zeta)}{\zeta^p}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}.$$

我们来估计 R_N 的值,注意 $|\zeta|\geqslant d_N$, $|\zeta-z|\geqslant d_N-|z|$, 根据加于族 $\{C_N\}$ 与 $f(z)$ 上的那些条件,将有

$$|R_N(z)|\leqslant\frac{|z|^{p+1}}{2\pi}M\frac{l_N}{d_N(d_N-|z|)}\leqslant\frac{MA}{d_N-|z|}\cdot\frac{|z|^{p+1}}{2\pi}. \tag{10}$$

由此可见,当 $N\to\infty$ 时 $R_N\to 0$. 因此,在适当地排列级数的项的顺序时*, 公式(6)确实成立.

还需证明:这级数在任一有界区域 D 内为一致收敛,如果在级数中去掉与位于 D 内的极点相对应的那些项. 假设在 D 的每一点处都有 $|z|<R$. 则按(10)有

$$|R_N(z)|\leqslant\frac{MAR^{p+1}}{(d_N-R)2\pi},$$

由此看出,对于任意的 $\varepsilon>0$, 可求得一个与 z 不相关的正整数 N_0, 使对于所有的正整数 $N>N_0$, 都有 $|R_N(z)|<\varepsilon$, 但这便表示了级数(6)的一致收敛性. 定理得证.

注　证明了的定理可推广到任意的亚纯函数 $f(z)$, 成为下面的形式:

定理(米塔-列夫勒(Mittag-Leffler))　设 $f(z)$ 是在点 $z=0$ 处为正则的任意亚纯函数,且设

$$h_n(z)=\sum_{k=0}^{p_n}\frac{g_n^{(k)}(0)}{k!}z^k \tag{11}$$

是 $f(z)$ 的主要部分 $g_n(z)$ 的泰勒展开式的一段. 则存在这样的一列整数 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 与这样的整函数 $h(z)$, 使得对于它们而言,展开式(6)依然成立.

下面的逆定理也成立:

定理(米塔-列夫勒)　对于任意一列复数 $a_n\to\infty$, 与任意一列主要部分 $g_n(z)$ 有一列整数 p_n 存在,使级数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\{g_n(z)-h_n(z)\}$$

* 将级数(6)求和时,必须将位于周线 C_n 与 C_{n+1} 间的极点所对应的各项结合为一项,且将所得到的那些项依 n 增大的顺序来排列. 这是从定理所引用的证明而推得的. 在级数(6)绝对收敛的情况下,它的各项的排列顺序无关紧要.

在任一有界区域内一致收敛，只需从这级数中弃去对应于属于这有界区域的那些极点的各项，这里的 $h_n(z)$ 按式(11)来定义. $f(z)$ 是个亚纯函数，具有极点 a_n 且只有这些极点，并且，它在极点 a_n 处的主要部分就等于 $g_n(z)$.

我们来引入一些展开亚纯函数为主要部分的级数的例子.

亚纯函数 $\cot z = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$ 在点 $z=0,\pm\pi i,\pm 2\pi i,\cdots$ 处有一阶极点. 我们来证明：这个函数在圆族 $C_n:|z|=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 上是有界的. 由于这函数的周期性，只需证明：在带形 $0<\operatorname{Re} z<\pi$ 内去掉半圆 $|z-\pi|<r$, $|z|<r$ 后，这函数在这一区域内是有界的. 我们有

$$|\cot z|\leqslant\frac{e^{-y}+e^{y}}{|e^{-y}-e^{y}|},$$

因此，当 $y>1$ 时，$|\cot z|\leqslant\frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}}<\frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}$，而当 $y<-1$ 时，$|\cot z|\leqslant\frac{1+e^{2y}}{1-e^{2y}}<\frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}$. 而在这区域的 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 的那一部分，由于连续函数的性质，$|\cot z|$ 是有界的. 我们的论断已证明了，因此在柯西定理中可取 $p=0$.

在点 $z=0$ 处，$\cot z$ 的主要部分等于 $\frac{1}{z}$，并且，函数

$$f(z)=\cot z-\frac{1}{z}$$

当 $z\to 0$ 时趋于极限 0 （这是从 $f(z)$ 是奇函数且它在点 $z=0$ 是连续的而得出）. $f(z)$ 在极点 $z_n=n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 处的留数等于 1，因此 $g_n(z)=\frac{1}{z-n\pi}$. 在条件 $p=0$ 下，公式(6)具有形式

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\{g_n(z)-g_n(0)\}^{*},$$

由此给出

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right). \tag{12}$$

级数(12)显示：在平面的任一有界区域 $|z|<R$ 内，当从级数(12)中去掉在这区域内有极点的各项后，它便绝对地且一致地收敛. 实际上，对于这级数的一般项，下列的估计成立：

$$\left|\frac{z}{(z-n\pi)n\pi}\right|=\frac{1}{n^2}\frac{|z|}{\pi\left|\pi-\frac{z}{n}\right|}\leqslant\frac{R}{\pi\left(\pi-\frac{R}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^2},$$

其中 $\frac{1}{n^2}$ 前的系数趋于有限极限 $\frac{R}{\pi^2}$，而 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. 由此，特别是有：在级数(12)中可以任意改变各项的顺序. 将具有指标 n 与 $-n$ 的两项结合，得

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}. \tag{13}$$

还可以从(12)和(13)中以 πz 代 z 而得出下列公式：

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{14}$$

---

* 在求和符号上的“′”表示：当求和时除去指标 $n=0$.

在(13)中用 iz 代替 z 且约去 $\frac{1}{i}$,得

$$\operatorname{cth} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+n^2\pi^2}. \tag{15}$$

由此有:

$$\frac{1}{e^z-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4\pi^2n^2}. \tag{16}$$

从公式 $\tan z=-\cot\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$ 与(13)式,还可得出:

$$\tan z=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\frac{2n-1}{2}\pi}+\frac{1}{z+\frac{2n-1}{2}\pi}\right]=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}. \tag{17}$$

类似地,从公式 $\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{z}{2}+\tan\frac{z}{2}\right)$ 可推出

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}. \tag{18}$$

将级数(12)微分,——按照魏尔斯特拉斯定理(第 19 目),这是可以的,——便有 *

$$\frac{1}{\sin^2 z}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(z-n\pi)^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}. \tag{19}$$

72. 展开整函数为无穷乘积 按照刘维尔定理(第 17 目),每一个有界的整函数都是个常数. 假若整函数 $f(z)$ 在无穷远点处具有 n 阶的极点,则它是 n 次多项式. 实际上,假若 $g(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$ 是函数 $f(z)$ 在无穷远点处的展开式主要部分,则根据同一定理,$f(z)-g(z)=c_0$ 是个常数.

在代数上熟知:每一个 n 次多项式具有 n 个零点,且可表示为对应于这些零点的 n 个线性因子的乘积的形式:

$$f(z)=A'(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)=A\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right), \tag{1}$$

其中 a_k 是多项式的零点,A 与 A' 是某两个常数**. 整函数可以全然没有零点(例如 e^z),也可以具有无穷多个零点(例如 $\sin z$). 没有零点的整函数 $f(z)$ 可表示为

$$f(z)=e^{g(z)} \tag{2}$$

的形状,其中 $g(z)$ 是个整函数. 事实上,假若整函数 $f(z)$ 没有零点,则 $\frac{f'(z)}{f(z)}=\{\ln f(z)\}'$ 也是个整函数. 将这个整函数积分,便得出整函数 $\ln f(z)=g(z)$.

假若整函数 $f(z)$ 只有有限多个零点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$(每一个零点照它的重数记下多少次),则函数 $f(z)$ 除以 $(z-a_1)\cdots(z-a_n)$ 的商将是没有零点的整函数. 因此,它可表示为(2)的形式,因而有

$$f(z)=e^{g(z)}(z-a_1)\cdots(z-a_n)=Ae^{g(z)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right). \tag{3}$$

---

* 展开式(13)—(19)也由欧拉得出,他于 1742 年在给伯努利的信中已指出了它们.

** 在变到第二个形式时,我们假定 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的零点.

对于具有无穷多个零点的整函数也可建立类似的公式,但是在其中替代有限乘积的将是无穷乘积,因而发生了它的收敛问题.

首先,引入一些关于数的无穷乘积的基本定义和事实.假设给定一列复数$\{1+c_k\}$,其中没有一个为零.如果乘积

$$\Pi_n=\prod_{k=1}^{n}(1+c_k)$$

当$n\to\infty$时趋于一个异于0的极限,则我们就说无穷乘积

$$\Pi=\prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+c_k) \tag{4}$$

收敛,极限Π称为乘积值.显然,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$是收敛的必要条件,因为

$$1+c_n=\frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}},\text{且}\quad \lim_{n\to\infty}\Pi_n=\lim_{n\to\infty}\Pi_{n-1}\neq 0.$$

再者,在适当地选定对数的一个分支时,有

$$S_n=\ln\Pi_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+c_k).$$

如果对于对数的值$\ln(1+c_k)$的某一种选择下,级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+c_k)$收敛,就是说,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$存在,则此时$\Pi_n=e^{S_n}$也趋于极限$\Pi=e^S$,就是说,无穷乘积(4)也收敛.注意,从对数级数的收敛推得:当$k\to\infty$时,$\ln(1+c_k)\to 0$,从而有:从某一个k开始,$\operatorname{Im}\ln(1+c_k)$的值包含于$-\pi$与$\pi$之间,即是说,$\ln(1+c_k)$是对数的主值.

反之,如果无穷乘积收敛,即是说,$\Pi_n\to\Pi\neq 0$,则若选取$\ln(1+c_k)$的值这样,使得在任一n下、和数$\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+c_k)$给出了$\ln\Pi_n$的主值,我们便有:$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\Pi_n=\ln\Pi$存在,即,对数级数收敛*.这样一来,就证明了

定理1 *要使无穷乘积$\Pi=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$收敛,其充分必要条件是:在适当选定对数的值后,级数$S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+c_k)$收敛.这时$\Pi=e^S$.*

含有等于零的因子的无穷乘积,如果在除掉所有这种因子之后,它在旧的意义下仍是收敛的,则称它做**收敛至零的**.这时,如果认为$\Pi=0$,则等式(4)保持成立.在这样的定义下,有限乘积的"只有在至少有一个因子等于0的情况下才等于0"这一性质依然有效.

如果无穷乘积的各因子的对数所成的级数绝对收敛,则无穷乘积也称做**绝对收**

* 要满足对数分支的选择的条件,只需每次适当地选择和数中最后一个被加项$\ln(1+c_n)$.从对数级数的收敛性,根据前面所得的论断推知:从某一个k开始,所有被选取的对数值将是主值.

敛的. 根据定理 1,推知下列定理成立:

定理 2 在绝对收敛的乘积中,可以任意改变因子的顺序,而不改变乘积的值.

还有,下述定理也成立:

定理 3 要使无穷乘积 $\prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$ 绝对收敛,其充分必要条件是:级数 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ 绝对收敛.

实际上,因为我们有 $\lim_{k\to\infty}c_k=0$ (在级数收敛的情况下与在乘积收敛的情况下都是如此),故从某一个 k 开始,$|c_k|<\frac{1}{2}$. 于是

$$\left|\frac{\ln(1+c_k)}{c_k}-1\right|=\left|-\frac{c_k}{2}+\frac{c_k^2}{3}-\cdots\right|\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{1}{2},$$

因此
$$\frac{1}{2}<\left|\frac{\ln(1+c_k)}{c_k}\right|<\frac{3}{2}.$$

按照已知的级数比较定理,由此可推知级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|\ln(1+c_k)|$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ 同时收敛或者发散. 而按照定义,第一个级数的收敛和乘积的绝对收敛等价.

无穷乘积的收敛的概念,可自然地推广到由函数所构成的无穷乘积上去,乘积

$$\prod_{k=1}^{\infty}\{1+f_k(z)\}$$

称做在某一区域 D 内**收敛的**,如果在这区域内的每一个点 z_0 处,数的无穷乘积 $\prod_{k=1}^{\infty}\{1+f_k(z_0)\}$ 按照前面所采用的定义的涵义上收敛的或收敛至 0 的.

在这些简单的叙述之后,我们可回到展开整函数为无穷乘积的问题上来,无穷乘积的因子,对应于这些函数的零点(展开式(3)的推广). 注意,如果整函数 $f(z)$(不恒等于 0)具有无穷多个零点,则这些零点构成一个点列,趋向于无穷远点. 实际上,在相反的情形下,将可分出 $f(z)$ 的零点的一个序列,收敛到平面上的一个有限点,在这个点处按照条件 $f(z)$ 是正则的,因而按照第 20 目的唯一性定理,$f(z)$ 将恒等于 0.

设 $b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$ 是 $f(z)$ 的零点的一个序列,例如,依照它们的模的非降的顺序来排列. 我们用 m_n 来表示零点 b_n 的阶数,且用 $a_1,a_2,\cdots$ 表示由这些零点所组成的序列,其中每一个零点写出的次数同它的重数一样. 构成函数 $f(z)$ 的对数导数:

$$G(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d}{dz}\{\ln f(z)\}.$$

如同已在第 23 目中所证明了的,它只在点 b_n 处有奇点,这些点是它的具有留数 m_n 的一阶极点,因此 $G(z)$ 是亚纯函数.

$G(z)$ 的展开为简单分式,与 $f(z)$ 的展开为无穷乘积密切地联系着. 即,有下面的定理成立:

定理 4 假设整函数 $f(z)$ 的对数导数在某一正则的周线族上增长不比 z^{p-1} 快,

其中 $p\geqslant 1$ 是一个整数.则对于函数 $f(z)$ 来说,展开式

$$f(z)=z^{m}e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p} \tag{5}$$

成立;这里 $m\geqslant 0$ 是 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处的零点的阶,$g(z)$ 是某一个次数 $\leqslant p$ 的多项式,又 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是 $f(z)$ 的零点的序列,在序列中每一个零点出现的次数同它的重数一样.

实际上,首先假定 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的零点.则按前一目的定理 2,$f(z)$ 的对数导数 $G(z)$ 可有如下形式的展开式

$$G(z)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kz^k+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{m_n}{z-b_n}+\frac{m_n}{b_n}\left[1+\frac{z}{b_n}+\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{b_n}\right)^{p-1}\right]\right\},$$

因为在我们的情形下,$G(z)$ 的主要部分的泰勒展开式具有形式

$$\frac{m_n}{z-b_n}=-\frac{m_n}{b_n}\frac{1}{1-\frac{z}{b_n}}=-\frac{m_n}{b_n}\left[1+\frac{z}{b_n}+\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\cdots\right].$$

由于 $G(z)$ 的展开式的一致收敛性,我们可沿着连接 $z=0$ 至任意点 z 的任何一条不含有 $f(z)$ 的零点的曲线,将 $G(z)$ 的展开式逐项求积分.我们得出

$$\ln f(z)=\ln f(0)+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{c_k}{k+1}z^{k+1}+\sum_{n=1}^{\infty}m_n\left\{\ln\left(1-\frac{z}{b_n}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{z}{b_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{b_n}\right)^p\right\}, \tag{6}$$

其中对数的值由积分路线确定.

分解最后的和式中的第 n 个被加项为 m_n 个相同的被加项,我们可将展开式(6)写成

$$\ln f(z)=g(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}\right\}$$

的形状,其中 $g(z)$ 是次数 $\leqslant p$ 的多项式.由此根据定理 1 有:无穷乘积

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p} \tag{7}$$

在所有异于 $f(z)$ 的零点的那些点处都收敛至 $f(z)$.但在 $f(z)$ 的零点处,无穷乘积显然收敛至 0,因此公式(7)对于所有有限点 z 均成立.

假若 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 m 重的零点,则只需对函数 $\frac{f(z)}{z^m}$ 应用我们的讨论,就得到公式(5).定理得证.

注 1 证明了的定理可用下述形式推广到任意整函数上去;

定理(魏尔斯特拉斯) 有这样的一个整函数 $g(z)$ 与这样的一个整数序列 $p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$ 存在,使下式成立:

$$f(z)=z^{m}e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}. \tag{8}$$

其逆定理也成立：

定理(魏尔斯特拉斯) 对于任何一个收敛于无穷远点的复数数列* a_n，可以求得这样的一列整数 p_n，使无穷乘积(8)收敛且定出一个整函数 $f(z)$，它具有零点 a_n，此外没有别的零点，并且零点 a_n 的重数是数列中等于 a_n 的项的个数.

注 2 整函数的可用公式(5)而不是一般公式(8)来表示，这在下述的更自然的条件下也可以证明：有这样的正整数 p 和这样的常数 $M>0$ 存在，使对于所有的 z 都有

$$|f(z)|\leqslant Me^{|z|^p}. \tag{9}$$

满足这个条件的函数称做有限阶的整函数**.

根据魏尔斯特拉斯的第二定理，容易证明：任何亚纯函数，可表示为两个整函数的比. 事实上，用 $f_2(z)$ 表示这样的一个整函数，它在 $f(z)$ 的每一个极点处具有一个同阶的零点(根据魏尔斯特拉斯的第二定理，这是可以造出的)，则乘积 $f(z)\cdot f_2(z)$ 将是一个整函数，我们叫它 $f_1(z)$，因而

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}. \tag{10}$$

我们来举出一些把整函数表示成无穷乘积的例子***. 按前一目的公式(12)，正弦函数的对数导数可表示为级数

$$(\ln\sin z)'=\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right).$$

将 $\cot z-\frac{1}{z}$ 沿着连接着点 $z=0$ 到点 $z\neq n\pi$ 的路线求积分，并且取指数，得

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}} \tag{11}$$

(在无穷乘积记号上的“′”，表示缺少指标 $n=0$).

如果取前一目的公式(13)来替代(12)，则类似地得到：

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{12}$$

还要指出：可从公式(11)和(12)以 πz 代 z 而得到公式

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{13}$$

在公式(12)中，用 iz 替代 z，得

---

* 在数列的各项中，可以有任意有限个数的项相等. 这些定理的证明可以，譬如，在 Шабат 书[10]中找到.

** 所有使 $\left|\frac{f(z)}{e^{z^p}}\right|$ 当 $z\to\infty$ 时保持有界的整数 p 的下界，称做整函数 $f(z)$ 的阶数，例如 $\sin z$ 是一阶的函数，函数 e^{e^z} 是无限阶的.

*** 所有这些表示法也曾为欧拉所知(参看 345 页上的脚注 *).

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{14}$$

利用前一目的公式(16),求得函数 e^z-1 的对数导数的展开式

$$\frac{e^z}{e^z-1}=1+\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4\pi^2n^2},$$

将这个关系式求积分且取指数,得

$$e^z-1=ze^{\frac{z}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right). \tag{15}$$

利用 $\cos z=\frac{\sin 2z}{2\sin z}$ 及公式(12),在把分子分解为两个乘积(按奇数项与偶数项)并且分子分母相约后,得

$$\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right). \tag{16}$$

§2 留数理论的应用

在这一节中,我们将讨论第23目中的关于留数与对数留数的定理在计算定积分与计算零点的个数上的应用.

73.积分的计算 根据留数定理的应用来计算定积分的那些方法的实质如下:假设要计算一个实函数 $f(x)$ 的沿着 x 轴上某一条(有限的或无限的)线段 (a,b) 的积分.我们补充 (a,b) 以某一曲线 C',使它连同 (a,b) 围成一个区域 D,并且解析地延拓 $f(x)$ 到 $\bar{D}$ 上.应用留数定理于所构成的解析延拓 $f(x)$,因此求得

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{C'}f(z)dz=2\pi iR, \tag{1}$$

其中 R 是 $f(z)$ 在区域 D 内的留数之和.假若沿 C' 的积分可以算出或可用所求的积分 $\int_a^b$ 来表示出,则计算 $\int_a^b$ 的问题就被解决了.

在某些情形下,选择辅助函数 $f(z)$ 使给定在 (a,b) 上的函数是它的实数部分或虚数部分,则所求的积分便可由分离开(1)的实数部分或虚数部分而被找到.

所叙述的方法明显地表示出柯西留数定理的价值,它将积分的量——沿周线的积分——的计算,化为微分的量——$f(z)$ 在它的奇点处的留数——的计算.后一个计算要简单得多,尤其是对于极点,这时可利用第23目的公式(3)或(5).

在无限线段 (a,b) 的情形,通常考虑这样构造的无限制扩涨的积分周线族,使得其趋于极限的结果,得出沿 (a,b) 的积分.在这种情形,关系式(1)中沿 C' 的积分可以不必算出,而只需求出它的极限,而且常常是:后者等于0.

在某些例子中,可按照下面的引理来进行对沿 C' 的积分的估计.

引理(若尔当) *如果在某一列圆弧 $C_{R_n}:|z|=R_n,\operatorname{Im} z>-a$ $(R_n\to\infty,a$ 是固定的常数)上,函数 $g(z)$ 对于 $\arg z$ 而言一致地收敛于0,则对于任何一个正数 λ 都有*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_{R_n}} g(z)e^{i\lambda z}dz=0. \tag{2}$$

我们记 $z=x+iy=re^{i\varphi}$, $M_n=\max\limits_{C_{R_n}}|g(z)|$, $\alpha_n=\arcsin\dfrac{a}{R_n}$. 按照引理中的条件，当 $n\to\infty$ 时，$M_n\to 0$, α_n 也趋于 0，且 $\alpha_n R_n\to a$. 设 $a>0$，在弧 AB 与 CD 上（图 154）有 $|e^{i\lambda z}|=e^{-\lambda y}\leqslant e^{a\lambda}$；因此

$$\left|\int_{AB,CD} g(z)e^{i\lambda z}dz\right|\leqslant M_n e^{a\lambda}\alpha_n R_n,$$

因而当 $n\to\infty$ 时，沿这些弧上的积分趋于 0.

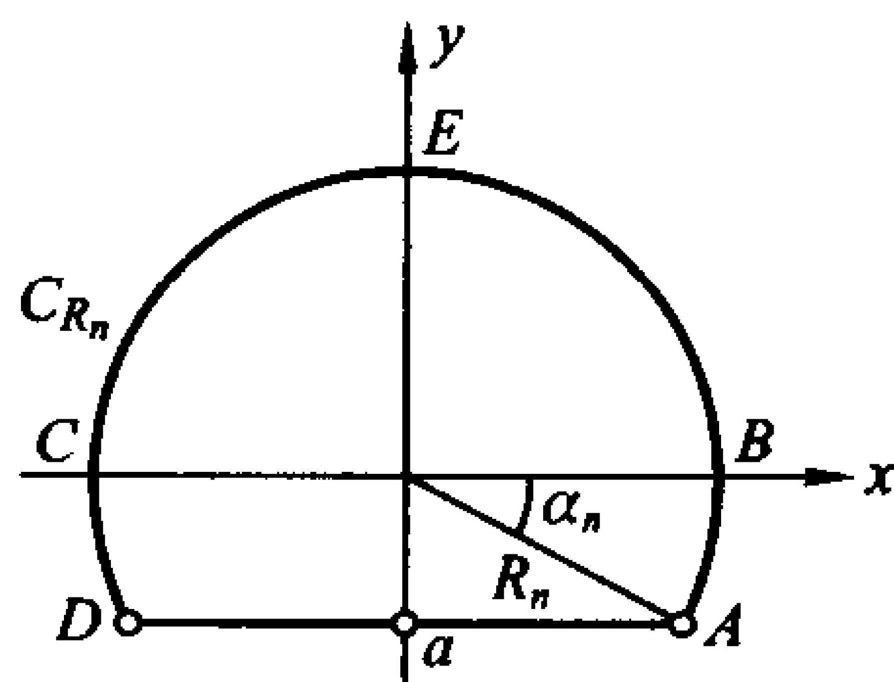


图 154

根据一个熟知的不等式*：当 $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$1\geqslant\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\geqslant\dfrac{2}{\pi}$，我们推得：在弧 BE 上

$$|e^{i\lambda z}|=e^{-\lambda R_n\sin\varphi}\leqslant e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi},$$

因此

$$\left|\int_{BE}\right|\leqslant M_n R_n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi}d\varphi=M_n\frac{\pi}{2\lambda}(1-e^{-\lambda R_n}),$$

从而 $\int_{BE}$ 当 $n\to\infty$ 时也趋于 0. 如果在弧 CE 上自负半轴沿顺时针方向计算极角，则对于 $\left|\int_{CE}\right|$ 可得到同样的估计，因而引理的论断得证. 在 $a\leqslant 0$ 时，证明可简化，因为沿着弧 AB 和 CD 的积分的估计将是多余的. 引理完全得证.

在引理中的圆弧序列 C_{R_n} 可用圆弧族 $C_R:|z|=R,\ \mathrm{Im}\ z>-a\quad(R_0<R<\infty)$ 来替代，这时如果当 $R\to\infty$ 时，函数 $g(z)$ 在 C_R 上对于 $\arg z$ 而言一致地收敛于 0，则对于任何一个正数 λ 有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz=0. \tag{3}$$

对于这种情形，前面所引的证明依然适用.

在后一章中，我们需要若尔当引理的稍加改变的形式. 我们作变数代换 $iz=p$，于是引理中的圆弧变为圆弧 $C_R:|p|=R,\ \mathrm{Re}\ p<a$ （图 155），因而我们得到：对于当 $R\to\infty$ 时在 C_R 上关于 $\arg p$ 一致趋于 0 的任一函数 $F(p)$，以及对于任一正数 t 来说，有

* 要证明这个不等式，只需注意：它的中间项的导数 $\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)'=\dfrac{\cos\varphi}{\varphi^2}(\varphi-\tan\varphi)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内为负，因此函数 $\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$ 在这区间内递减. 这不等式表示了正弦曲线在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的凸性.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(p)e^{pt}dp=0. \tag{4}$$

在(4)中用 $-p$ 替代 p，我们得到在同一些条件下，对于任意负数 t 有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} F(p)e^{pt}dp=0, \tag{5}$$

其中 C'_R 是圆弧 $|p|=R$，$\mathrm{Re}\ p>a$ （图 155).

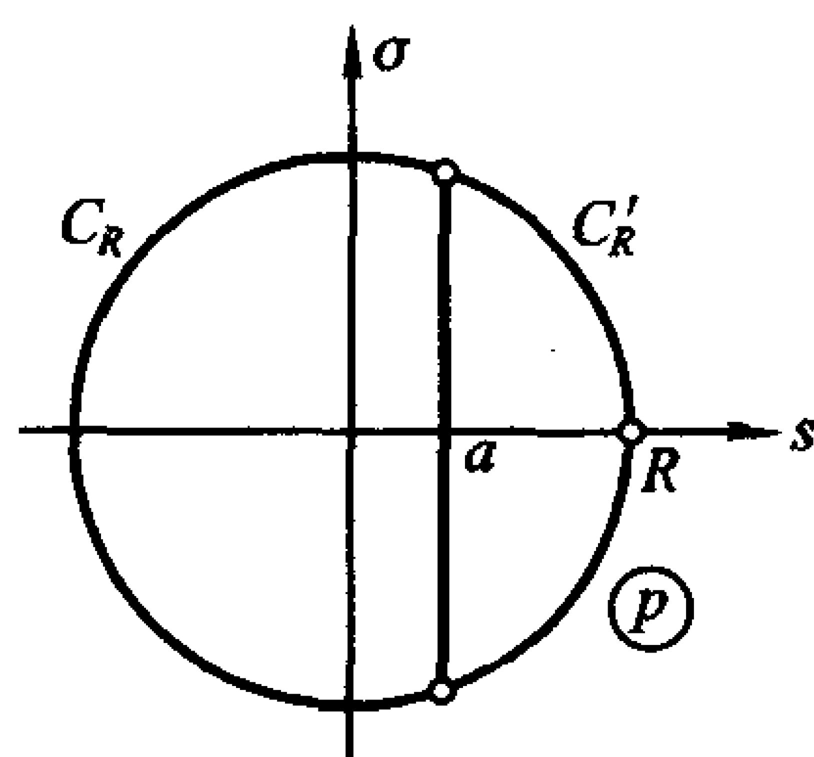


图 155

我们将在个别的具体例子中，说明利用留数理论来计算积分的一般方法.我们将从计算有理分式函数乘以正弦或余弦函数的乘积的积分开始.

例 1 计算积分(拉普拉斯) $I=\int_0^\infty \frac{\cos xdx}{x^2+a^2}$. 我们选取辅助函数

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$

与表示在图 156 中的周线.由于函数 $g(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ 在 C_R 上满足不等式 $|g(z)|<\frac{1}{R^2-a^2}$，故当 $R\to\infty$ 时，它一致地趋于 0，因而按若尔当引理当 $R\to\infty$ 时有

$$\int_{C_R} f(z)dz=\int_{C_R} g(z)e^{iz}dz\to 0.$$

对于任一个 $R>a$，按留数定理有

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx+\int_{C_R}=2\pi i\frac{e^{-a}}{2ai}$$

(我们按照第 23 目的公式(5)，求出 $f(z)$ 在这周线内部的唯一的奇点 $z=ai$——一阶极点——处的留数).取当 $R\to\infty$ 时的极限，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{ae^a}.$$

分出实数部分并且利用这函数的偶函数性质，得出所求的积分

$$\int_0^\infty\frac{\cos xdx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2ae^a}.$$

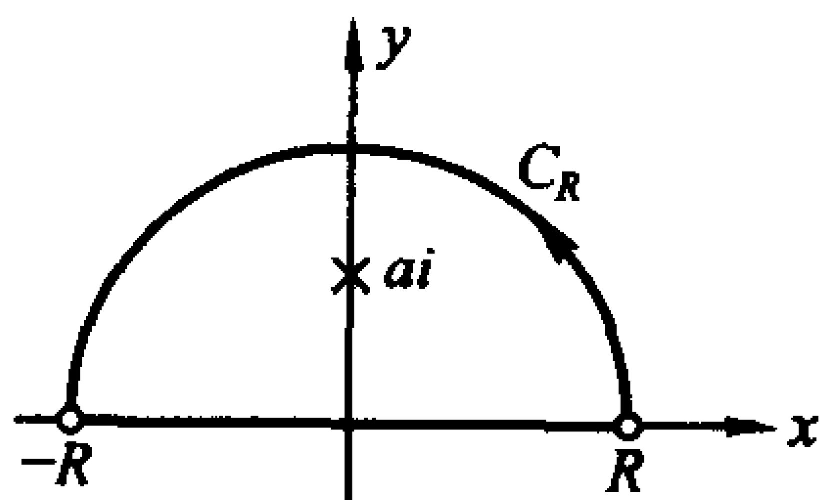


图 156

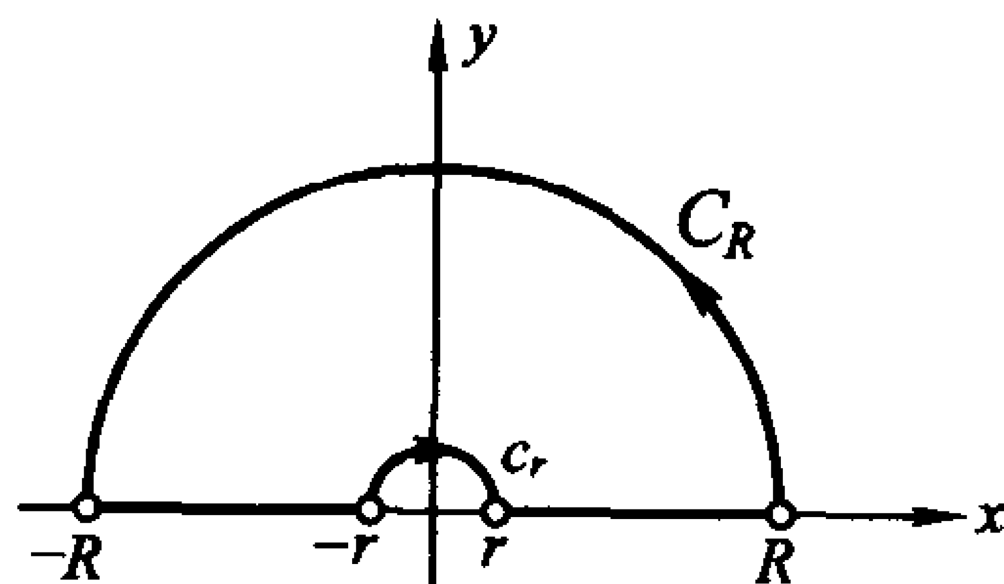


图 157

例 2 计算积分(欧拉)*

* 积分(6)通常与拉普拉斯或狄利克雷的名字相联系，可是它是由欧拉在 1781 年的著作中最初算出的.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\text{si }\infty \tag{6}$$

(参看第 70 目). 我们取辅助函数

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}.$$

选取如图 157 上所指出的积分周线,因为点 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点,我们用一个很小的半圆 c_r 来将这点围绕. 按柯西定理有

$$\int_R^r+\int_{c_r}+\int_r^R+\int_{C_R}=0.$$

从若尔当引理看出: $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}=0$. 要估计 $\int_{c_r}$,考虑 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内的洛朗展开式,这展开式具有形式

$$f(z)=\frac{1+iz+\frac{(iz)^2}{2}+\cdots}{z}=\frac{1}{z}+P(z),$$

其中 $P(z)$ 是一个在点 $z=0$ 处连续的函数. 由此显然有

$$\int_{c_r}=\int_{c_r}\frac{dz}{z}+\int_{c_r}P(z)dz=\int_{\pi}^{0}\frac{re^{i\varphi}id\varphi}{re^{i\varphi}}+O(r)=-i\pi+O(r)^{*}.$$

因此,柯西定理可写成形式

$$\int_R^r\frac{e^{ix}dx}{x}+\int_r^R\frac{e^{ix}dx}{x}=i\pi+O(r)+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

在第一个积分中用 $-x$ 来替代 x,得出它等于 $-\int_r^R\frac{e^{-ix}}{x}dx$,因而,将它与第二个积分结合后,有

$$\int_r^R\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=i\pi+O(r)+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

当 $r\to0$ 与 $R\to\infty$ 时取极限,最后得

$$\text{si }\infty=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

我们再来举出几个含有指数函数的积分的计算的例子.

例 3 计算积分(欧拉) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$. 我们考虑函数 $f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^z}$,并且利用它的下述性质:当 z 得到虚增量 $2\pi i$ 时,它便被乘以常数因子 $e^{2\pi ia}$. 按照这性质,我们将沿着图 158 中所示的矩形周线对 $f(z)$ 求积分. 在这矩形中, $f(z)$ 具有一个一阶极点 $z=\pi i$,其留数是 $c_{-1}=\frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}}=-e^{a\pi i}$,因此按留数定理

$$\int_{\text{I}}+\int_{\text{II}}+\int_{\text{III}}+\int_{\text{IV}}=-2\pi ie^{a\pi i}.$$

我们有

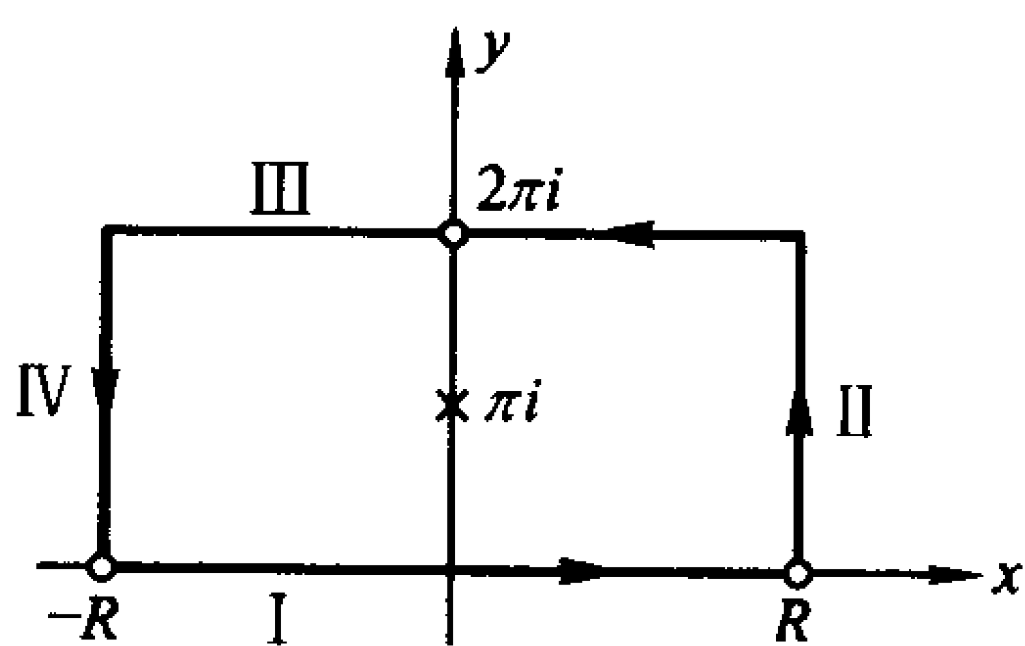


图 158

* 我们用 $O(\alpha)$ 表示当 $\alpha\to0$ 时为无穷小的函数.

$$\int_{\mathrm{I}} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}},\quad \int_{\mathrm{III}} = \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx = -e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx.$$

在线段Ⅱ与Ⅳ上分别有

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^{R}-1} = \frac{e^{(a-1)R}}{1-e^{-R}},$$

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}},$$

因此,如果要求 $0<a<1$,则当 $R\to\infty$时这两个积分 $\int_{\mathrm{II}}$ 与 $\int_{\mathrm{IV}}$ 都趋于 0. 由此可见,当 $0<a<1$ 时,

$$(1-e^{2a\pi i})\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}} + O\left(\frac{1}{R}\right) = -2\pi i e^{a\pi i},$$

因而,取当 $R\to\infty$时的极限,便得出所求的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx = \pi\frac{2i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}\quad (0<a<1). \tag{8}$$

例 4 计算积分(泊松)

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^{2}}\cos bx\,dx.$$

我们来考虑函数

$$f(z) = e^{-az^{2}},$$

并且注意:它沿着实轴的积分,可根据熟知的泊松积分(erf $\infty=1$,参看第 70 目(5))来算出,而在直线 $y=h$ 上,它变为函数

$$e^{-a(x+ih)^{2}} = e^{ah^{2}}\cdot e^{-ax^{2}}(\cos 2ahx - i\sin 2ahx),$$

其实数部分当 $h=\dfrac{b}{2a}$时与被积函数只相差一个常数因子. 因此,我们选取积分周线如图 159 所示. 按柯西定理

$$\int_{\mathrm{I}} + \int_{\mathrm{II}} + \int_{\mathrm{III}} + \int_{\mathrm{IV}} = 0. \tag{9}$$

这里

$$\int_{\mathrm{I}} = \int_{-R}^{R} e^{-ax^{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{a}}\int_{0}^{R\sqrt{a}} e^{-t^{2}}dt,\quad \int_{\mathrm{III}} = -e^{\frac{b^{2}}{4a}}\int_{-R}^{R} e^{-ax^{2}}e^{-ibx}dx,$$

在线段Ⅱ与Ⅳ上,当 $x=\pm R$ 时,

$$|e^{-az^{2}}| = e^{-a(R^{2}-y^{2})} \leqslant e^{\frac{b^{2}}{4a}}e^{-aR^{2}},$$

因此,若 $a>0$(我们也将假定是这样),则当 $R\to\infty$时 $\int_{\mathrm{II},\mathrm{IV}}\to 0$. 在等式(9)中取 $R\to\infty$时的极限,利用第 70 目的泊松积分(5)的已知值 erf $\infty=1$,求得:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{\frac{b^{2}}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^{2}}e^{-ibx}dx = 0,$$

因此,比较实数部分,最后我们有

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^{2}}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^{2}}{4a}}\quad (a>0). \tag{10}$$

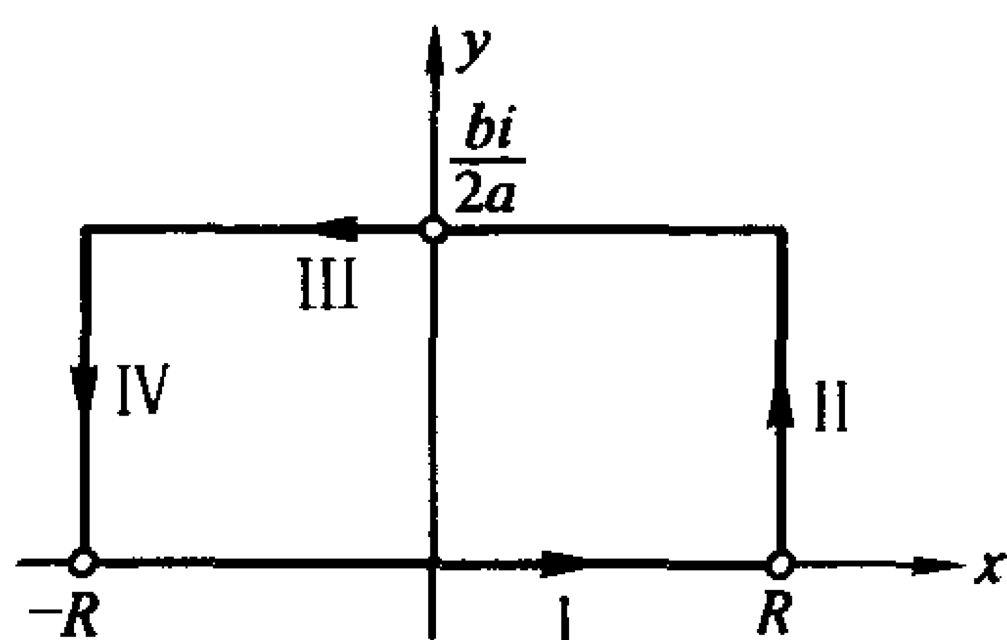


图 159

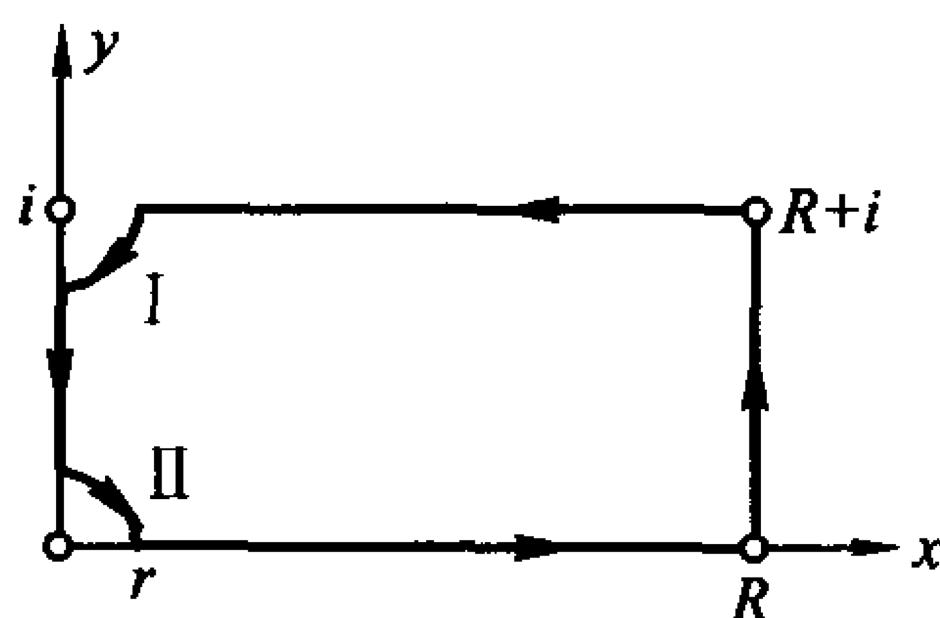


图 160

例 5 计算积分(勒让德)

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x}\frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}dx.$$

我们取辅助函数 $f(z)=\frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z}-1}$(它在 x 轴上的两倍虚数部分等于被积函数)且沿着在图 160 上所示的周线求积分. 由于 $f(x+i)=e^{-a}f(x)$,故沿着上面的与下面的边界的积分可以合并为$(1-e^{-a})\int_r^R f(x)dx$,沿线段 $x=R$ 的积分当 $R\to\infty$ 时趋于 0 (参看例 3). 在线段 $x=0$ 上,令 $z=iy$. 于是按柯西定理

$$(1-e^{-a})\int_r^R - i\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}dy}{e^{2\pi iy}-1}+\int_{\mathrm{I}}+\int_{\mathrm{II}}+O\left(\frac{1}{R}\right)=0, \tag{11}$$

其中 I 与 II 表示两段圆弧(参看图 160). 在点 $z=i$ 附近,我们有

$$f(z)=\frac{e^{iaz}}{e^{2\pi(z-i)}-1}=\frac{e^{-a}+c_1(z-i)+\cdots}{2\pi(z-i)+c'_2(z-i)^2+\cdots}=\frac{e^{-a}}{2\pi}\frac{1}{z-i}+P(z-i),$$

其中 $P(z-i)$在点 $z=i$ 处是正则函数;因为在弧 I 上有 $z=i+re^{i\varphi}$, $dz=rie^{i\varphi}d\varphi$,故

$$\int_{\mathrm{I}}=\frac{e^{-a}}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}}+O(r)=-\frac{ie^{-a}}{4}+O(r).$$

类似地,

$$\int_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}id\varphi+O(r)=-\frac{i}{4}+O(r),$$

因而等式(11)具有形式

$$(1-e^{-a})\int_r^R=i\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}dy+\frac{i}{4}(1+e^{-a})+O(r)+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

分出这里的虚数部分,且取当 $r\to0$, $R\to\infty$ 时的极限,注意到:

$$\operatorname{Re}\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}dy=-\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{2}dy=\frac{1}{2a}(e^{-a}-1)+O(r),$$

最后就有

$$\int_0^{\infty}e^{-\pi x}\frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}dx=\frac{1}{2}\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}}-\frac{1}{a}\quad(a>0). \tag{12}$$

例 6 计算积分(欧拉)*

* 这两个积分最初由欧拉在 1781 年算出.

$$I_1=\int_0^\infty \cos x^2 dx,\quad I_2=\int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

我们取辅助函数 $f(z)=e^{iz^2}$ 与图 161 上所示的周线. 在弧 C_R 上当代换 $z^2=\zeta$ 后得

$$\int_{C_R} f(z)dz=\frac{1}{2}\int_{C'_{R^2}}\frac{e^{i\zeta}}{\sqrt{\zeta}}d\zeta,$$

其中 C'_{R^2} 是半径为 R^2 的圆周的四分之一. 因此按若尔当引理这积分当 $R\to\infty$ 时趋于 0. 按柯西定理, 假若在 OA 上令 $z=x$, 而在 OB 上令 $z=t\sqrt{i}$, 有

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_{C_R}+\sqrt{i}\int_R^0 e^{-t^2}dt=0.$$

当 $R\to\infty$ 时取极限, 再利用 $\mathrm{erf}\ \infty=1$, 就得到

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx=\sqrt{i}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

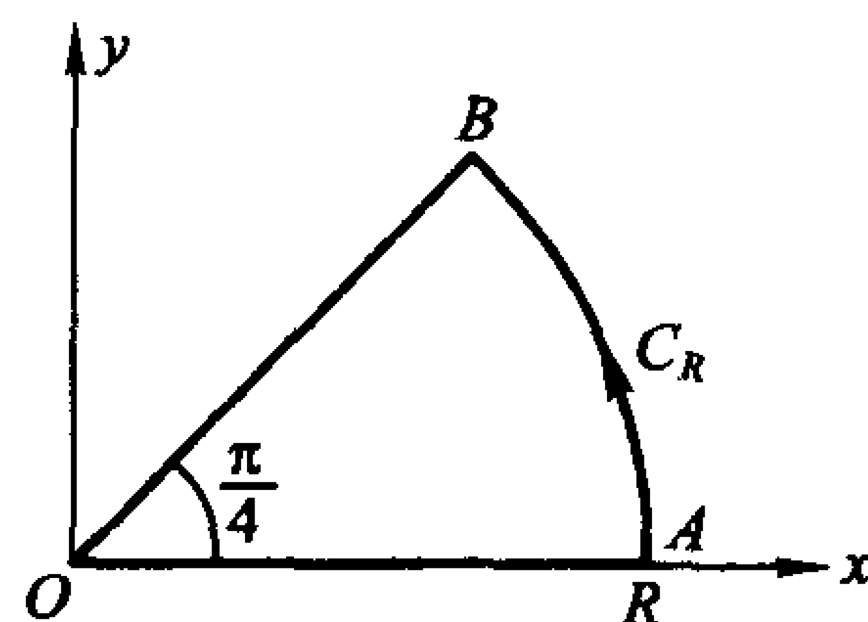


图 161

分出这里的实数部分与虚数部分, 得

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx=\int_0^\infty \sin x^2 dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{13}$$

与积分(13)相联系的是称做菲涅耳(Fresnel)积分的特殊函数

$$S(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}dt,\quad C(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}dt. \tag{14}$$

实际上, 令 $t=\tau^2$, 便给出

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\sin \tau^2 d\tau,\quad C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\cos \tau^2 d\tau,$$

因此公式(13)可写成下列形式

$$S(\infty)=C(\infty)=\frac{1}{2}. \tag{15}$$

74. 积分的计算(续) 我们从含有多值函数的积分的计算开始.

例 1 计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x^2+1)^2}.$$

我们取辅助函数 $f(z)=\dfrac{\ln z}{(z^2+1)^2}$, 且选取积分周线如同前一目里的例 2 中一样*(参看图 157). 在这周线的内部我们可选定对数的单值的一支. 假定 $\ln z$ 表示这样的一支, 它由不等式 $0<\arg z<\pi$ 来确定. 函数 $f(z)$ 在点 $z=i$ 有一个二阶极点, 具有留数

$$c_{-1}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\{f(z)(z-i)^2\}=\left[\frac{d}{dz}\frac{\ln z}{(z+i)^2}\right]_{z=i}=\frac{\pi+2i}{8}.$$

按留数定理

$$\int_{-R}^{-r}+\int_{C_r}+\int_r^R+\int_{C_R}=\frac{\pi^2 i}{4}-\frac{\pi}{2}.$$

当 $z=Re^{i\varphi}$, $0<\varphi<\pi$ 时, 自适当大的 R 开始, 有 $|\ln z|=\sqrt{\ln^2 R+\varphi^2}\leqslant 2\ln R$, 因此

* 我们用小圆周包围 $z=0$ 以去掉函数 $f(z)$ 的奇点.

$$\left|\int_{C_R}\right| \leqslant \frac{2\ln R}{(R^2-1)^2}\pi R,$$

从而当 $R\to\infty$ 时 $\int_{C_R}\to 0$. 类似地，当 $z=re^{i\varphi}$，$0<\varphi<\pi$ 时，自适当小的 r 开始，$|\ln z|\leqslant 2\ln\frac{1}{r}$；因此

$$\left|\int_{c_r}\right| \leqslant \frac{2\ln\frac{1}{r}}{(1-r^2)^2}\pi r,$$

从而当 $r\to 0$ 时，这积分也趋于 0. 在第一个积分中，当代换 $z=-x$ 后，得

$$\int_{-R}^{-r} = \int_r^R \frac{\ln x+\pi i}{(x^2+1)^2}dx,$$

这样一来，当 $r\to 0$，$R\to\infty$ 时将有

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x^2+1)^2}+\pi i\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi^2 i}{4}-\frac{\pi}{2}.$$

比较实数部分*，便给出所求的积分

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

例 2 要计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2+b^2},$$

我们选取辅助函数 $f(z)=\dfrac{\ln^2 z}{(z+a)^2+b^2}$ 与图 162 中所示的周线（在这周线的内部，若设 $0<\arg z<2\pi$，则 $\ln z$ 是单值的）. 在沿这周线的割痕的上岸与下岸，$\ln^2 z$ 分别取值 $\ln^2 x$ 与 $(\ln x+2\pi i)^2=\ln^2 x+4\pi i\ln x-4\pi^2$，所以 $\ln^2 x$ 的积分互相抵消，因而出现算出要求的积分的可能性. 在周线的内部，函数 $f(z)$ 具有两个一阶极点 $z_{1,2}=-a\pm bi$，分别具有留数

$$c'_{-1}=\frac{1}{2bi}[\ln r+i(\pi-\varphi)]^2,\quad c''_{-1}=-\frac{1}{2bi}[\ln r+i(\pi+\varphi)]^2,$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}$. 应用留数定理得

$$\int_{\mathrm{I}}+\int_{C_R}+\int_{\mathrm{II}}+\int_{c_r}=\frac{\pi}{b}4\varphi(\pi-i\ln r).$$

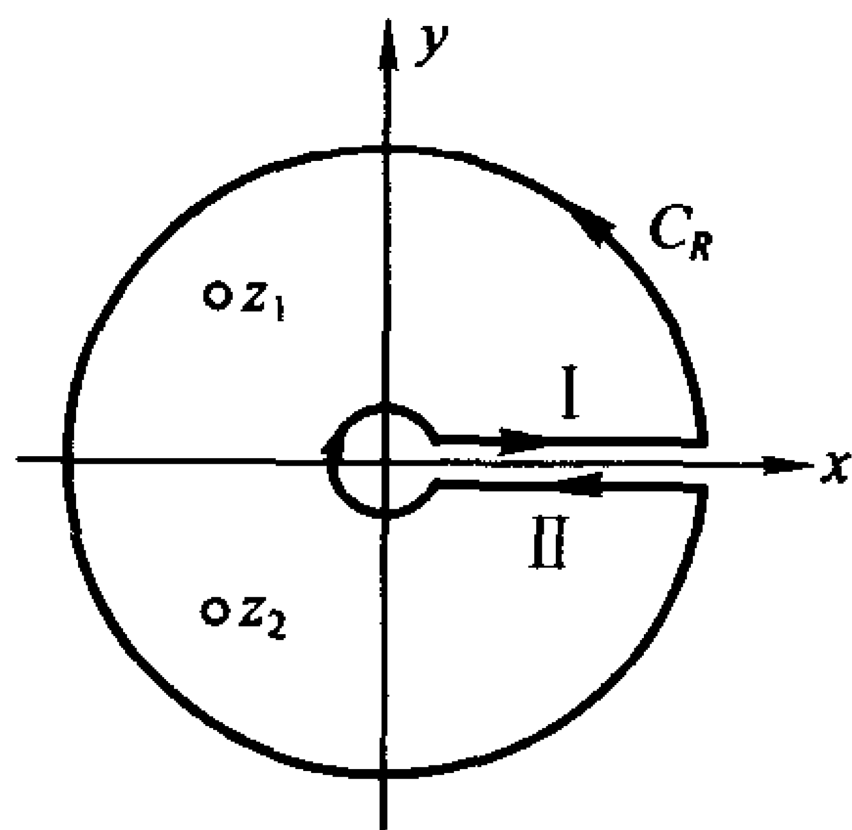


图 162

依照前面所讲的，有

$$\int_{\mathrm{I}}+\int_{\mathrm{II}}=-\int_r^R\frac{4\pi i\ln x-4\pi^2}{(x+a)^2+b^2}dx.$$

如同前一例中一样，可证明 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{c_r}=\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}=0$，因而当 $r\to 0$，$R\to\infty$ 取极限时将有

$$4\pi^2\int_0^\infty\frac{dx}{(x+a)^2+b^2}-4\pi i\int_0^\infty\frac{\ln x dx}{(x+a)^2+b^2}=\frac{4\pi\varphi}{b}(\pi-i\ln r).$$

由此，比较虚数部分，便得出所求的积分

---

* 比较虚数部分给出初等积分

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{\varphi \ln r}{b} = \frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b}\arctan\frac{b}{a}. \tag{2}$$

例 3 利用同一周线可计算积分(欧拉)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx \quad (0<a<1).$$

如果作为辅助函数,取

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z},$$

并注意到在割痕的下岸有 $f(xe^{2\pi i}) = e^{2a\pi i}f(x)$. 完成必须的计算与估计后,得到

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0<a<1). \tag{3}$$

然而,用代换 $x = e^t$ 可把这个积分化为前一目的例 3 中的积分.

例 4 我们来计算奇积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x}dx \quad (0<a<1)$$

(在点 $x=1$ 处有个奇点)的主值. 要计算它,我们选取辅助函数

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1-z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1-z}$$

与图 163 中所示的周线. 注意到:在割痕的下岸沿着正半轴有 $f(xe^{2\pi i}) = e^{2a\pi i}f(x)$,且在周线的内部 $f(z)$是正则的. 按柯西定理有

$$\int_{c_r} + (1-e^{2a\pi i})\left\{\int_r^{1-r} f(x)dx + \int_{1+r}^{R} f(x)dx\right\} + \int_{\gamma_r} + \int_{\gamma'_r} + \int_{C_R} = 0. \tag{4}$$

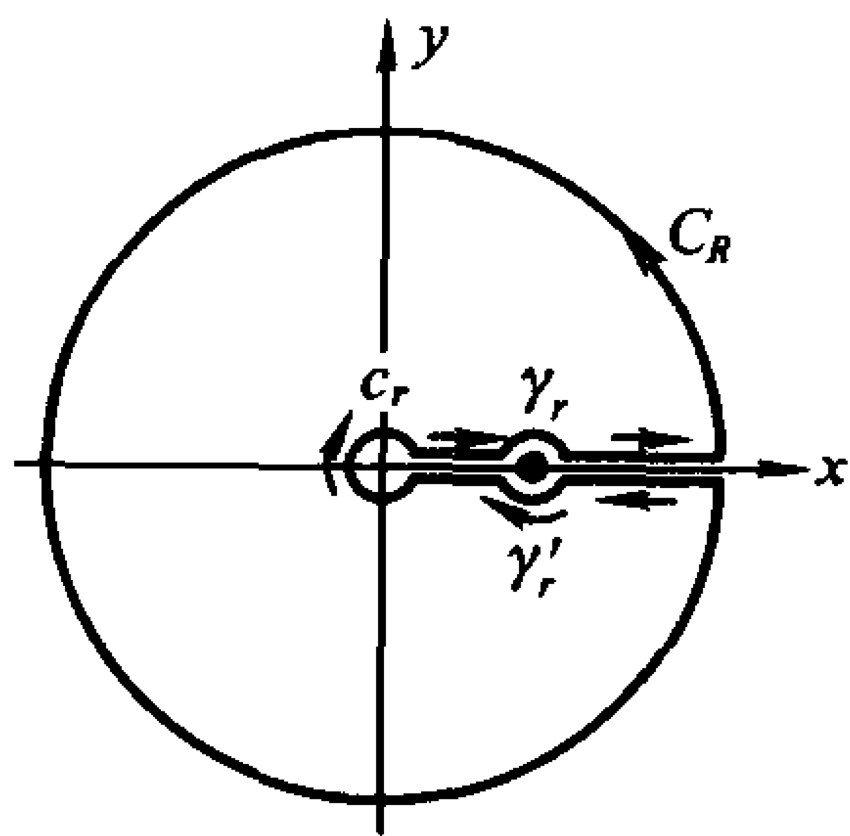


图 163

显然,当 $r\to 0$ 时 $\int_{c_r} \to 0$;当 $R\to\infty$时 $\int_{C_R} \to 0$. 沿 γ_r 与 γ'_r 分别有:$z^{a-1} = 1 + O(r)$, $z^{a-1} = e^{2a\pi i} + O(r)$ 与 $1-z = re^{i\varphi}$, $dz = -ire^{i\varphi}d\varphi$,其中 φ 分别自 0 变到 $-\pi$ 与自 $-\pi$ 变到 -2π,因此

$$\int_{\gamma_r} + \int_{\gamma'_r} = \pi i(1+e^{2a\pi i}) + O(r).$$

因此,在(4)中令 $r\to 0, R\to\infty$,取极限便得到

$$(1-e^{2a\pi i})I + \pi i(1+e^{2a\pi i}) = 0,$$

由此所求的奇积分等于

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x}dx = \pi\cot a\pi. \tag{5}$$

例 5 计算积分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}.$$

首先要确认:函数 $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)(1+z)^2}$ 在线段$(-1,1)$的外部可分为三个单值的分支. 实际上,令 $\varphi_1 = \arg(1-z)$, $\varphi_2 = \arg(1+z)$. 当沿着图 164 中虚线所表示的闭路线作逆时针方向绕行后,φ_1和 φ_2都得到增量 2π,因此,$\arg f(z) = \frac{\varphi_1+2\varphi_2}{3}$得到增量 2π,因而 $f(z)$回到原先的数值. 我们将考虑函数 $f(z)$的在线段$(-1,1)$的上岸取正值的那个分支,并取在图 164 中用粗线所表示的

那条周线. 在边岸 I 上我们有 $\arg f(z)=0$, 即 $f(z)=\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}$, 在边岸 II 上(当围着点 $z=1$ 作顺时针方向绕行后) $\arg f(z)=-\frac{2}{3}\pi$, 即 $f(z)=e^{-\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}$. 沿小圆周 c'_r, c''_r 的积分当 $r\to 0$ 时显然趋于 0. 因此, 按关于多阶连通区域的柯西定理

$$(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}=\int_{C_R}\frac{dz}{f(z)}.$$

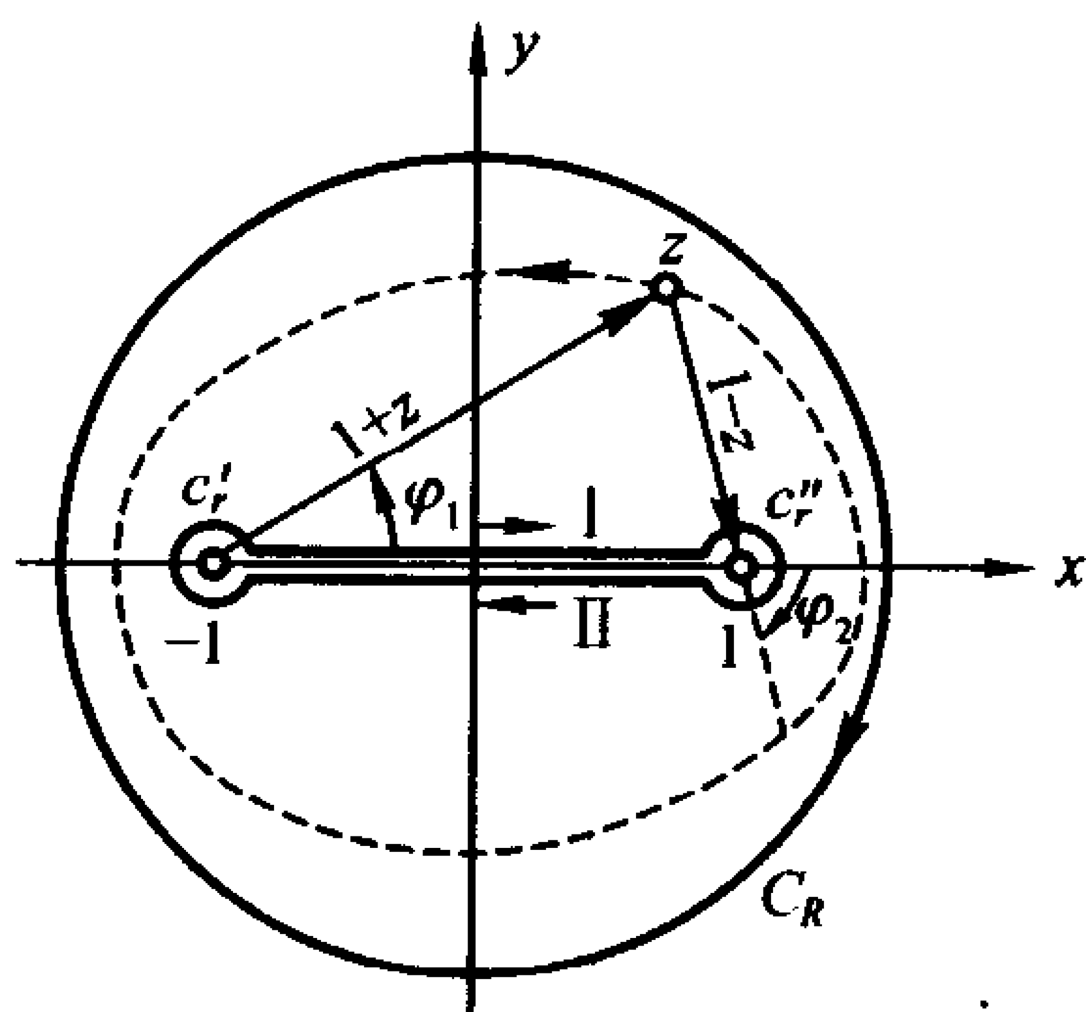


图 164

要计算 $\int_{C_R}$, 最好利用我们的 $\frac{1}{f(z)}$ 的那分支在无穷远点的邻域内的展开式. 将 $-z^3$ 拿出到根号外面后, 有

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{ze^{\frac{\pi i}{3}}}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}},$$

其中 $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 与 $\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}}$ 表示这些函数的这样一些分支, 它们在正轴上的线段 $(1,\infty)$ 内是正的. 按照二项式公式展开后, 我们得出 $\frac{1}{f(z)}$ 的选定的那分支在无穷远点处的留数: 它等于 $-e^{-\frac{\pi i}{3}}$ ($\frac{1}{z}$ 一项的系数附以负号).

但积分 $\int_{C_R}$ 等于这留数乘以 $2\pi i$ (参看第 24 目), 因此有

$$(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}})I=-e^{-\frac{\pi i}{3}}\cdot 2\pi i,$$

由此最后有

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \tag{6}$$

我们再举出两个具有有限积分限的积分的计算例子.

例 6 计算积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(a+b\cos t)^2}\quad (a>b>0).$$

令 $e^{it}=z$, 则 $dt=\frac{dz}{ie^{it}}=\frac{dz}{iz}$, $\cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, 且这个积分变为沿单位圆周的积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(a+b\cos t)^2}=\frac{4}{ib^2}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(z^2+\frac{2a}{b}z+1\right)^2}.$$

在圆周 $|z|=1$ 的内部, 被积函数有一个极点 $z_0=\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}$, 其留数为

$$c_{-1}=\left[\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)^2}\right]_{z=z_0}=\frac{b^2a}{4(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

按留数定理, 所求的积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(a+b\cos t)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\quad (a>b>0). \tag{7}$$

例 7 类似地可计算积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1+2\cos t)^n\cos nt}{1-a-2a\cos t}dt\quad\left(-1<a<\frac{1}{3}\right).$$

作代换 $e^{it}=z$ 后有

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1+2\cos t)^n\cdot e^{int}}{1-a-2a\cos t}dt=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z+z^2)^n}{(1-a)z-a(1+z^2)}dz.$$

被积函数有两个极点 $z_{1,2}=\frac{1}{2a}(1-a\pm\sqrt{1-2a-3a^2})$，其中一个位于圆周的内部，另一个位于外部，因为按二次方程的根的性质 $z_1z_2=1$，并且由于条件 $-1<a<\frac{1}{3}$，这两个根都是实根而且是相异的. 因此，按留数定理有

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1+2\cos t)^ne^{int}}{1-a-2a\cos t}dt=2\pi\frac{(1+z_1+z_1^2)^n}{1-a-2az_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-2a-3a^2}}\left(\frac{z_1}{a}\right)^n,\tag{8}$$

其中 $z_1=\frac{1}{2a}(1-a-\sqrt{1-2a-3a^2})$ 是位于圆周内部的极点. 由于(8)的右端是实数，故它给出所求的积分为

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1+2\cos t)^n\cos nt}{1-a-2a\cos t}dt=\frac{2\pi}{\sqrt{1-2a-3a^2}}\left(\frac{1-a-\sqrt{1-2a-3a^2}}{2a^2}\right)^n.\tag{9}$$

最后，我们来引入所谓 Γ 函数的一些积分表示式.

例 8 Γ 函数由积分(欧拉)

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt\tag{10}$$

来定义，这里积分沿着正半轴来取. 这个积分对于位于右半平面 $\operatorname{Re} z>0$ 上的所有的 z 都是绝对收敛的，因为 $|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}t^{x-1}$，并且是一个解析函数(参看第 16 目定理 4). 由积分路线的形变. 可以得到 Γ 函数的另一种表示，它在自变量值的更广大的区域内成立，亦即实施这一函数的解析延拓.

考虑函数

$$F(z)=\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta,\tag{11}$$

这里，积分沿着周线 C 来取，而 C 是由沿正半轴的割痕的两岸和圆周 $|\zeta|=r$ 所组成的(图 165). 在此，我们将 ζ^{z-1} 理解为函数 $e^{(z-1)\ln\zeta}$，这里的 $\ln\zeta$ 是对数的一个分支，对这一分支 $0<\arg\zeta\leqslant 2\pi$.

在割痕的上岸令 $\zeta=t$，而在下岸令 $\zeta=te^{2\pi i}$，我们也可把 $F(z)$ 表示为下面的形式

$$F(z)=\int_{\mathrm{I}}+\int_{c_r}+\int_{\mathrm{II}}=(e^{2\pi iz}-1)\int_r^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt+\int_{c_r}e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta.$$

当 r 为固定时，包含于这公式中的那个反常积分，在 $z=x+iy$ 的值的任一有界区域内，对于 z 来说一致收敛. 这是由于：当 $|z|<M$ 时，被积函数受函数 $e^{-t}\cdot t^{M+1}$ 所控，即其绝对值不大于函数 $e^{-t}\cdot t^{M+1}$，而函数 $e^{-t}\cdot t^{M+1}$ 的沿线段 (r,∞) 的积分是收敛的. 因此，函数 $F(z)$ 对于所有有限的 z 值都是解析的(整函数).

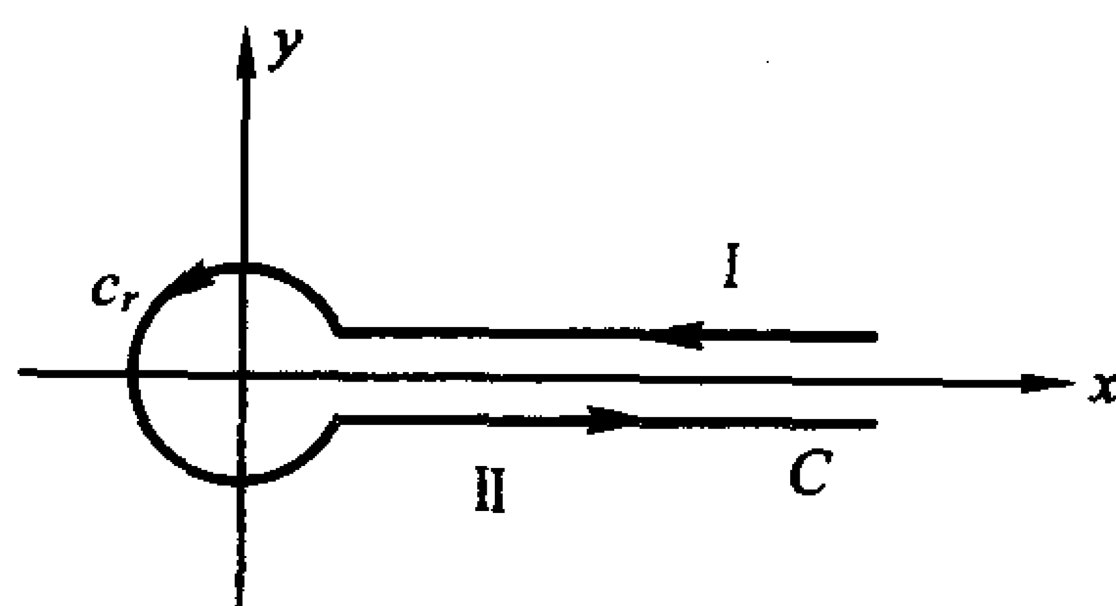


图 165

在 c_r 上，$\zeta=re^{i\varphi}$，我们有 $|e^{-\zeta}\zeta^{z-1}|=e^{-r\cos\varphi}e^{(x-1)\ln r-\varphi y}<Ar^{x-1}$，其中 A 是某一个常数(当 z 为固定时). 由此推出：

$\left|\int_{c_r}\right| < A2\pi r^{x}$. 我们假定：$\operatorname{Re} z = x > 0$，因而当 $r\to 0$ 时 $\int_{c_r}\to 0$. 由此可见当 $\operatorname{Re} z > 0$ 时，我们有权取 $r\to 0$ 时的极限，并且根据定义(10)得到

$$F(z) = (e^{2\pi i z}-1)\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = (e^{2\pi i z}-1)\Gamma(z)$$

(当 $\operatorname{Re} z\leqslant 0$ 时，这个极限过程是不合法的). 这样一来，我们得到 Γ 函数的一个新的积分表示(汉克尔)：

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta. \tag{12}$$

注　右端代表两个整函数 $F(z)$ 与 $e^{2\pi i z}-1$ 的比. 在右半平面上它与解析函数 $\Gamma(z)$ 重合，所以(12)给出了 $\Gamma(z)$ 到左半平面的解析延拓；因此，$\Gamma(z)$ 是一个亚纯函数，除了在负整数* 的点 $z=-n$ 与点 $z=0$ 处之外，这函数处处是解析的；因为在最后所提的那些点处(12)的分母为 0.

在(12)中以 $1-z$ 代换 z 得到

$$\Gamma(1-z) = \frac{1}{e^{-2\pi i z}-1}\int_C e^{-\zeta}\zeta^{-z}d\zeta = \frac{e^{-\pi i z}}{e^{-2\pi i z}-1}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{-z}d\zeta$$

$$= \frac{i}{2\sin \pi z}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{-z}d\zeta. \tag{13}$$

在第七章中将证明公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{14}$$

对于所有的复数 z 都成立. 利用这公式，且用 $-\zeta$ 替代(13)中的积分变量 ζ，因而周线 C 要用周线 C^* 来替代(图166)，我们得出函数 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 的积分表示(汉克尔)：

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} e^{\zeta}\zeta^{-z}d\zeta. \tag{15}$$

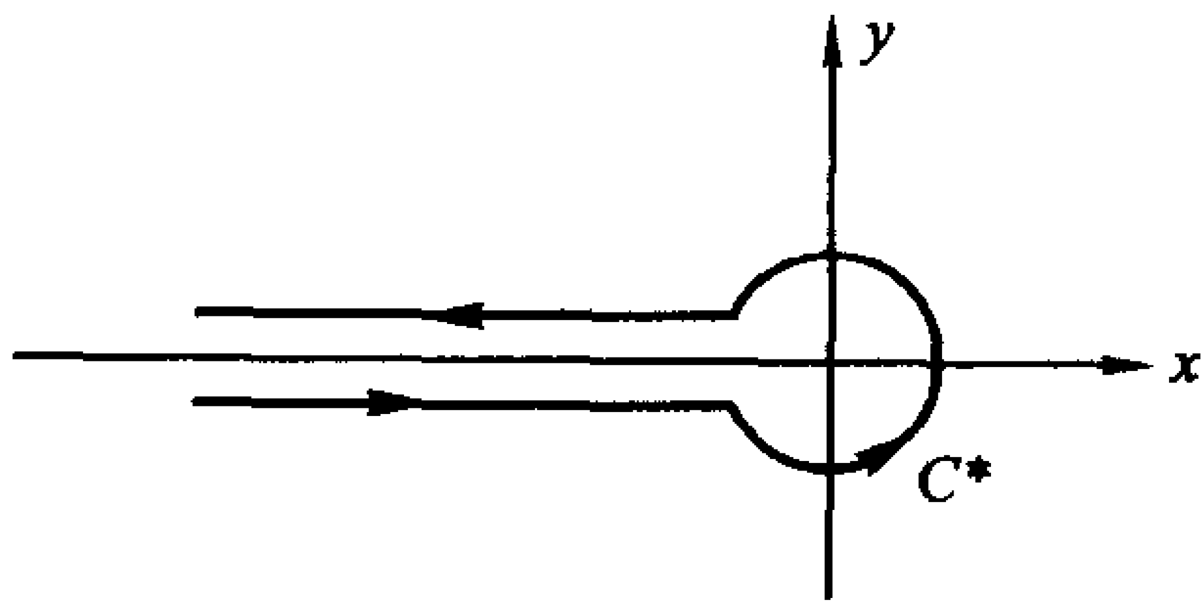


图 166

75. 零点的个数的计算. 稳定性问题　决定一个解析函数在一给定的区域内的零点的个数，这个问题在分析中时常遇到，它的一般解由第 23 目里的辐角原理给出：$f(z)$ 在闭周线 C 内的零点的个数是

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z), \tag{1}$$

其中 $\Delta_C \arg f(z)$ 表示在沿周线 C 绕行一周后 $\arg f(z)$ 的全部增量. 这时假定：$f(z)$ 在 C 的内部解析，在 C 上连续且异于 0，每一个零点照它的重数来计算个数.

有时，利用辐角原理的简单推论是有益的.

定理(鲁歇)　假若函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都在 C 的内部解析，又在 C 上连续且满足条件

$$|f(z)| > |g(z)|, \tag{2}$$

则函数 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 内的零点的个数相等.

---

* 在正整数的点处，我们在先前已经看到，$\Gamma(z)$ 是解析的，因此在这些点处(12)的分子也为 0.

为了证明这个定理,我们注意:由于条件,在 C 上 $|f(z)|>0$ 且 $|f(z)+g(z)|\geqslant|f(z)|-|g(z)|>0$. 因此函数 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 上都不为 0,因而可以对它们应用辐角原理. 从关系式

$$\arg\{f(z)+g(z)\}=\arg f(z)+\arg\left\{1+\frac{g(z)}{f(z)}\right\}$$

我们得到

$$\Delta_C\arg\{f(z)+g(z)\}=\Delta_C\arg f(z)+\Delta_C\arg\left\{1+\frac{g(z)}{f(z)}\right\}.$$

但由于当点 z 沿周线 C 运动时,点 $w=1+\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 总是留在圆 $|w-1|<1$ 的内部 $\left(\text{这是由在 } C \text{ 上} \left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right|<1 \text{ 推出}\right)$,故点 w 不可能围着坐标原点绕行,即

$$\Delta_C\arg\left\{1+\frac{g(z)}{f(z)}\right\}=0.$$

因此

$$\Delta_C\arg\{f(z)+g(z)\}=\Delta_C\arg f(z), \tag{3}$$

于是只需应用公式(1)即得出所求证的结果.

我们来举一些应用这个定理的例子.

例 1 证明所谓代数学的基本定理:*方程*

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0 \quad (c_0\neq0) \tag{4}$$

在复数平面上有 n 个(有限的)根.

为了证明,假定 $f(z)=c_0z^n$, $g(z)=c_1z^{n-1}+\cdots+c_n$,且选取 R 适当大,使在圆周 $|z|=R$ 上有 $|f(z)|>|g(z)|$,这是可能的,因为 $|f(z)|=|c_0|R^n$, $|g(z)|\leqslant|c_1|R^{n-1}+\cdots+|c_n|$,而 R^n 的增大较快于次数为 $(n-1)$ 的任何多项式. 于是按鲁歇定理,方程(4)在圆 $|z|<R$ 内的根的个数与 z^n 在这圆内的零点的个数相等,即是 n. 在另一方面,由于当 $z\to\infty$ 时, $c_0z^n+\cdots+c_n\to\infty$,故只需在必要时再增大 R,我们便可认为在圆外没有这方程的根.

例 2 要决定方程 $z^8-5z^5-2z+1=0$ 在单位圆内的根的个数,我们令 $f(z)=-5z^5+1$ 与 $g(z)=z^8-2z$. 由于当 $|z|=1$ 时,有 $|f(z)|\geqslant|5z^5|-1=4$,而 $|g(z)|\leqslant|z|^8+2|z|=3$,故我们所考虑的方程在单位圆内的根的个数,与 $5z^5=1$ 的根的个数相同,即,是 5 个.

例 3 证明:方程

$$z+e^{-z}=\lambda, \tag{5}$$

其中 $\lambda>1$,在右半平面上有唯一的(实)根. 为此,考虑由线段 $(-iR, iR)$ 与右半圆周 $|z|=R$ 组成的周线,且设 $f(z)=z-\lambda$, $g(z)=-e^{-z}$. 在 $z=iy$ 的线段上,有 $|f(z)|=|\lambda-iy|\geqslant\lambda>1$, $|g(z)|=|e^{-iy}|=1$. 在半圆周: $|z|=R$, $\operatorname{Re} z=x>0$ 上,当 R 充分大时 $(R>\lambda+1)$,有: $|f(z)|\geqslant|z|-\lambda=R-\lambda>1$, $|g(z)|=e^{-x}\leqslant1$. 因此,可应用鲁歇定理于所描述的类型的任一周线的内部,方程(5)与方程 $\lambda-z=0$ 有相同个数的根,即恰只有一根. 就是说,在整个右半平面上,给定的方程有唯一的根. 这根是实的:因为当 $z=0$ 时方程的左边等于 $1<\lambda$,而当 $z=x\to\infty$ 时左边无限制增大,因此可求得这样的 $z=x$ 使左边等于 λ.

对于应用问题，下述拉什－赫尔维茨(Rush-Hurwitz)的问题*是特别重要的：

求出条件，使多项式或分式有理函数(而在更一般提法——整函数或亚纯函数)的零点全部在左半平面上.

这个问题的价值决定于，它与力学和电子学系统中的振动的稳定性问题有联系.为了说清这种联系，我们提醒注意，最简单的振动理论问题可导致具有常系数的线性微分方程：

$$L[x]=a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=0. \tag{6}$$

众所周知，这种方程的通解具有形式

$$x=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}+\cdots+C_ne^{p_nt},$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是特征多项式

$$A(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n$$

的根，而 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是任意常数**.多项式的每一个复根 $p_k=s_k+i\sigma_k$ 对应于具有角频率 σ_k 的振动 $e^{p_kt}=e^{s_kt}\{\cos\sigma_kt+i\sin\sigma_kt\}$.当 $s_k<0$ 时，这振动是阻尼的；当 $s_k=0$ 时，它是调和的；而当 $s_k>0$ 时，它有无限制增大的振幅.因此，假若我们想限于这样的振动周线，它不允许具有无限制增大的振幅的固有振动，则我们应当要求：多项式 $A(p)$ 的所有的根都位于左半平面或在虚轴上.

我们将指出解拉什－赫尔维茨问题一些最简单的方法；更完整的叙述读者可以在 Н. Г. Чеботарев 和 Н. Н. Мейман 的专著[4]或者在调节理论的教程(可看例如[5]或[6])中找到.我们从一个解多项式问题的代数方法开始.

(1) 赫尔维茨准则　为简单起见我们假设，所研究的多项式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \tag{7}$$

的系数是实数，并且 $a_0>0$.下列定理成立：

定理(A.赫尔维茨(1895))　为了具有实系数 a_k $(a_0>0)$ 的多项式(7)的所有根都有负的实部，充分必要条件是下列不等式组成立：

$$D_1=a_1>0,D_2=\begin{vmatrix}a_1&a_0\\a_3&a_2\end{vmatrix}>0,D_3=\begin{vmatrix}a_1&a_0&0\\a_3&a_2&a_1\\a_5&a_4&a_3\end{vmatrix}>0,\cdots,$$

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&a_0&0&\cdots&0\\a_3&a_2&a_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{2n-1}&a_{2n-2}&a_{2n-3}&\cdots&a_n\end{vmatrix}>0 \tag{8}$$

---

* 问题最早由麦克斯韦尔(Maxwell)于1868年提出的，拉什(Rush)(1877)给出这问题第一个解，这解没有得到广泛传播，赫尔维茨(Hurwitz)(1895)的解对于应用更方便(见稍后).

** 为简单起见，我们限定于单根的情形.

(在 $k>n$ 时令 $a_k=0$).

我们将用完全归纳法来证明定理. 对于 $n=1$ 定理成立,因为条件(8)在这情况下化为不等式 $a_1>0$,由 $a_1>0$ 和考虑到假设 $a_0>0$ 推出,多项式 $f(z)=a_0z+a_1$ 的根是负的.

现在假设定理对于幂次 $\leqslant n-1$ 的多项式都成立,要证明定理对于 n 次幂多项式也成立. 为此令 $f(z)=p+q$,其中

$$p=a_0z^n+a_2z^{n-2}+\cdots,\quad q=a_1z^{n-1}+a_3z^{n-3}+\cdots,$$

考虑幂次 $\leqslant n-1$ 的多项式

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=a_1p+(a_1-a_0z)q\\&=a_1^2z^{n-1}+(a_1a_2-a_0a_3)z^{n-2}+\\&\quad a_1a_3z^{n-3}+(a_1a_4-a_0a_5)z^{n-4}+\cdots\end{aligned}\tag{9}$$

往后的证明我们用两次行动进行.

1) 多项式 $\varphi(z)$ 的行列式(8)通过 $f(z)$ 的同样的行列式按照公式

$$\Delta_k=a_1^{k-1}D_{k+1},\quad k=1,2,\cdots,n-1\tag{10}$$

表达出来. 事实上,我们有

$$a_0a_1\Delta_k=a_0a_1\begin{vmatrix}a_1a_2-a_0a_3 & a_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_1a_4-a_0a_5 & a_1a_3 & a_1a_2-a_0a_3 & a_1^2 & \cdots & 0\\ a_1a_6-a_0a_7 & a_1a_5 & a_1a_4-a_0a_5 & a_1a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_0a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_0a_3 & a_1a_2-a_0a_3 & a_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_0a_5 & a_1a_4-a_0a_5 & a_1a_3 & a_1a_2-a_0a_3 & a_1^2 & \cdots & 0\\ a_0a_7 & a_1a_6-a_0a_7 & a_1a_5 & a_1a_4-a_0a_5 & a_1a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_0a_1 & a_1a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_0a_3 & a_1a_2 & a_1^2 & a_1a_0 & 0 & \cdots & 0\\ a_0a_5 & a_1a_4 & a_1a_3 & a_1a_2 & a_1^2 & \cdots & 0\\ a_0a_7 & a_1a_6 & a_1a_5 & a_1a_4 & a_1a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\end{vmatrix}=a_0a_1^kD_{k+1}$$

(我们给行列式"镶上一条边",然后把第 1 列的元加到第 2 列的元上,第 3 列的元乘以 a_0/a_1 后加到第 4 列的元上,等等,最后从第 1 列中提出公因子 a_0,而从其他列中提出公因子 a_1).

2) 当且仅当 $a_1>0$ 和 $\varphi(z)$ 的根在左半平面 H 内时,$f(z)$ 的根在左半平面 H 内.

假设 $f(z)$ 的根在 H 内;与这多项式

$$f(z)=a_0\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \tag{11}$$

一样构造一个多项式

$$f_*(z)=a_0\prod_{k=1}^{n}(z+\bar{z}_k)=a_0z^n-a_1z^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n, \tag{12}$$

它的根在右半平面内(在展开乘积下得到它的系数的表达式).显然,

$$f(z)+f_*(z)=2p,\quad f(z)-f_*(z)=2q.$$

因为在 $\mathrm{Re}\,z\gtreqless 0$ 时,$|z-z_k|\gtreqless|z+\bar{z}_k|$,所以

$$\text{在 } \mathrm{Re}\,z\gtreqless 0 \text{ 时,也有 } |f(z)|\gtreqless|f_*(z)|, \tag{13}$$

因此,q 只可能有纯虚根.证明这些根都是单根.假如相反,在某一点 iy 同时使 $f(iy)=f_*(iy)$ 和 $f'(iy)=f'_*(iy)$,此时

$$\frac{f'(iy)}{f(iy)}=\frac{f'_*(iy)}{f_*(iy)}\text{或者}[\ln f(iy)]'=[\ln f_*(iy)]'$$

(在我们这里 f 和 f_* 在虚轴上没有根).根据公式(11)和(12),后一关系式可转写成形状

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{iy-z_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{iy+\bar{z}_k},$$

但是由于对一切 $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{iy-z_k}>0$,而 $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{iy+\bar{z}_k}<0$*,所以这关系式不可能成立.

多项式 q 的幂次等于 $n-1$,因为根据众知的多项式根的性质 $\dfrac{a_1}{a_0}=-\sum\limits_{k=1}^{n}z_k>0$,从而,当 $a_1\neq 0$ 时,p 的幂次等于 n.由此可见,考虑到上面所证的,我们有展开式

$$\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{a_0}{a_1}z+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{z-i\beta_k}+C. \tag{14}$$

由于

$$\frac{p}{q}=\frac{f+f_*}{f-f_*}=\frac{1+\dfrac{f_*}{f}}{1-\dfrac{f_*}{f}} \tag{15}$$

和分式线性函数 $\omega=\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}$ 把圆 $|\zeta|<1$ 映射到右半平面上,所以根据不等式(13)可以断定,在 $\mathrm{Re}\,z\gtreqless 0$ 时,

$$\mathrm{Re}\,\frac{p(z)}{q(z)}\gtreqless 0, \tag{16}$$

---

* 我们提醒一下,$\mathrm{Re}\,z=x$ 和 $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 有相同的符号.

由此断定，在展开式(14)中所有 $\lambda_k>0$（因为在 $\operatorname{Re} z\gtreqless 0$ 时 $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z-i\beta_k}\gtreqless 0$ 和在点 $z=i\beta_k$ 的邻域内 $\operatorname{Re}\dfrac{p}{q}$ 的符号由 $\operatorname{Re}\dfrac{\lambda_k}{z-i\beta_k}$ 的符号决定）并且 C 是纯虚常数.

最后，利用(14)我们求得

$$\varphi=a_1p+(a_1-a_0z)q=a_1q\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{z-i\beta_k}+C\right\},$$

而从此式可看出，在 $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ 时 φ 不可能有根. 事实上，花括号内的表达式的实数部分在 $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ 时是正的，而 q 只有在点 $i\beta_k$ 处变为 0，而在这些点 $i\beta_k$ 处，显然 $\varphi\neq 0$（因为在相反情形里在这些点上就有 $p=0$，也就意味着 $f=0$，这与条件矛盾）. 由此可见，多项式 $\varphi(z)$ 的全部根都在左半平面 H 内.

现在设已知 $\varphi(z)$ 的全部根都在 H 内，并且 $a_1>0$. 从公式(9)可看出，类似于 f 的多项式 p 和 q，φ 的多项式 p_1 和 q_1，有形状 $p_1=a_1q$ 和 $q_1=a_1p-a_0zq$，因此

$$\frac{p}{q}=\frac{q_1}{p_1}+\frac{a_0}{a_1}z. \tag{17}$$

对于 φ 重复上面我们对 f 进行过的讨论，我们求得，当 $\operatorname{Re} z\gtreqless 0$ 时 $\operatorname{Re}(p_1/q_1)\gtreqless 0$. 由于 $a_0/a_1>0$ 和 $\operatorname{Re}(q_1/p_1)$ 的符号与 $\operatorname{Re}(p_1/q_1)$ 的符号相同，所以从(17)我们得出不等式(16). 而在这时借助于(15)下我们将证明不等式(13)成立. 由此可见，在 $\operatorname{Re} z>0$ 时我们将有 $|f(z)|>|f_*(z)|$，由此推出 $f(z)$ 在右半平面没有根. 但是 $f(z)$ 在虚轴上也不可能有根，因为在虚轴上 $|f(z)|=|f_*(z)|$，并且 $f(z)$ 的每一个纯虚根就是 p 和 q 的根，因而也是 $\varphi(z)$ 的根，这就与所作的假设相矛盾. 因此 $f(z)$ 的全部根都在 H 内. 这样，结论 2)得证. 依据它和结论 1)，容易作出从 $n-1$ 转到 n，同时也就结束赫尔维茨定理的证明.

例 1 对多项式 $f(z)=z^3+2z^2+3z+1$ 我们有 $D_1=2, D_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5, D_3=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=5$. 因此，所有它的根都在左半平面上.

例 2 对多项式 $f(z)=z^3+2z^2+z+1$ 我们有 $D_2=\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}=-1$，因此，它至少有一个根在右半平面内或者在虚轴上（否则，$f(iy)=iy(1-y^2)+1-2y^2$，由此可见，多项式没有纯虚根，亦即可以断定，它至少有一个根在右半平面内）.

由展开式(11)可以得到，具有实系数的多项式的全部根在左半平面内的必要条件：*这多项式的所有系数应该有相同符号*（斯托道勒条件）. 但是正如例 2 所表明的，这不是充分条件*.

(2) *几何方法* 拉什－赫尔维茨问题几何上化为，在已知亚纯函数所实施的映

* 有趣地指出，斯托道勒曾提出把这条件当作充分必要条件(1894).

射 $w=f(z)$ 下右半平面 $\text{Re } z \geqslant 0$ 的像 Δ 是否将包含点 $w=0$ 的问题. 在函数 $f(z)$ 的黎曼曲面 R 上区域 $\tilde{\Delta}$ 被对应于平面 z 的虚轴的曲线 $\tilde{\Gamma}$ 所限定——在自动控制理论中把这条曲线称为**频率速端曲线**.

根据解析函数的几何性质可以表述成下列准则

稳定性准则　如果函数 $f(z)$ 的黎曼曲面的一部分 $\tilde{\Delta}$, 在按 y 增长的方向绕行频率速端曲线时, 一直留在频率速端曲线的右边, 不包含位于 $w=0$ 上方的点(并且速端曲线本身不经过这点的上方), 那么对应的自动控制系统是稳定的, 但是如果这个条件不满足, 则不是稳定的.

在实际问题中研究黎曼曲面形状常常显得很困难, 但是构作频率速端迹在平面 w 上的射影 Γ 通常十分容易. 为此只要在方程 $w=f(iy)$ 中分离实部和虚部, 我们也就得到曲线 Γ 的参数方程 $u=u(y), v=v(y), -\infty<y<\infty$. 但是如果不考虑黎曼曲面就把所述准则应用到位于 Γ 的右边的平面 w 的区域 Δ_0 上, 那么可能得出不正确的结论. 这与那样一些情况有关, 就是当 Γ 没有经过全部位在 Γ 上方的 R 的分支, 即没有经过没有 $\tilde{\Gamma}$ 的点的分支, 可能走出区域 Δ_0 的范围, 而且有可能到达点 $w=0$, 尽管 Δ_0 也不包含这一点. 由于区域 $\tilde{\Delta}$ 的单连通性在这些情况下 Δ_0 的点的上方必定存在曲面 R 的分支点, 它们把没有 $\tilde{\Gamma}$ 的点的分支与包含这条曲线的分支连接起来.

例　对于多项式

$$f(z)=z^3-z^2+2z-3$$

曲线 $\Gamma: u=y^2-3, v=y(2-y^2)$ 有画在图 167 中的形状. 区域 Δ_0 (图上加阴影的) 不包含 $w=0$, 但是区域 Δ ($\tilde{\Delta}$ 的射影) 表示是整个平面, 相应的自动控制系统, 当然, 是不稳定的(不满足斯托道勒条件), 这里黎曼曲面在图 167 中用星号标出的点的上方有分支点 *, 曲线 $\tilde{\Gamma}$ 在它的三个分支的一支上.

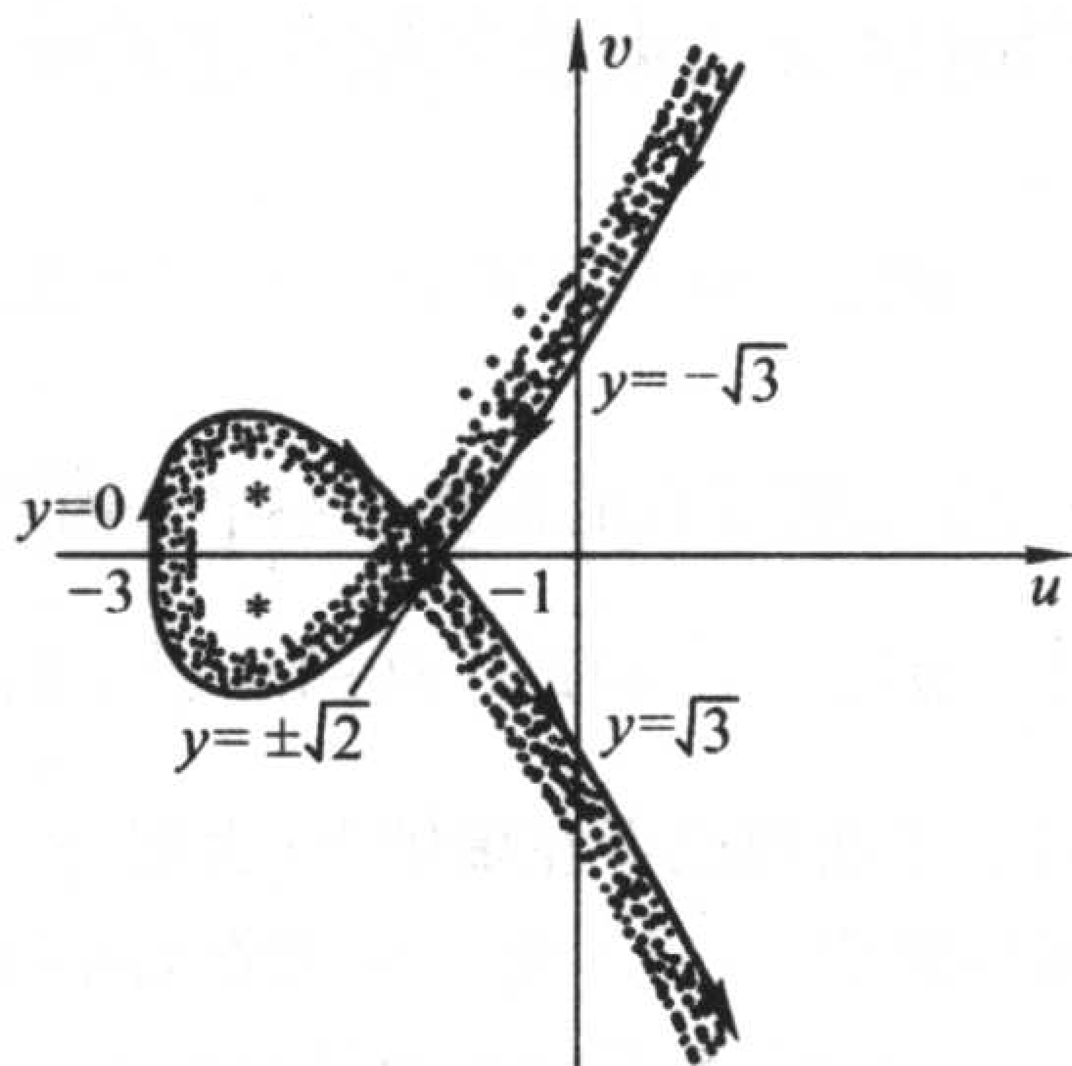


图 167

在某些问题中区域 Δ——$\tilde{\Delta}$ 在 w 平面上的射影的形状, 在没有研究黎曼曲面下也能够弄清楚. 为此, 譬如, 可以考虑一组半圆 $D_R: |z| \leqslant R, \text{Im } z \geqslant 0$, 并且要弄清在映射 $w=f(z)$ 下对应于这些半圆的区域 Δ_R 的形状, 知道在 R 改变时 Δ_R 怎样变化, 我们也将知道区域 Δ 的形状. 显然在稳定性准则的措词中黎曼曲面上的区域 $\tilde{\Delta}$ 可以用这个平面区域来代替.

我们还引入一个几何的稳定性准则, 这准则涉及重要一类自动控制理论问题, 在这类问题中被研究的函数有形状

---

* 在映射 $w=f(z)$ 下, 分支点对应方程 $f'(z)=3z^2-2z+2=0$ 的根.

$$f(z)=\frac{1}{KG(z)}+1, \tag{18}$$

其中 $G(z)$为有理分式函数,K 为某个常量.这是所谓的具有简单反联系系统的情况.常量 K 有确定的物理意义,称作**强化系数**;并且把它从 $G(z)$的表达式中分出被结构性设想所证实:控制系统的不同环节影响量 K 和G.

为了得到所要求的函数(18)的稳定性准则,我们利用第 23 目的辐角原理.显然,函数 $f(z)$的极点是 $G(z)$的零点.如果用 P 表示右半平面中这些极点的个数,那么按照辐角原理在右半平面内没有 $f(z)$零点的条件化为条件

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_R}\arg f(z)=P,$$

其中 C_R表示充分大半径的半圆D_R (见上面)的按顺时针方向绕行的边界*.

由此可见,在(按顺时针方向)绕行 C_R时,向量 $f(z)$应当环绕坐标原点逆时针方向转动 P 次.考虑到,向量 $f(z)$环绕原点旋转等价于向量$\frac{1}{KG(z)}=f(z)-1$ 环绕点 $w=-1$ 的旋转,或者向量$\frac{1}{G(z)}$环绕点 $w=-k$ 的旋转,我们得出下面的稳定性准则,这一准则通常与乃克维斯特和米哈依洛夫的名字联系着的.

乃克维斯特-米哈依洛夫准则 *为了使由函数(18)所描述自动控制系统是稳定的,充分必要条件是,按顺时针方向绕行由虚轴的线段和充分大的半径的半圆周所围的半圆 D_R的边界时,向量$\frac{1}{G(z)}$环绕点 $w=-K$ 逆时针方向旋转P 次,其中 P 是$\frac{1}{G(z)}$在右半平面中的极点数.*

例 设函数 $G(z)$有形状

$$G(z)=\frac{1}{z(1+\tau_1 z)(1+\tau_2 z)},$$

其中 τ_1和 τ_2为正常数.函数$\frac{1}{G(z)}$的频率速端曲线由方程

$$w=\frac{1}{G(iy)}=iy(1+i\tau_1 y)(1+i\tau_2 y)=-(\tau_1+\tau_2)y^2+iy(1-\tau_1\tau_2 y^2)$$

描述,并且有图 168 中用粗线画出的形状.事实上,

$$u=-(\tau_1+\tau_2)y^2,\quad v=y(1-\tau_1\tau_2 y^2),$$

由此看出,这个速端曲线完全位于左半平面内,在 $y=0$ 和 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$时交于 u 轴,并且切线的角系数$\frac{dv}{du}=\frac{3\tau_1\tau_2 y^2-1}{2(\tau_1+\tau_2)y}$在速端曲线与$u$ 轴相交的点处等于∞和$\pm\frac{\sqrt{\tau_1\tau_2}}{\tau_1+\tau_2}$,并且在$|y|\to\infty$时无限增大.在$|z|$充分大时,我们有$\frac{1}{G(z)}\approx\tau_1\tau_2 z^3$,由此可看出,当 R 较大时对应右半圆周$|z|=R$,

* 与第 23 目中公式的符号不同解释如下,在那里区域的边界是按逆时针方向绕行的.

$\mathrm{Re}\,z>0$的是接近于被经过的圆周$|w|=\tau_1\tau_2R^3$一倍半的曲线(见图 168).

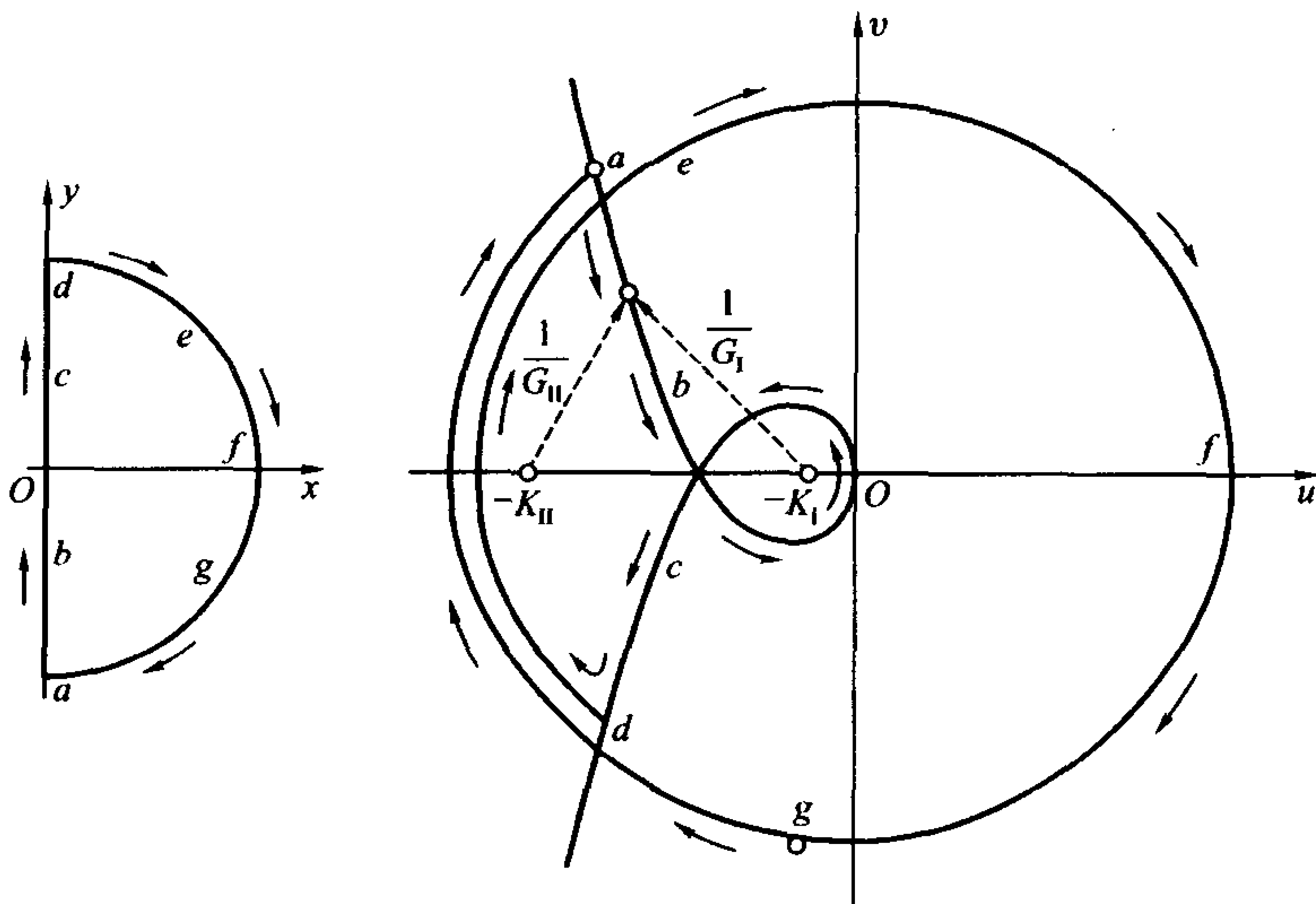


图 168

设强化系数的值 $K=K_{\mathrm{I}}$ 是这样的,点 $-K_{\mathrm{I}}$ 位于速端曲线的圈的内部(因为在速端曲线的自交点上 $y^2=\frac{1}{\tau_1\tau_2}$,所以对这一点 $u=-\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}$,并且所考虑的情况对应于值 $0<K<\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}$).如从图中所见,在完整绕行 C_R 时向量 $\frac{1}{G(z)}=\frac{1}{G_{\mathrm{I}}}$ (用虚线画在图上)在这情况下没有作出一次往返,——如果绕行从点 a 开始,那么 $\frac{1}{G}$ 开始(在绕行速端曲线时)按逆时针方向作出多于一次往返,但是后来(在绕行对应于半圆周的曲线时)按顺时针方向转同一角度.如果值 $K=K_{\mathrm{II}}$ 是这样的,点 K_{II} 位于速端曲线的圈的左边$\left(\text{亦即 } K>\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}\right)$,那么在完整绕行 C_R 时向量 $\frac{1}{G(z)}=\frac{1}{G_{\mathrm{II}}}$,显然,按顺时针方向作出两次完整往返(图 168).

由于在所讨论的情况下 $\frac{1}{G(z)}$ 在右半平面中的极点个数等于 0,所以根据乃克维斯特-米哈依洛夫准则对应的自动控制系统在 $0<K<\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}$ 时是稳定的,在 $K>\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}$ 时是不稳定的.

(3) 威什涅格拉茨基-乃克维斯特方法　这一方法是前面方法的发展,同时也适合对依赖参数的函数的研究*.我们考虑依赖两个实数 ξ 和 η 的多项式族,或者完全一样,依赖一个复参数 $\zeta=\xi+i\eta$ 的多项式族

---

* 方法的思想属于俄罗斯工程师 И. А. 威什涅格拉茨基(1877)方法的进一步改进属于美国工程师乃克维斯特(1932).方法的正确论证是苏联数学家梅曼(1949)给出,我们遵循他的叙述[4].

$$f(z,\zeta)=P_1(z)\xi+P_2(z)\eta-P_3(z), \tag{19}$$

其中 $P_k(z), k=1,2,3$ 是某些固定的多项式.我们将认为,不存在所有三个这样的多项式的公共根(如果这样的根 z_0 存在,那么方程就可以约去因子 $z-z_0$ 的适当的幂次).用 n 表示它们中最大的幂次.

通过 $D(k,n-k)$ 表示参数平面 ζ 的点的总体,对其中每一个点,多项式(19)有关于 z 的 k 个根,具有负实数部分,和 $n-k$ 个根,具有正实数部分*.特别是,$D(n,0)$——稳定区域——那些点 ζ 的全体,对于这些点所有根都有负实数部分.因为多项式的根连续依赖于 ζ 的,所以与总体 $D(k,n-k)$ 的每一个点 ζ 一起,这个点的某个充分小的邻域也属于这个总体.由此推出,总体 $D(k,n-k)$ 是由某个数量的区域组成的.

点 ζ 不属于区域 $D(k,n-k)$ 中任意一个区域,如果相应的多项式(19)即使有一个纯虚数根,或者,特别,有无穷远的根,这个根也可以看作位在虚轴上,在这种情况里参数 ξ 与 η 的值的小的变化可以达到,多项式已经不将有纯虚根,因此,对所有区域 $D(k,n-k)$ 的总体的补集由这些区域的边界点组成,威什涅格拉茨基的思想就在于在参数平面内寻找区域 $D(k,n-k)$.

首先考虑多项式 $P_2(z)=iP_1(z)$ 的特殊情况,亦即

$$f(z,\zeta)=P_1(z)\zeta-P_3(z). \tag{20}$$

方程 $f(z,\zeta)=0$,在这种情况下可以把它改写成形状

$$\zeta=\frac{P_3(z)}{P_1(z)}, \tag{21}$$

它建立了 z 平面和 ζ 平面之间的某种关系,并且对应于每一个点 ζ_0 有 n 个点 $z_0^{(v)}$——在给定参数值 ζ_0 下方程(20)的根(它们中的某一些可能相等或者走向无穷远).

由上述推出,区域 $D(k,n-k)$ 的边界 Γ 是在映射(21)下虚轴的像,亦即函数 $\zeta=\frac{P_3(z)}{P_1(z)}$ 的频率速端曲线.

设 ζ_0 是一个不在 Γ 上的点,具有负实数部分的相应方程(20)的根的个数 $k(\zeta_0)$,像上面一样,可以借助辐角原理求得.假设 $P_1(z)$ 没有纯虚根,并且通过 k_1 表示它在左半平面内的根的个数,用 n_1 和 n_3 分别表示 $P_1(z)$ 和 $P_3(z)$ 的幂次,令

$$m=\begin{cases}\dfrac{n_3-n_1}{2}, & \text{若 } n_3>n_1,\\ 0, & \text{若 } n_3\leqslant n_1.\end{cases} \tag{22}$$

考虑由半圆周 $C'_R:|z|=R, \operatorname{Re} z\leqslant 0$ 和虚轴的线段 $C''_R:-R\leqslant y\leqslant R$ 所围的半

---

* 像往常一样,根的重数多少,就计算多少次.

圆. 设 $C_R^* = C'_R + C''_R$. 对于充分大的 R, 根据辐角原理

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C_R^*} \arg\left\{\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)}\right\} + \frac{1}{2\pi}\Delta_{C_R^*} \arg P_1(z), \tag{23}$$

其中周线 C_R^* 按逆时针方向被通过.

对于大的 $|z|$ 我们有 $\zeta_0 - \dfrac{P_3(z)}{P_1(z)} = z^{n_3 - n_1}\left\{c_0 + \dfrac{c_1}{z} + \cdots\right\}$, $c_0 \neq 0$, 因此, 在 $n_3 > n_1$ 时, $\Delta_{C'_R} \arg\left\{\zeta_0 - \dfrac{P_3(z)}{P_1(z)}\right\} = \pi(n_3 - n_1) + O\left(\dfrac{1}{R}\right)$; 在 $n_3 \leqslant n_1$ 时这个增量等于 $O\left(\dfrac{1}{R}\right)$. 由此可见, 按照我们的选择 m 总有

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C'_R} \arg\left\{\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)}\right\} = m + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

把公式(23)的第一项分为两项, 分别对应于绕行 C'_R 和 C''_R, 同时考虑到它的第二项根据辐角原理等于 k_1, $R \to \infty$ 时取极限, 我们从这公式得到

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left\{\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)}\right\} + m + k_1,$$

其中 C 是自下向上被通过的 z 平面的虚轴. 转向参数平面 ζ, 我们得到如下结果.

方程(20)在左半平面内的根的个数, 在 $\zeta = \zeta_0$ 时等于

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg(\zeta_0 - \zeta) + m + k_1 \tag{24}$$

其中 Γ 是函数(21)的以 y 增长方向通过的频率速端曲线, m 按公式(22)确定, k_1 为多项式 $P_1(z)$ 在左半平面中根的个数.

注 在证明时, 我们把 $P_1(z)$ 有纯虚根的情况除外. 在这种情况, 如果 $P_1(z)$ 的每一个这样的根都以半重数计算, 并且把(24)式第一项看作 $\arg(\zeta_0 - \zeta)$ 沿着单独走向无穷远的速端曲线的那些分支的增量之和, 公式(24)仍然成立(从速端曲线的方程 $\zeta = P_3(iy)/P_1(iy)$ 可看出, 在趋近 $P_1(z)$ 的每一个虚根时, $\zeta \to \infty$). 事实上, 所有进行过的讨论在这种情况下也是成立的, 只要在绕行 C''_R 时, 每一个纯虚根是从左边沿着以根为中心的小的半圆周绕行的. 绕行每一个这样的半圆周都把量 $\dfrac{p}{2}$ 带入

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \arg\left\{\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)}\right\},$$

其中 p 是相应的根的重数*, 量 $\Delta_{C_R^*} \arg P_1(z)$ 就保持不变, 因为在 C_R^* 内部没有出

---

* 实际上, 在每个这种根 a 的邻域内,

$$\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} = \frac{1}{(z-a)^p}\{c_0 + c_1(z-a) + \cdots\}, c_0 \neq 0,$$

而且半圆周是按顺时针方向绕行的.

现新的$P_1(z)$的根.所有这种半圆周的半径趋于0,取其极限,我们就得到了需要的结果.

例 设多项式项族

$$f(z,\zeta)=(z^3-i)\zeta+3az(z+1),$$

曲线Γ由下面的方程定出:

$$\zeta=\frac{3ay}{1+y^3}+i\frac{3ay^2}{1+y^3},$$

就是说,代表一条笛卡儿单叶线(图169).在此,$n_1=3,n_2=2,m=0,P(z)=z^3-i$有一个纯虚根$z=-i$,一个根$z=e^{\frac{5i\pi}{6}}$在左半平面上,故$k_1=\frac{3}{2}$.公式(24)取下面的形式

$$k(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg(\zeta_0-\zeta)+\frac{3}{2}.$$

对于在分支Γ的右边的ζ_0,第一项等于$-\frac{1}{2}$(绕行曲线段Ⅰ时:给出$\Delta\arg(\zeta_0-\zeta)=-\frac{3\pi}{4}$;绕行曲线段Ⅱ时:0;绕行曲线段Ⅲ时:$\frac{1}{4}\pi$.参看图169);因此,对于这种$\xi_0$有$k(\xi_0)=1$.同样得到:对于环内的$\xi_0$,有$k(\xi_0)=0$,而对于曲线$\Gamma$的左边的$\xi_0$,有$k(\xi_0)=2$.由此可见,完整地说明了根的位置.

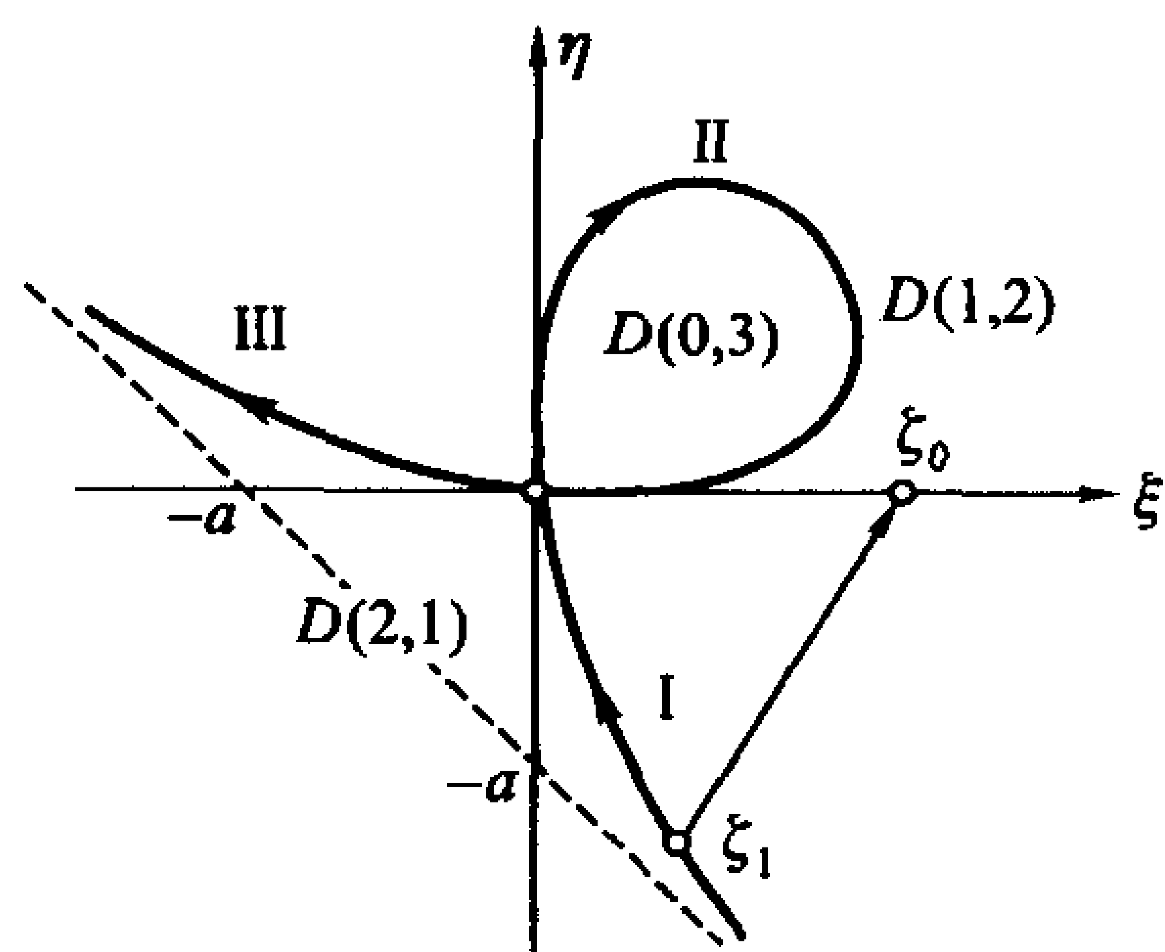


图 169

最后我们来讨论多项式(19)的一般情形.设

$$P_k(z)=u_k(x,y)+iv_k(x,y)\quad(k=1,2,3)$$

我们看出,方程$f(z,\zeta)=0$与方程组

$$\left.\begin{aligned}U=u_1(x,y)\xi+u_2(x,y)\eta-u_3(x,y)=0,\\V=v_1(x,y)\xi+v_2(x,y)\eta-v_3(x,y)=0\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

等价.

如前,我们将认为方程组(25)建立平面$z=x+iy$的点到平面$\zeta=\xi+i\eta$的点的映射.解出有关ξ与η的方程组,这种映射可写成显函数的形式

$$\xi=\frac{u_3v_2-u_2v_3}{\Delta},\eta=\frac{u_1v_3-u_3v_1}{\Delta},\tag{26}$$

其中$\Delta=\Delta(z)=u_1v_2-u_2v_1$,为方程组的行列式.显然,使$\Delta(z)\neq0$的点$z$对应于完全确定的有限点$\xi$.$\Delta(z)=0$而至少有(26)的一个分子异于0的点$z$(因此,第二个分子也同样容易断定)对应于点$\xi=\infty$*.最后,假若在某个点$z$处,(26)的分子与分母均为0,则$\zeta$平面的整条直线对应于这个点$z$(这种点与对应于这种点的那些

* 在这种点,另外那一个分子也异于零,因为由$\Delta=0$可以推出$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$,并且如若第二个分子等于零,即$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_3}{v_3}$,则第一个分子也等于零:$\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$.

直线,我们将称做**例外点**与**例外直线**)*.

(26)的逆映射是不高于 n 值的,因为对应于 ξ 的每一个点 z,是多项式(19)在给定 ξ 值时的根.

我们将说明映射(26)下是否保持序向的问题.为此,将方程组(25)对于 x 与 y 来微分,视 ξ 与 η 为 x 与 y 的函数,

$$u_1 d\xi + u_2 d\eta + \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0,$$

$$v_1 d\xi + v_2 d\eta + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = 0.$$

就 $d\xi$ 与 $d\eta$ 解出这方程组,并且利用柯西－黎曼方程 $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$,我们得到

$$d\xi = \frac{1}{\Delta}\left\{-\left(u_2\frac{\partial U}{\partial y} + v_2\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx + \left(u_2\frac{\partial U}{\partial x} - v_2\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy\right\},$$

$$d\eta = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(u_1\frac{\partial U}{\partial y} + v_1\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx - \left(u_1\frac{\partial U}{\partial x} - v_1\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy\right\}.$$

由此求得映射(26)的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\},$$

因而看出:这雅可比行列式的符号与 Δ 的符号一致.因此,若 $\Delta>0$,映射(26)保持序向;若 $\Delta<0$,它改变序向.

如前,我们来考虑分解平面 ζ 为区域 $D(k,n-k)$,且用 Γ 来表示这些区域的边界.显然,在方程(26)中令 $x=0$,可得 Γ 的参数方程.同以前一样,我们将认为对应于 y 增大的方向是曲线 Γ 的正绕行.曲线 Γ 可以由几支组合而成.再者,有别于多项式(20)的情形,当绕行整条 y 轴时,曲线的各段可能被通过若干次(不多于 n 次).此外,曲线 Γ 可能包含例外直线——这是当 y 轴上有例外点时的情形.

考虑曲线 Γ 的某一段 $\zeta_1\zeta_2$,且假定:当行经整条 y 轴时,它被经过 l 次,即,这曲线段对应于 y 轴上的 l 条线段

$$y_1^\mu y_2^\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,l).$$

假若 $y_1^\mu y_2^\mu$ 的方向与 y 轴的方向一致,我们令 $\varepsilon_\mu = 1$;在相反的情形则令 $\varepsilon_\mu = -1$.若在 $y_1^\mu y_2^\mu$ 上行列式 $\Delta>0$,则令 $\delta_\mu = 1$;在相反的情形令 $\delta_\mu = -1$(见图 170).

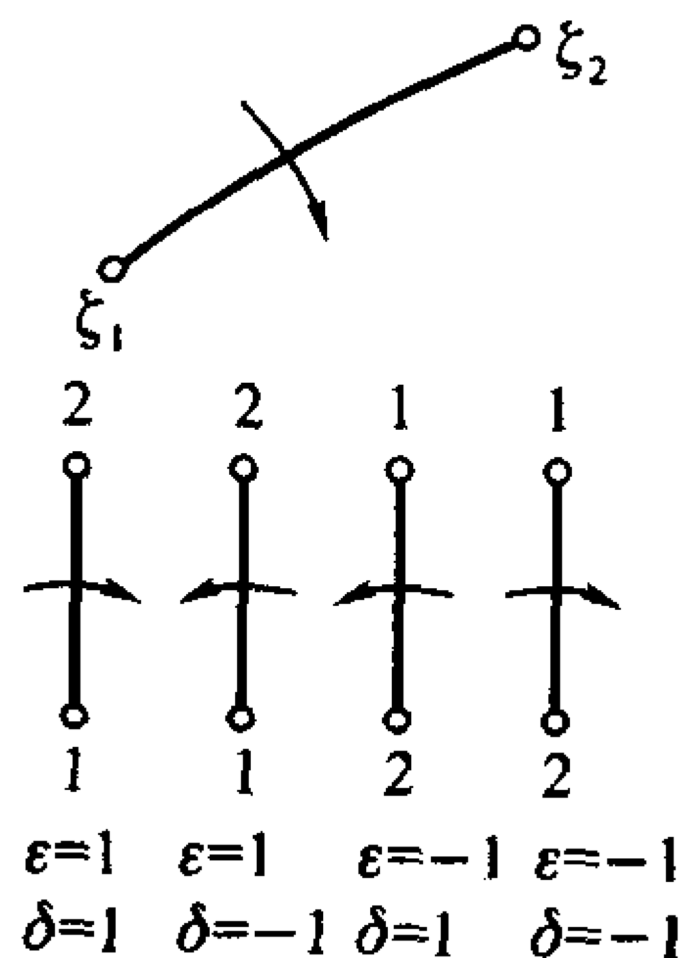


图 170

假设点 ζ 沿着某一充分小的路径连续地运动,自左向右

* 在方程(20)的情形,不可能有例外点.

方向穿过弧 $\zeta_1\zeta_2$. 这路径对应于在平面 z 上与 y 轴上的线段 $y_1^l y_2^l$ 相交的 l 条路径. 显然,若 $\varepsilon_\mu\delta_\mu>0$,则对应的路径自左半平面走至右半平面,因而多项式(19)在它上面获得一个具有正的实数部分的根,而失去一个具有负的实数部分的根;在 $\varepsilon_\mu\delta_\mu<0$ 的情形,正好与此相反. 因此,我们从曲线 Γ 的弧 $\zeta_1\zeta_2$ 的左边转到右边时,多项式(19)失去 $\varepsilon_1\delta_1+\varepsilon_2\delta_2+\cdots+\varepsilon_l\delta_l$ 个具有负的实数部分的根*.

利用这个结果,只需知道区域 $D(k,n-k)$ 中的某一个,我们便能求得它们的全体.

最后,我们将举出属于威什涅格拉茨基的例子:

$$f(z,\zeta)=z^3+\xi z^2+\eta z+1.$$

令 $z=iy$ 且分离实数部分与虚数部分,得曲线 Γ 的参数方程:

$$\xi=\frac{1}{y^2},\quad \eta=y^2.$$

这是双曲线 $\xi\eta=1$ 的位于第一象限内的分支(图 171). 当行经整条 y 轴时,它被经过两次,同时,假若设对于下半条 y 轴来说 $\mu=1$,对于上半条 y 轴来说 $\mu=2$,则将有 $\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=-1$. 再次,决定雅可比行列式的符号的行列式 Δ,在 y 轴上等于 $\Delta(iy)=-y^3$,所以 $\delta_1=1,\delta_2=-1$. 因此,当从左到右通过弧 $\zeta_1\zeta_2$ 时,失去 $\varepsilon_1\delta_1+\varepsilon_2\delta_2=2$ 个具有负的实数部分的根. 在坐标原点处 $\xi=\eta=0$,多项式具有形式 $z^3+1=0$,因而有根 $z_1=-1,z_{2,3}=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$. 因此,在双曲线的下方的区域是 $D(1,2)$,而在上方的那个区域是 $D(3,0)$——稳定区域. 为了检验起见,可取点 $\xi=\eta=3$,在这个点处多项式具有形式 z^3+3z^2+3z+1 且具有三重根 $z=-1$.

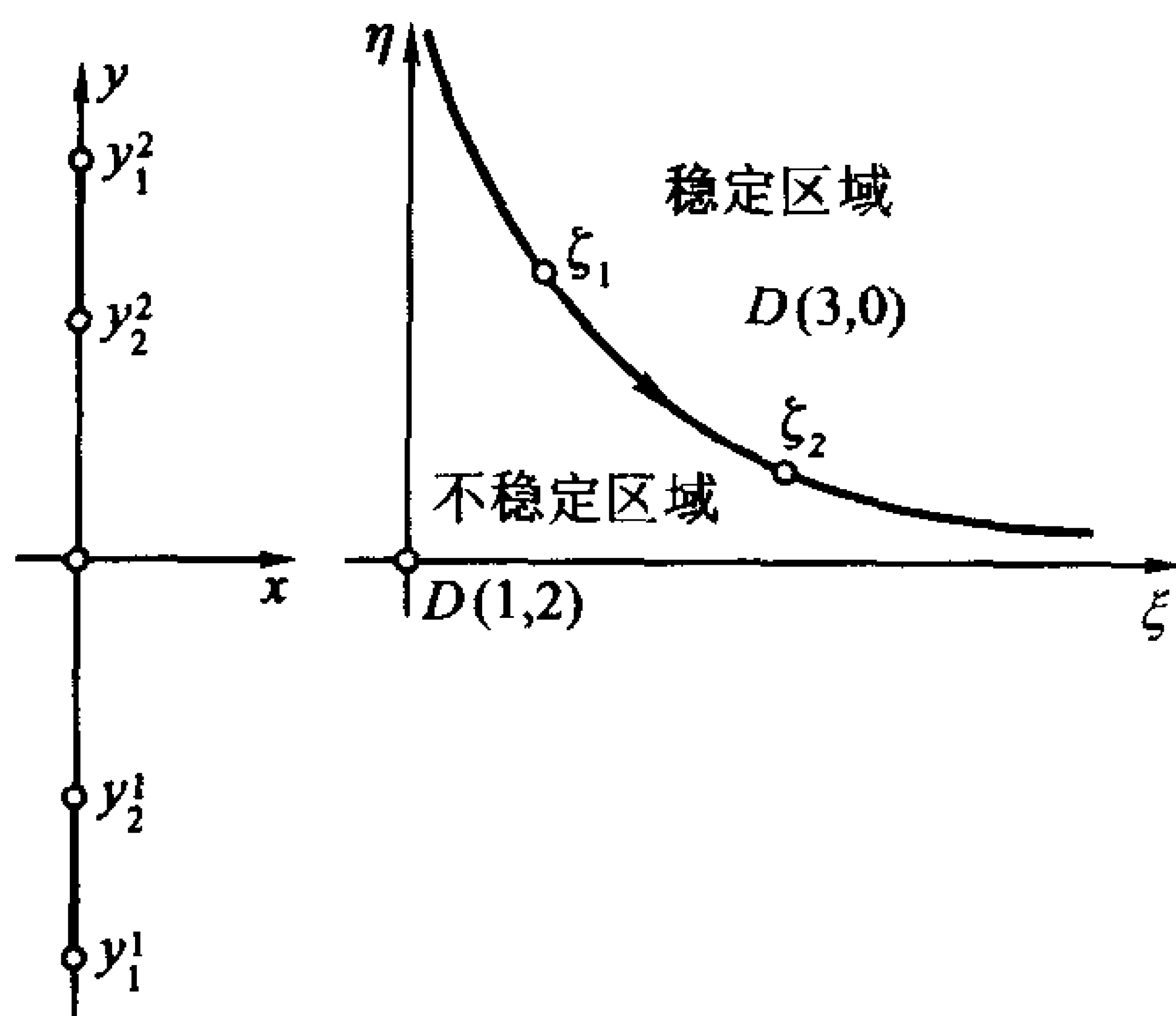


图 171

§3 渐近估计的方法

在许多工程技术问题中,重要的是要有方法来研究所谓稳定状态. 这些问题在数学上可归结为对于函数在较大变元值时的性质的研究,或者可以说,对于这些函数的渐近状态的研究. 在此,我们将提出函数的渐近研究的某些方法. 为了更详细研究这些方法,我们推荐 M. A. Евграфов 的书[7].

76. 渐近展开式 作为函数渐近研究的基础是用更简单的函数来替代这些函数,使得主要性质被保留下来,并且抛弃次要的性质. 特别,自变量在某个延伸到无穷远的集合 M (通常在某一条通向无穷远点的曲线)上的值较大的情况下研究函数 $f(z)$,最简单就是用在某种意义上接近于这函数的级数

* 如若这个和等于 0,则在弧 $\zeta_1\zeta_2$ 的两侧有具有相同指标的区域 $D(k,n-k)$. 在多项式(20)的情形,这个和总是等于 1,因此,Γ 的左侧的区域的数值 k 总是较右侧的大 1(参看图 169).

$$c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\cdots \tag{1}$$

来替代它.通常要求,用这级数的部分和 $s_n(z)$ 取代函数 $f(z)$ 时的误差,当 z 沿着 M 的点趋向 ∞ 时,是关于部分和的后面一项的高阶无穷小量,亦即

$$\lim_{z\to\infty} z^n\left\{f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{z^k}\right\}=0^*,n=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

由这条件当然不能推出级数(1)的收敛性,但是,正如我们下面所看到的,甚至满足这条件的处处发散的级数也包含许多有关函数 $f(z)$ 的渐近性质的有益知识.

满足条件(2)的级数(1)称做函数 $f(z)$ 在集合 M 上的渐近展开式,并且级数与函数之间的这种联系可写成如下形状:

$$f(z)\sim c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\cdots \tag{3}$$

在给定集合 M 上的函数的渐近展开式,如果它存在,则以唯一的形式确定.

事实上,由条件(2),在 $n=0$ 时我们求得 $\lim\limits_{z\to\infty}\{f(z)-c_0\}=0$,由此确定 $c_0=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$;在 $n=1$ 时

$$\lim_{z\to\infty} z\left\{f(z)-c_0-\frac{c_1}{z}\right\}=0,$$

由此 $c_1=\lim\limits_{z\to\infty}z\{f(z)-c_0\}$,一般说来

$$c_n=\lim_{z\to\infty}z^n\{f(z)-s_{n-1}(z)\},n=0,1,2,\cdots. \tag{4}$$

从另一方面,同一个级数(1)可以是不同函数的渐近展开式.例如,恒等于0的级数是恒等于0的函数的渐近展开式,同样也是函数 e^{-x} 在射线 $x>0$ 上(或者甚至在扇形 $|\arg z|<\frac{\pi}{2}-\alpha,\alpha>0$ 内)的渐近展开式;这可从对任意 n, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0$ 中看出.

容易证明,两个函数的和与积的渐近展开式,可由它们的渐近展开式对应项逐项相加与相乘而得:若

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n},\quad g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{z^n},$$

则

$$f(z)+g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n+d_n}{z^n},\quad f(z)g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_0d_n+c_1d_{n-1}+\cdots+c_nd_0}{z^n}. \tag{5}$$

同样,容易证明,渐近展开式的*逐项求积分*规则是合法的:假若 $f(z)\sim\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$

* 在这一公式和以后的公式中当 $z\to\infty$ 时极限过程,当然是沿着集合的点完成的,我们不再对这一点作专门说明.

(即,当在给定的集合 M 上 $z\to\infty$ 时,函数 $f(z)$ 是不低于二阶的无穷小),则

$$\int_z^\infty f(z)dz\sim\sum_{n=2}^\infty\frac{c_n}{(n-1)z^{n-1}}. \tag{6}$$

渐近展开式的逐项微分,一般地说,是不合法的. 实际上,容易看出,在射线 $x>0$ 上 $e^{-x}\sin e^x\sim 0$,然而 $(e^{-x}\sin e^x)'=-e^{-x}\sin e^x+\cos e^x$ 完全没有渐近展开式,因为在射线 $x>0$ 上,当 $x\to\infty$ 时甚至这函数的极限也不存在.

例 1 我们将求出函数

$$f(x)=\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t}dt$$

在射线 $x>0$ 上的渐近展开式. 反复施行分部积分法 $\left(令\frac{1}{t}=u, e^{x-t}dt=dv, 等等\right)$ 求得:

$$\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t}dt=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}+(-1)^n n!\int_x^\infty\frac{e^{x-t}dt}{t^{n+1}}.$$

对于余项(借助于分部积分法)我们得到估值

$$n!\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}dt=\frac{n!}{x^{n+1}}-(n+1)!\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}dt<\frac{n!}{x^{n+1}},$$

由此推得:在采用前面的记号后

$$x^n|f(x)-s_n(x)|\leqslant\frac{n!}{x},$$

当 $x\to\infty$ 时趋于 0,所以

$$\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t}dt\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+\cdots. \tag{7}$$

所讨论的积分与特殊函数——*积分指数函数**

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^x\frac{e^\tau}{\tau}d\tau \tag{8}$$

有关,事实上,在变量变换 $\tau=-t$ 以后,显然,有

$$\mathrm{Ei}(-x)=-\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt=-e^{-x}\int_x^\infty\frac{1}{t}e^{x-t}dt.$$

因此,由(7)我们有渐近等式

$$-\mathrm{Ei}(-x)\sim\frac{e^{-x}}{x}\left\{1-\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^2}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{x^n}+\cdots\right\}. \tag{9}$$

级数(7)和(9)是发散的,因为它们的一般项不趋于 0 (对任何固定的 x,当 $n\to\infty$ 时比值 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{n}{x}\to\infty$). 但它们仍然给出函数的近似值,甚至对于颇小的 x 与 n 也非常地精确,例如,对于积分(7)来说,$s_6(10)=0.091\ 52$ 给出具有精确到 0.000 12 的近似值.

例 2 我们考虑*误差概率函数*(参看第 70 目例 1)对于 x 的正值的渐近公式. 首先,考虑函数

$$f(x)=\int_x^\infty e^{x^2-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_x^\infty\frac{1}{t}d(e^{x^2-t^2})=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\int_x^\infty e^{x^2-t^2}\frac{dt}{t^2},$$

反复施行分部积分法,得:

---

* 当 $x>1$ 时,积分理解为主值.

$$f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot3}{2^3x^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4x^7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^nx^{2n-1}}$$
$$+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\int_x^\infty\frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}}dt.$$

对于余项(借助于分部积分法)我们得到估值

$$\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n}\int_x^\infty\frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}}dt<\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}x^{2n+1}},$$

由此推得:当 $x\to\infty$ 时,$x^{2n-1}|f(x)-s_{2n-1}(x)|\to0$. 因此

$$\int_x^\infty e^{x^2-t^2}dt\sim\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot3}{2^3x^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4x^7}+\cdots. \tag{10}$$

利用 $\int_0^\infty e^{x^2-t^2}dt=e^{x^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (参看第 67 目)得

$$\int_0^\infty e^{x^2-t^2}dt=e^{x^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_x^\infty e^{x^2-t^2}dt\sim e^{x^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2^2x^3}-\frac{1\cdot3}{2^3x^5}+\cdots,$$

因而最后有

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt\sim1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot3}{2^3x^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4x^7}+\cdots\right). \tag{11}$$

例 3 也可以对整数自变量 n 的函数构造渐近展开式. 在这情况下整数点的序列是集合 m. 作为例子我们考虑有关函数

$$f(z)=\sin z+\frac{1}{z}, \tag{12}$$

的零点通过接近于点 $z_n=\pi n$ 的渐近估计问题. 作为第一次近似我们取 $z_n\sim\pi n$. 把 $z=\pi n+\varepsilon_1(n)$ 代入方程 $f(z)=0$,我们得到$(-1)^n\sin\varepsilon_1(n)+\frac{1}{\pi n+\varepsilon_1(n)}=0$,由此,我们求出 $\varepsilon_1(n)\sim\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$,从而对 z_n 的第二次近似有形状

$$z_n=\pi n+\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

随后令 $z=\pi n+\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}+\varepsilon_2(n)$,并且由方程 $f(z)=0$ 我们得出

$$(-1)^n\sin\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}+\varepsilon_2(n)\right\}=-\frac{1}{\pi n+(-1)^{n-1}\frac{1}{\pi n}+\varepsilon_2(n)}.$$

用左和右两部分的近似表达式取代这两部分$\left(考虑到 \varepsilon_2(n)=o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,我们求得

$$(-1)^n\varepsilon_2(n)-\frac{1}{\pi n}-\frac{(-1)^n}{3!}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}\right]^3=-\frac{1}{\pi n}-(-1)^n\frac{1}{\pi^3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

由此 $\varepsilon_2(n)=-\frac{1}{\pi^3n^3}\left[1+\frac{(-1)^n}{6}\right]+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$,这给出了 z_n 的第三次近似

$$z_n\sim\pi n+\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}-\frac{1}{\pi^3n^3}\left[1+\frac{(-1)^n}{6}\right]+o\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{13}$$

这过程可以无限制继续下去,并且由于各近似值的误差是关于最后保留项的高阶无穷小,我们得到 z_n 的渐近展开式.

最后我们指出,按自变量的负整数幂的形状(1)的级数是最简单的,但是不总是渐近近似的最方便的手段. 拓广渐近展开式的概念,为了比较我们选取满足条件

$$\lim_{z\to\infty}\frac{q_{n+1}(z)}{q_n(z)}=0 \tag{14}$$

的任意函数序列 $q_n(z)$ 代替 $\frac{1}{z^n}$,而为了近似我们选取任何满足

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mu_{n+1}(z)}{q_n(z)}=0,\quad \overline{\lim_{z\to\infty}}\left|\frac{\mu_n(z)}{q_n(z)}\right|>0 \tag{15}$$

的序列 $\mu_n(z)$.

我们称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\mu_n(z)$ 为函数 $f(z)$ 的渐近展开式,

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mu_n(z), \tag{16}$$

如果

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{q_n(z)}\left\{f(z)-\sum_{k=0}^{n}c_k\mu_k(z)\right\}=0, n=0,1,2,\cdots. \tag{17}$$

作为这种更一般的展开式的例子,我们研究微分方程

$$y''+\left(1-\frac{a}{x^2}\right)y=0 \tag{18}$$

的解对于大的 x 的展开式.

为了获得解的表示式,我们把方程写成形状

$$y''+y=a\,\frac{y}{x^2},$$

并且认为右边部分是已知的,我们利用微分方程教程中柯西公式

$$y(x)=A\cos(x-\alpha)+a\int_{x_0}^{x}\sin(x-t)\frac{y(t)}{t^2}dt. \tag{19}$$

由此表示式看出,当 $x\to\infty$ 时 $y(x)$ 是有界的. 事实上,我们设 $M_1=\max\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y(x)|$,此时由(19)得到

$$M_1\leqslant|A|+|a|M_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{dt}{t^2}<|A|+|a|M_1\frac{1}{x_0},$$

由此 $M_1<\frac{|A|}{1-|a|/x_0}$ 和结论得证(数 x_0 可以认为是正的和任意大的). 由此可见,积分(19)在无穷远处收敛,因此在(19)中也可以取 $x_0=\infty$.

作为第一次近似我们取

$$y(x)=A\cos(x-a)+o(1);$$

令 $y(x)=A\cos(x-a)+\varepsilon_1(x)$ 并且把其代入(19),我们求得:

$$\varepsilon_1(x)=aA\int_{\infty}^{x}\sin(x-t)\cos(t-a)\frac{dt}{t^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{aA}{2}\int_{\infty}^{x}\{\sin(x-a)+\sin(x-2t+a)\}\frac{dt}{t^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{aA}{2x}\sin(x-a)+o\left(\frac{1}{x}\right)^{*}.$$

我们得到第二次近似：

$$y(x)=A\cos(x-a)-\frac{aA}{2x}\sin(x-a)+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

引入新的修正 $\varepsilon_2(x)$，我们由(19)求出

$$\varepsilon_2(x)=\frac{aA}{2}\int_{\infty}^{x}\sin(x-2t+a)\frac{dt}{t^2}-\frac{a^2A}{2}\int_{\infty}^{x}\sin(x-t)\sin(t-a)\frac{dt}{t^3}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{aA}{4x^2}\cos(x-a)-\frac{a^2A}{8x^2}\cos(x-a)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(我们用分部积分法变换第一个积分，第二个积分用三角公式，余下的积分进入量 $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 中). 由此可见，我们获得第三次近似：

$$y(x)=A\cos(x-a)-\frac{aA}{2x}\sin(x-a)+\frac{aA}{4x^2}\left(1-\frac{a}{2}\right)\cos(x-a)+o\left(\frac{1}{x^2}\right).\quad(20)$$

近似可以无限地精确，所得展开式是拓广意义上渐近的，并且这里

$$\mu_n(x)=\frac{\cos\left(x-a+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^n},\quad q_n(x)=\frac{1}{x^n}.$$

77. 越过法　这方法用于在正参数 λ 较大值下估计形如

$$F(\lambda)=\int_C\varphi(z)e^{\lambda f(z)}dz \tag{1}$$

的周线积分，其中 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 沿积分曲线 C 是解析函数，许多特殊函数、常微分方程和偏微分方程的解是形如(1)的积分，这样的积分会在解各种不同物理问题时遇到. 这一点说明了越过法在复变函数论的应用中占据重要地位.

我们从叙述特殊情况开始，这种情况要溯源到拉普拉斯，并且与形如

$$F(\lambda)=\int_0^b\varphi(t)e^{\lambda f(t)}dt \tag{2}$$

的实积分有关.

拉普拉斯方法的思想十分简单. 假定 $f(t)$ 在区间 (a,b) 上有一个突出表现的极大值. 参数 λ 的值愈大，这个极大值表现愈突出，因此也清楚，在较大 λ 下极大点的邻域给出积分值中主要贡献.

在证明作为方法基础的引理时，我们利用这个思想.

引理　*设给定积分*

$$F(\lambda)=\int_0^a\varphi(t)e^{-\lambda t^\alpha}dt\quad(0<a\leqslant\infty,\alpha>0) \tag{3}$$

* $\int_{\infty}^{x}\sin(x-2t+a)\frac{dt}{t^2}=o\left(\frac{1}{x}\right)$，这可以用分部积分法确认.

其中函数 $\varphi(t)$ 在 $|t|<2h$ 时表示成收敛级数

$$\varphi(t)=t^{\beta}(c_0+c_1t+\cdots+c_nt^n+\cdots),\quad \beta>-1, \tag{4}$$

并且对于某个 λ_0，$\int_0^a|\varphi(t)|e^{-\lambda_0t^\alpha}dt\leqslant M$，此时渐近展开式

$$F(\lambda)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta+n+1}{\alpha}\right)\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}} \tag{5}$$

成立，其中 Γ 为欧拉 Γ 函数.

为了证明我们注意到，当 $\lambda>\lambda_0$ 时

$$\left|\int_h^a\varphi(t)e^{-\lambda t^\alpha}dt\right|\leqslant e^{-(\lambda-\lambda_0)h^\alpha}\int_h^a|\varphi(t)|e^{-\lambda_0t^\alpha}dt$$

$$=O(e^{-(\lambda-\lambda_0)h^\alpha})=O(e^{-\lambda h^\alpha}),$$

因此 $F(\lambda)=\int_0^h\varphi(t)e^{-\lambda t^\alpha}dt+O(e^{-\lambda h^\alpha})$. 因为量 $O(e^{-\lambda h^\alpha})$ 当 $\lambda\to\infty$ 时，比任何幂次 λ^{-n} $(n>0)$ 小得多，所以根据拉普拉斯思想，影响渐近展开式的只是毗邻极大值点的积分区间的一部分 $(0,h)$. 在积分的分出部分里作代换 $\lambda t^\alpha=\tau$，然后利用，在 $|t|\leqslant h$ 时我们有 $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kt^{\beta+k}+O(t^{\beta+n})$ 以及对于任何 $p\geqslant0$ 和 $c>0$

$$\int_0^c\tau^{p-1}e^{-\tau}d\tau\leqslant\int_0^\infty\tau^{p-1}e^{-\tau}d\tau=\Gamma(p),$$

我们求得

$$\int_0^h\varphi(t)e^{-\lambda t^\alpha}dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\lambda h^\alpha}\varphi\left[\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\tau^{\frac{1}{\alpha}-1}\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}e^{-\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{\lambda^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}}}\int_0^{\lambda h^\alpha}\tau^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}-1}e^{-\tau}d\tau+O(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}). \tag{6}$$

最后我们注意到

$$\int_0^{\lambda h^\alpha}\tau^{p-1}e^{-\tau}d\tau=\Gamma(p)+O(e^{-\frac{\lambda}{2}h^\alpha})$$

因为对于任何 $c>0$，令 $\tau=\sigma+c$，我们有

$$\int_c^\infty\tau^{p-1}e^{-\tau}d\tau=e^{-c}\int_0^\infty(\sigma+c)^{p-1}e^{-\sigma}d\sigma$$

$$<e^{-c}\left\{\int_0^c(2c)^{p-1}e^{-\sigma}d\sigma+\int_0^\infty(2\sigma)^{p-1}e^{-\sigma}d\sigma\right\}$$

$$=e^{-c}(AC^p+B)=O(e^{-\frac{c}{2}}).$$

因此，考虑到对于任意固定的 $\varepsilon>0$ 和 $n>0$，$O(e^{-\lambda\varepsilon})=O(\lambda^{-n})$，可以把(6)写成形状

$$\int_0^h\varphi(t)e^{-\lambda t^\alpha}dt=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k\Gamma\left(\dfrac{\beta+k+1}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}}}+O(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}),$$

而按照第 76 目中的定义也就证明了渐近展开式(5)的正确性.

积分(2)的估计归结为已证明了的引理.下列定理成立.

定理 1 假设对于某一个 $\lambda=\lambda_0$ 积分(2)绝对收敛,亦即

$$\int_a^b |\varphi(t)| e^{\lambda_0 f(t)} dt \leqslant M, \tag{7}$$

且 $f(t)$ 在区间 (a,b) 的内点 t_0 达到自己的最大值,在它的邻域 $|t-t_0|<\delta$ 内 $f(t)$ 表示成级数

$$f(t)=f(t_0)+a_2(t-t_0)^2+\cdots+a_n(t-t_0)^n+\cdots, a_2<0, \tag{8}$$

并且存在 $h>0$ 这样,在此邻域的外面 $f(t_0)-f(t)>h$.还假设函数 $t=\psi(\tau)$ 在点 $\tau=0$ 的邻域内由方程 $f(t_0)-f(t)=\tau^2$ 确定,并且在这邻域内

$$\varphi[\psi(\tau)]\psi'(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\tau^n. \tag{9}$$

于是积分(2)有渐近展开式

$$F(\lambda)=\int_a^b \varphi(t)e^{\lambda f(t)}dt \sim e^{\lambda f(t_0)}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{2n}}{\lambda^n}\frac{(2n)!}{4^n n!}. \tag{10}$$

首先我们指出,如在引理中一样,$F(\lambda)$ 的渐近展开式由极大值点 t_0 的邻域决定.事实上,按照定理的条件

$$\left|\int_a^{t_0-\delta}\varphi(t)e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}dt\right| = \left|\int_a^{t_0-\delta}\varphi(t)e^{-\lambda_0[f(t_0)-f(t)]}e^{-(\lambda-\lambda_0)[f(t_0)-f(t)]}dt\right|$$

$$\leqslant e^{-\lambda_0 f(t_0)}e^{-(\lambda-\lambda_0)h}\int_a^b |\varphi(t)| e^{\lambda_0 f(t)}dt = O(e^{-\lambda h}),$$

并且类似地估计沿区间 $(t_0+\delta, b)$ 的积分.

在余下的邻域 $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ 内我们令 $f(t_0)-f(t)=\tau^2$,并且根据(8)我们找出 $\tau^2=-a_2(t-t_0)^2-a_3(t-t_0)^3-\cdots$,由此 $\tau=(t-t_0)\sqrt{-a_2-a_3(t-t_0)-,\cdots}$,按泰勒公式展开根式,我们得到级数 $\tau=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(t-t_0)^n$.在点 $\tau=0$ 的邻域内这级数可以反演(见第 70 目),我们就得到

$$t=\psi(\tau)=t_0+\sum_{n=1}^{\infty} c'_n\tau^{n*}.$$

利用已经讲到的,在积分中作代换 $f(t_0)-f(t)=\tau^2$,

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\varphi(t)e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}dt=\int_{-\delta'}^{\delta''}\varphi[\psi(\tau)]\psi'(\tau)e^{-\lambda\tau^2}d\tau,$$

---

* 我们注意,$c'_1=\frac{1}{\sqrt{-a_2}}=\sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}}$,因此在展开式(9)中自由项 $c_0=\varphi(t_0)c'_1=\varphi(t_0)\sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}}$.

然后我们注意,在采取的精度下可以认为 $\delta'=\delta''=\delta_1{}^*$,为书写简单起见,表示 $\varphi[\psi(\tau)]\psi'(\tau)=\varphi_1(\tau)$,我们得到

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\varphi_1(\tau)e^{-\lambda\tau^2}d\tau=\int_{-\delta_1}^{0}\varphi_1(\tau)e^{-\lambda\tau^2}d\tau+\int_{0}^{\delta_1}\varphi_1(\tau)e^{-\lambda\tau^2}d\tau$$

$$=\int_{0}^{\delta_1}[\varphi_1(-\tau)+\varphi_1(\tau)]e^{-\lambda\tau^2}d\tau$$

(在第一个积分里用 $-\tau$ 代 τ).

现在可以应用引理,对所讨论的情况引理中 $\beta=0$ 和 $\alpha=2$. 因为根据(9)我们有

$$\varphi_1(-\tau)+\varphi_1(\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}\tau^{2n},$$

所以引理给出

$$\int_a^b\varphi(t)e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}dt\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda^{-n-\frac{1}{2}}.$$

余下是利用 $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ (我们将在第七章中证明这个公式),于是我们就得到所要求的展开式(10).

定理 1 涉及的情况是,$f(t)$的最大值在区间(a,b)的内点上达到. 类似地证明与最大值在端点的情形有关的如下定理.

定理 2 设条件(7)满足并且 $f(t)$在点 $t=a$ 达到最大值,在这点上解析,$f'(a)\neq0$,并且存在 $h>0$ 这样,在点 a 的某一邻域外面$f(a)-f(t)>h$. 再假设函数 $t=\psi(\tau)$在点 $\tau=0$ 的邻域内由方程 $f(a)-f(t)=\tau$ 决定,并且在此邻域内展开式(9)成立. 那么

$$F(\lambda)=\int_a^b\varphi(t)e^{\lambda f(t)}dt\sim\frac{e^{\lambda f(a)}}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,c_n}{\lambda^n}. \tag{11}$$

作为应用拉普拉斯方法的例子,我们考虑欧拉的 Γ 函数

$$\Gamma(\lambda+1)=\int_0^{\infty}x^{\lambda}e^{-x}dx$$

的渐近公式的推导. 令 $x=\lambda t$,我们获得

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}\int_0^{\infty}t^{\lambda}e^{-\lambda t}dt=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int_0^{\infty}e^{-\lambda(t-1-\ln t)}dt. \tag{12}$$

把定理 1 应用于最后公式中的积分,在定理 1 中 $\varphi(t)\equiv1$,并且 $f(t)=-(t-1-\ln t)$在点 $t=1$ 处达到最大值**. 我们限于展开式的第一项. 按照 382 页脚注 * 中的公式求出 $c_0=\varphi(t_0)\sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}}=\sqrt{2}$,公式(10)就给出.

---

* 误差包含在项 $O(e^{-\lambda h})$中.

** 在任何 $\lambda_0>0$ 下定理的条件(7)都满足,因为积分 $\int_0^{\infty}e^{-\lambda_0(t-1-\ln t)}dt=\int_0^{\infty}t^{\lambda_0}e^{-\lambda_0(t-1)}dt$ 收敛.

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda(t-1-\ln t)}dt=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left\{\sqrt{2}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}.$$

把这代入(12),我们求得所要找的估计(斯特林(Stirling)公式):

$$\Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left\{1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}. \tag{13}$$

愿意的话也可以得到渐近展开式的下面几项:

$$\Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left\{1+\frac{1}{12\lambda}+\frac{1}{288\lambda^2}-\frac{139}{51\,840\lambda^3}+\cdots\right\}. \tag{14}$$

现在我转向越过法本身的叙述.这方法的实质在于,在较大的参数 λ 的值下积分

$$F(\lambda)=\int_C \varphi(z)e^{\lambda f(z)}dz \tag{1}$$

的值基本上由积分路线 C 的那一段决定,在这一段上 $|e^{\lambda f(z)}|=e^{\lambda \mathrm{Re}\, f(z)}$,亦即 $\mathrm{Re}\, f(z)$ 在这一段与 C 的其他部分上的值相比很大.同时这一段愈小和量 $\mathrm{Re}\, f(z)$ 落下愈陡峭,积分估计就愈容易,按照上面所说,在应用越过法时,努力把积分路径 C 形变成更方便的路径 $\tilde{C}$,根据柯西定理,利用这样的形变不改变积分的值的结论.

为了几何上说清问题,我们设 $z=x+iy$,并且把

$$u=\mathrm{Re}\, f(z) \tag{15}$$

表示为空间 (x,y,u) 中曲面 S.因为函数 u 是调和的,所以 S 不可能有极大值点和极小值点,而使 $f'(z)=0$ 的点将是它的**越过点**(**鞍点**见图 172).

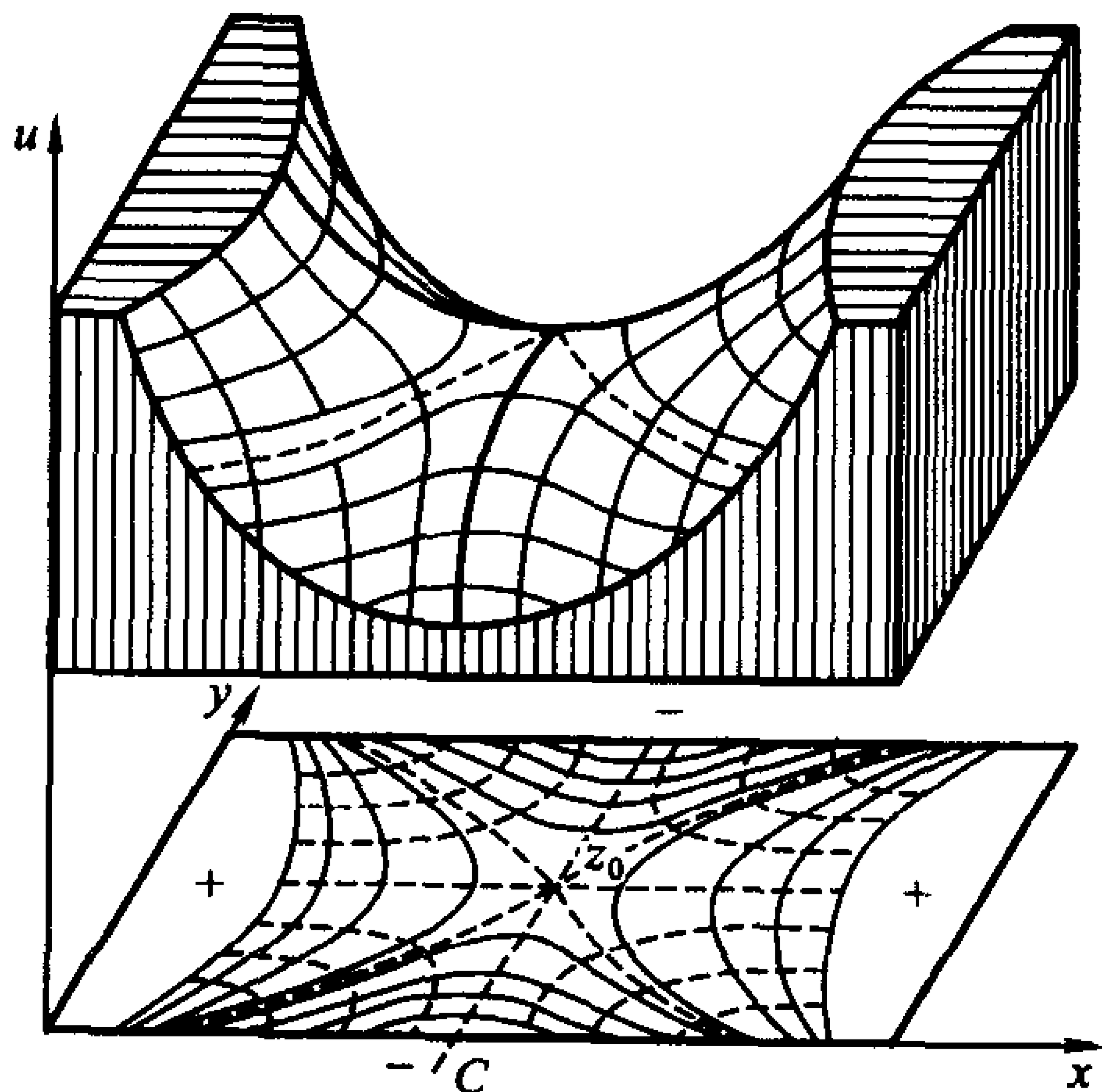


图 172

正如已经说过的,对估计最方便的积分路径 $\tilde{C}$ 至少应在有积分估计的最大值的地区内,在每一点应当以 $\mathrm{Re}\, f(z)$ 的最快变化的方向通过,而因为函数 $f(z)$ 是解析

的,所以这方向应当与曲线 $\operatorname{Im} f(z)=\text{const}$ 的方向重合.由此可见,路径 $\widetilde{C}$ 至少在对估计积分最实质性的地区内,应当与等值线 $\operatorname{Im} f(z)=\text{const}$ 重合.

进一步,路径 $\widetilde{C}$ 应当包含点 z_0,在这一点上 $\operatorname{Re} f(z)$ 达到这函数在 $\widetilde{C}$ 上的值中最大的.我们证明 $f'(z_0)=0$.换句话说,曲线 $\operatorname{Im} f(z)=\text{const}$ 的点,在这点上 $\operatorname{Re} f(z)$ 达到最大值,是越过点.

事实上,在点 z_0 上 $\operatorname{Re} f(z)$ 沿曲线 $\widetilde{C}$ 的导数应当是等于 0,$\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Re} f(z)=0$,而因为在 $\widetilde{C}$ 上 $\operatorname{Im} f(z)=\text{const}$,所以$\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Im} f(z)\equiv 0$,因此

$$f'(z_0)=\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Re} f(z)+i\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Im} f(z)=0.$$

这样,在把越过法应用于积分(1)时积分路径 C 应当形变为经过越过点 z_0 的路径 $\widetilde{C}$,并且在此点的邻域内沿着最大坡度的曲线 $\operatorname{Im} f(z)=\text{const}$ 行进*(图 172).

注 1 上面所述的要求不太大的精确性.从调和函数的性质(第 41 目定理 8)推知:越过点 z_0 的邻域被 $\operatorname{Re} f(z)$ 的等值线分解成 $2n$ 个扇形($n\geqslant 2$, $n-1$ 是 $f'(z_0)$ 的零点的重数),在这些扇形的上方曲面 S 交替地高于或低于在点(x_0,y_0,u_0)处自己的切平面.等值线 $\operatorname{Im} f(z)=\text{const}$ 在点 z_0 的邻域内被分解为 n 条曲线,它们各自沿着上面所提到的扇形的平分线的方向通过点 z_0.我们就选取这些曲线中的一条作为 $\widetilde{C}$.

注 2 如果曲面 S 有 n 个越过点,那么作为 $\widetilde{C}$ 通常应当选择经过最陡峭的越过点的路径.其实,在一般形式下解决有关越过点的选择问题远不是简单的,并且必须在每一个具体问题中单独讨论它.

我们指出保证应用越过法有效性的一个重要情况:因为沿曲线 $\widetilde{C}$ 我们有 $\arg e^{f(z)}=\operatorname{Im} f(z)=\text{const}$,所以积分(1)的估计化为对一个实函数的积分的估计,这个实函数可以按照拉普拉斯方法引入.

这个注使我们能够利用包含在定理 1 和定理 2 中的结果,这些结果在叙述拉普拉斯方法时被证明过.正如已经讲到过一样,函数 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 被假设在某一个区域内是解析函数.首先我们考虑这样的情况,就是积分路径 C 可以形变为经过越过点 z_0 的路径 $\widetilde{C}$,其中 $f'(z_0)=0$, $f''(z_0)\neq 0$,并且在 z_0 的邻域内与最大坡度的曲线 $\operatorname{Im} f(z)=\text{const}$ 重合,并且在 $\widetilde{C}$ 上这邻域的外面 $\operatorname{Re} f(z)<\operatorname{Re} f(z_0)-h\ (h>0)$.此外,我们还假设,积分(1)对充分大的 λ 值绝对收敛.

在这种情况可以根据定理 1 来进行积分的估计.事实上,设 $z=z(t)$ 是周线 $\widetilde{C}$ 的方程,显然,我们有

$$F(\lambda)=\int_{\widetilde{C}}\varphi(z)e^{\lambda f(z)}dz=e^{\lambda i\operatorname{Im} f[z(t)]}\int_a^b\varphi[z(t)]e^{\lambda\operatorname{Re} f[z(t)]}z'(t)dt, \tag{16}$$

---

* 人们把越过法也称做最大坡度法或鞍点法.

而且问题化为估计形状(2)的积分，而这种积分的展开式由公式(10)给出.

写出这展开式的第一项. 为此我们表示 $\varphi[z(t)]z'(t)=\tilde{\varphi}(t)$, $\operatorname{Re} f[z(t)]=\tilde{f}(t)$，于是根据公式(10)我们得到所要求的项

$$\int_a^b \tilde{\varphi}(t)e^{\lambda\tilde{f}(t)}dt \sim e^{\lambda\tilde{f}(t_0)}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\tilde{c}_0, \tag{17}$$

其中 $\tilde{c}_0$ 为函数 $\tilde{\varphi}[\tilde{\psi}(\tau)]\tilde{\psi}'(\tau)$ 的展开式中的自由项，它可按照 381 页的脚注 * 中的公式求出. 我们有：$\tilde{\varphi}(t_0)=\varphi(z_0)z'(t_0)$，并且，由于沿着 $\tilde{C}$，

$$f[z(t)]=\operatorname{Re} f[z(t)]+i\operatorname{Im} f[z(t)]=\tilde{f}(t)+\text{const},$$

所以

$$\tilde{f}''(t_0)=\frac{d^2}{dt^2}f[z(t)]\Big|_{t=t_0}=f''(z_0)z'^2(t_0)$$

(在 $t=t_0$ 时项 $f'[z(t)]z''(t)=0$). 由于这一个值是负的，所以令 $z'(t_0)=ke^{i\theta}$，可以把它写成形状 $\tilde{f}''(t_0)=-|f''(z_0)|k^2$. 由此可见，

$$\tilde{c}_0=\tilde{\varphi}(t_0)\sqrt{-\frac{1}{\tilde{f}''(t_0)}}=\varphi(z_0)e^{i\theta}\sqrt{\frac{2}{|f''(z_0)|}},$$

并且把所求出的值代入(17)，然后代入(16)，我们就得到要求的公式

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda f(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0)|}}\varphi(z_0)e^{i\theta}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{18}$$

如果在周线 $\tilde{C}$ 上有几个越过点，在这些点上 $\operatorname{Re} f(z)$ 的值都接近于最大值，那么应当取所有这些点上的表达式(18)的和.

积分周线在越过点 z_0 处结束的情形，可用完全类似的方式导向定理 2.

作为应用越过法的例子，我们求整阶数 n 的第一类圆柱函数的渐近公式

$$J_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} e^{\frac{\lambda}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z^{n+1}} \tag{19}$$

(见第 70 目公式(14)). 这里 $\varphi(z)=\frac{1}{z^{n+1}}$, $f(z)=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $f'(z)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)$，因此存在同一等值线 $\operatorname{Re} f(z)=0$ 的两个越过点 $z_{1,2}=\pm i$，并且按照上面所作的注，需要考虑两个这样的点. 我们有 $\varphi(\pm i)=\mp ie^{\mp in\pi/2}$, $f(\pm i)=\pm i$, $|f''(\pm i)|=1$. 经过越过点的等值线 $u=\operatorname{Re} f(z)=\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0$ 由圆周 $|z|=1$ 和直线 $x=0$ 组成，最大坡度的曲线的方向应当是关于这条曲线的平分线. 还要考虑到 u 的符号的分布，它指明在图 173 中，我们找到 $\theta_1=\frac{3\pi}{4}$, $\theta_2=\frac{\pi}{4}$. 由此可见，按照公式(18)我们得到所要求的渐近估计.

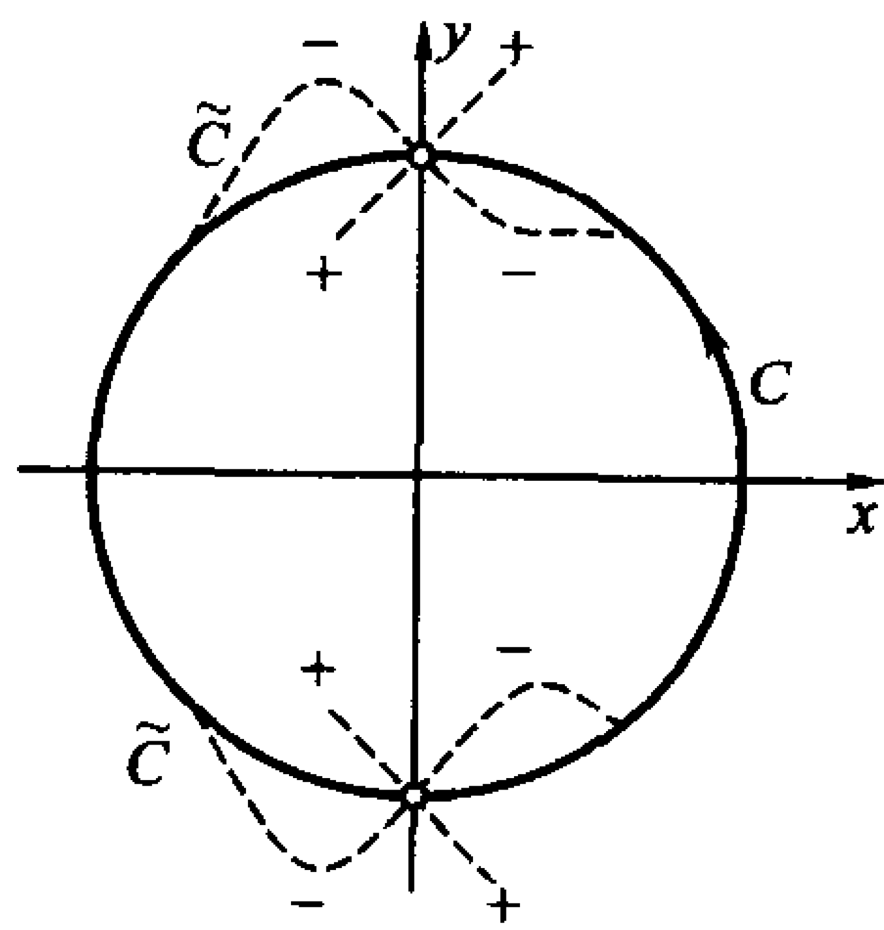


图 173

$$J_n(\lambda)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\left\{-e^{\left(\lambda-n\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)i}+e^{-\left(\lambda-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i}\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos\left(\lambda-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\quad(20)$$

进一步应用越过法的例子将在第七章中引入.

78.母函数法 这方法的思想是,为了获得某一个函数的渐近估计,把这个函数换成另一个(**母函数**)按照某一个辅助变量是解析的函数.

方法的最简单的版本属于达布(Darboux)(1878),并且这个版本能够求出对 n 的值很大时函数 $f_n(z)$ 的渐近表达式,这些函数 $f_n(z)$ 是通过母函数 $F(z,w)$ 由公式

$$F(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)w^n \quad (1)$$

定出的(参见第70目中的例2、3、4,同样也可见第七章第93目).

设把 $F(z,w)$ 视为 w 的函数时、其在级数(1)的收敛圆的圆周上的奇点是已知的,为简单起见我们取这圆周为 $|w|=1$.假设还知道了这样的函数

$$F_k(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{nk}(z)w^n, \quad (2)$$

使得当接近于圆周 $|w|=1$ 时,差 $F(z,w)-F_k(z,w)$ 收敛于 $t=\arg w$ 的一个 p 次可微的函数.于是,在展开式

$$F(z,w)-F_k(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}(f_n-f_{nk})e^{int}$$

中的系数 f_n-f_{nk} 是 p 次连续可微的函数的傅里叶系数,所以按傅里叶系数的已知性质* 有:

$$\lim_{n\to\infty}n^{p-1}\{f_n(z)-f_{nk}(z)\}=0. \quad (3)$$

因此,函数 $f_{nk}(z)$ 给出了对于大的 n 值的 $f_n(z)$ 的近似式,当指数 p 愈大时近似得愈好.

作为达布方法的应用的例子,我们来求出对于很大阶数 n 的勒让德多项式 $P_n(z)$ 的渐近表达式.对于这种多项式来说,

$$F(z,w)=\frac{1}{\sqrt{1-2zw+w^2}} \quad (4)$$

(参看第70目例2).为简单起见,假设 z 是实数且 $-1<z<1$,令 $z=\cos t,0<t<\pi$,于是 $1-2zw+w^2=(w-e^{it})(w-e^{-it})$,因此函数(4)的泰勒级数的收敛圆是圆 $|w|<1$,而点 $w=e^{\pm it}$ 是奇点.

取双值函数(4)的由条件

$$\sqrt{w-e^{\pm it}}=e^{\pm i\frac{t+\pi}{2}}\sqrt{1-we^{\mp it}} \quad (5)$$

分出的那一个分支,其中在右端的根式表示当 $w=0$ 时等于1的那分支(即可用二项式级数表示的

* 参看菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第3卷.

那分支)*.我们来得出这分支按 $w-e^{\pm it}$ 的幂次的展开式,有

$$F(z,w)=\frac{1}{\sqrt{w-e^{it}}}\{w-e^{it}+(e^{it}-e^{-it})\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{w-e^{it}}}\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{2\sin t}}\left\{1+\frac{w-e^{it}}{e^{it}-e^{-it}}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{2\sin t}}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(w-e^{it})^{n-\frac{1}{2}}}{(e^{it}-e^{-it})^n}, \tag{6}$$

其中 $c_n=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n}$ 是二项展开式的系数.类似地,有

$$F(z,w)=\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{2\sin t}}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(w-e^{-it})^{n-\frac{1}{2}}}{(e^{-it}-e^{it})^n}. \tag{7}$$

设

$$F_k(z,w)=\frac{1}{\sqrt{2\sin t}}\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu\left\{e^{\frac{3}{4}\pi i}\frac{(w-e^{it})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{it}-e^{-it})^\nu}+e^{-\frac{3}{4}\pi i}\frac{(w-e^{-it})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{-it}-e^{it})^\nu}\right\}, \tag{8}$$

于是,差 $F(z,w)-F_k(z,w)$ 在圆周 $|w|=1$ 上将是个 k 次连续可微的函数.事实上,这对于点 $w\neq e^{\pm it}$ 来说是很明显的,而对于 $w=e^{\pm it}$,例如,对于 $w=e^{it}$ 来说,这可从差的按照 $(w-e^{it})$ 的幂次的展开式是由 $(w-e^{it})^{k+\frac{1}{2}}$ 开始的(这从展开式(6)与(7)便可看出)而推出.

为了要找出展开(8)为 w 的幂级数时的系数,我们用公式(5)来替代 $(w-e^{\pm it})^{\nu-\frac{1}{2}}$.于是级数(8)的一般项可写成形式

$$c_\nu\left\{e^{\frac{3}{4}\pi i-\frac{t+\pi}{2}i+\nu(t+\pi)i}\frac{(1-we^{-it})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{it}-e^{-it})^\nu}+e^{-\frac{3}{4}\pi i+\frac{t+\pi}{2}i-\nu(t+\pi)i}\frac{(1-we^{it})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{-it}-e^{it})^\nu}\right\},$$

按二项式公式展开 $(1-we^{\pm it})^{\nu-\frac{1}{2}}$ 为级数

$$(1-we^{\pm it})^{\nu-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_{\nu n}e^{\pm int}w^n,$$

经过初等变换后,得出展开式(8)中 w^n 项的系数为

$$f_{nk}(z)=\sqrt{\frac{2}{\sin t}}\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu c_{\nu n}\frac{(-1)^\nu}{(2\sin t)^\nu}\cos\left\{\frac{\pi}{4}(1+2\nu)+\left(\nu-n-\frac{1}{2}\right)t\right\}, \tag{9}$$

这便给出了对于大的 n 值的 $P_n(z)$ 的渐近表达式.限制于第一项,得出所求的渐近表达式

$$P_n(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\sin t}}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\cos\left\{\frac{\pi}{4}-\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}. \tag{10}$$

按照公式(1)构造母函数的方法远非唯一的.对于不是整数的而是连续地变化的变量的函数常常应用,譬如,积分变换方法,这个方法是用函数 $F(p)$(母函数)取代函数 $f(t)$,$F(p)$ 由公式

$$F(p)=\int_C K(t,p)f(t)dt \tag{11}$$

决定,其中 $K(t,p)$ 为给定的函数(积分变换的核).最经常的是应用具有核 $K(t,p)=e^{-pt}$ (拉普拉斯变换)、$K(t,p)=t^{p-1}$ (梅林(Mellin)变换)的变换等等.下一章将专门讲其中第一个(特别请看第 88 目).

* 从所取的条件推知:当 $w=0$ 时表达式(4)的分母等于 1.

在这一章中将证明,在拉普拉斯变换情形函数 $f(t)$ 通过自己的母函数 $F(p)$ 由公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}F(p)e^{pt}dp, \tag{11'}$$

决定,其中 $F(p)$ 是复变数 $p=s+i\sigma$ 的函数,在右半平面 $\operatorname{Re} p\geqslant\lambda\geqslant0$ 上是解析的,积分沿着铅直线 $\Pi:\operatorname{Re} p=\lambda$ 来取,t 是个正的参数.在这一章的最后,我们将指出对这些积分寻求渐近表达式的方法.

用 L 来表示由沿负 s 轴的割痕的两岸与围绕点 $p=0$ 的一个小圆周所组成的那条曲线.用 Π_R 与 L_R 表示曲线 Π 与 L 的这样的部分:对于它们分别有 $|p|<R$ 与 $\operatorname{Re} p>-R$,且用 C_R 表示圆弧:$|p|=R,\operatorname{Re} p<\lambda$ (图 174).此外,我们假定:

1) 函数 $F(p)$ 在负半轴有割痕的平面 p 上,可以分出一支单值的分支;

2) 分出的这分支仅具有有限多个奇点,且在圆弧 C_R 上当 $R\to\infty$ 时关于 $\arg p$ 一致地收敛于 0;

3) $F(p)e^{pt}$ 沿 L 的积分当 $t\to\infty$ 时趋于 0.

在这些条件之下,对于大的 t 有

$$f(t)\approx\sum\operatorname{res}\{F(p_k)e^{p_kt}\}, \tag{12}$$

其中的和式是对于 $F(p)$ 的所有具有非负的实数部分的奇点来求和的.

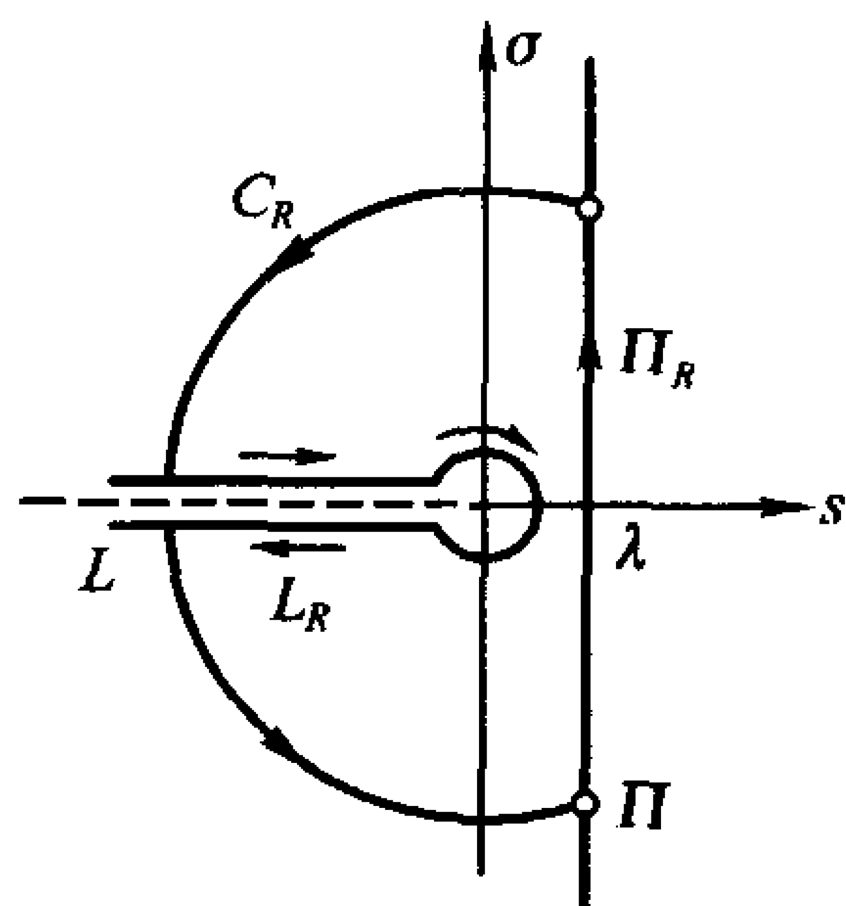


图 174

实际上,根据留数定理有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_R+C_R+L_R}F(p)e^{pt}dp=S(t), \tag{13}$$

其中 $S(t)$ 是函数 $F(p)e^{pt}$ 的全部留数的和(我们可取 R 适当大使图 174 中的周线包含所有的奇点).按照第 73 目中的若尔当引理,从条件 2)得出:当 $R\to\infty$ 时,沿 C_R 的积分趋于 0 (参看在这引理的证明后的注).因此,等式(13)取极限时具有形式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi}F(p)e^{pt}dp=S(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L}F(p)e^{pt}dp. \tag{14}$$

但当 t 很大时,和式 $S(t)$ 中属于 $F(p)$ 的具有负实数部分的奇点的各项,由于因子 $|e^{pt}|$ 很小,所以都非常小;而按照条件,沿 L 的积分也很小,因此便得出(12).

作为例子,我们来求下列积分的渐近表达式

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{pe^{pt-\frac{x}{v}\sqrt{p^2+2ap}}}{(p-i\omega)\sqrt{p^2+2ap}}dp, \tag{15}$$

其中 a,ν,ω 都是正的常数(这积分在连接没有漏损的长的线路于电动势 $e^{i\omega t}$ 上的问题中遇到,它的渐近表达式给出在这线路内的稳定状态——参看下一章的第 87 目).在此,如若把平方根 $\sqrt{p^2+2ap}$ 理解为在沿 s 的负半轴有割痕的平面上是单值的那一分支,它对于正的 p 值是取正值的,则条件 1)与 2)当 $x>0$ 时成立.为了证明它满足条件 3),令 $pt=q$,因此周线 L 变为同一形状

的周线 L^*，因而我们将有：

$$\int_L = \int_{L^*} \frac{q e^{q - \frac{x}{\nu t}\sqrt{q^2 + 2aqt}}}{(q - i\omega t)\sqrt{q^2 + 2aqt}} dq,$$

由这式子直接看出：这积分当 $t \to \infty$ 时趋于 0.

因此，所说的方法可以应用，因而被积函数在极点 $p = i\omega$ 处的留数给出了积分(15)的渐近表达式

$$f(x, t) = \frac{i\omega}{\sqrt{2ai\omega - \omega^2}} e^{i\omega t - \frac{x}{\nu}\sqrt{2ai\omega - \omega^2}}. \tag{16}$$

第六章　算子法及其应用

在 18 世纪中,许多数学家(其中在俄国有,例如,瓦谢科 - 扎哈尔钦科与列脱尼可夫*)从事于所谓符号演算的研究.在这种演算的基础上,把数学分析构建成在符号 $p=\frac{d}{dt}$ (t 是自变量)上进行的形式运算系统.例如,函数 $x=x(t)$的 n 阶导数可表示为用符号 $p^n=\frac{d^n}{dt^n}$作用在 x 上的结果;具有常系数的线性微分方程 $L[x]=a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx$ 的左端,可视为符号 $L(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n$作用于 x 的结果;积分运算 $\int_0^t x(t)dt$ 可视为符号$\frac{1}{p}$的应用,因此有$\frac{1}{p}\cdot 1=\int_0^t dt=t,\frac{1}{p^2}\cdot 1=\frac{t^2}{2},\cdots,\frac{1}{p^n}\cdot 1=\frac{t^n}{n!}$等等.

对于解决有关线性微分方程的各种问题,符号演算显得十分便利.英国电机工程师赫维赛德(Heaviside)把符号演算有成效地应用于电工学中的计算,在 19 世纪大大地促进了它的普及.

为了说明赫维赛德的方法,我们举简单的微分方程

$$x'-x=1$$

在始值条件 $x(0)=0$ 下的解为例.把求微分换成用 p 来乘,则微分方程换成方程

---

* 参看 Ващеико - Захарченко《Символическое исчнсление и приложение его к интегрированию линейных дифферендиалъных уравнений》(基辅, 1862). А. В. Летников Теория днфференцировалия с произволным указателем(莫斯科,1868).

$px - x = 1$，由此 $x = \frac{1}{p-1}$，因而在形式的变换之后，

$$x = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^n} + \cdots\right).$$

注意到前面关于符号 $\frac{1}{p}$ 与 $\frac{1}{p^n}$ 所讲过的，最后得

$$x = \int_0^t \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots\right) dt = \int_0^t e^t dt = e^t - 1.$$

关于所得的解的正确性，可经直接核验而证实.

可是赫维赛德毫不关心到他所采用的方法的根据，于是在许多情况下，达到错误的结果. 符号法，或如同现在称呼它的，算子法的基础，只在这 19 世纪的 20 年代才由布朗维奇与卡松给出，他们把这种方法同复变函数论中众所周知的积分变换的方法联系起来，这种积分变换已被柯西、拉普拉斯和别的数学家成功地利用过. 这时，符号(算子) p 得到了新的解释，如同复变量 $p = s + i\sigma$ 一样，同时算子法本身也得到新的解释*.

例如，假设我们要从某一个在微分或积分符号下包含实变数 t 的函数 $x(t)$ 的方程中，找出这个函数 $x(t)$ 来. 解决这问题的算子法可归结成下列几个步骤：1) 从想找的函数 $x(t)$ 变到复变量 p 的函数 $X(p)$——$x(t)$ 的"像"；2) 对像 $X(p)$ 施行与那些对 $x(t)$ 上施行的已知运算相对应的运算，——得到关于 $X(p)$ 的"算子方程". 这时，对像上的运算比原来的运算简单得多. 例如，求微分对应于乘以变量 p，求积分对应于除以 p 等等；3) 对于 $X(p)$ 来解出所得到的算子方程，这通常化为简单的代数运算；4) 从所求得的像 $X(p)$ 变换到像原函数 $x(t)$，这便是所求的函数.

算子法的应用可以同对数运算相比拟，在对数运算中：1) 从数变至对数；2) 在对数上施行与那些在数上进行的运算相对应的运算：数的相乘对应于对数的相加，等等；3) 从所求得的对数重新回归到数.

在这一章中，我们将说明算子法的基本原理，并且说明它在分析与数学物理中的各种问题上的应用.

§1 基本概念与方法

79. 拉普拉斯变换** 我们把满足下列条件的实变量 t 的任一复函数 $f(t)$，称为**像原函数**：

---

* 在最近，借助于泛函数分析中所发展的一般的算子理论，算子法又得到了其他的严格根据. 我们将不讲到这个. 可参阅，譬如，В. А. Диткин 和 А. П. Прудников[11]，近来波兰数学家[12]给出算子法十分独特和简单的见解.

** 彼得·西蒙·拉普拉斯(1749—1827)是法国数学家、天文学家、物理学家.

1) 函数 $f(t)$ 在整个 t 轴上,除了在 $f(t)$ 有第一类间断点的个别点之外处处满足赫尔德条件,且在 t 轴的每一个有限区间上,那种点只可能有有限多个. 这意味着,对每一个 t (除了上面指出的例外点外)存在正常数 $A,\alpha\leqslant 1$ 和 h_0,使得

$$|f(t+h)-f(t)|\leqslant A|h|^{\alpha}, \tag{1}$$

对一切 h, $|h|\leqslant h_0$ 成立.

2) 对于所有负值的 t,函数

$$f(t)=0.$$

3) $f(t)$ 不比指数函数增大得快,即是说,有这样的两个常数 $M>0,s_0\geqslant 0$ 存在,使对于所有的 t 都有

$$|f(t)|<Me^{s_0 t}. \tag{2}$$

数 s_0 我们叫做 $f(t)$ 的**增长指数**,对于有界的像原函数,显然可取 $s_0=0$*.

从物理应用的观点,条件 1)与 3)是不需要注释的——对于大多数的用来描述物理过程的函数 $f(t)$ (t 解释为时间),它们显然被满足. 条件 2)骤然看来好像是人为的. 可是应该指出:算子法是适应于可归结到已知初始值条件下解微分方程的那些问题的. 在这些问题中观察开始的瞬间之前,有关过程的进程的全部信息都包含在初值条件中,这开始的瞬间自然恒可取为时刻 $t=0$. 因此,条件 2)在物理上也完全是自然的.

所谓**单势函数**

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } t>0,\\ 0, & \text{当 } t<0\end{cases}$$

就是最简单的像原函数. 显然,函数 $\varphi(t)$ 乘以 $\eta(t)$,便"消减"了这个函数的关于 $t<0$ 的部分,而对于 $t>0$ 的部分保持不变:假若函数 $\varphi(t)$ 满足条件 1)与 3)而不满足 2),则乘积

$$f(t)=\eta(t)\varphi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{当 } t>0,\\ 0, & \text{当 } t<0\end{cases}$$

就将满足条件 2),也就是说,它是个像原函数(例如 $\eta(t)\sin\omega t$, $\eta(t)t^n$, $\eta(t)e^{\lambda t}$ 等等). 为书写的简单起见,我们将照例略去乘数 $\eta(t)$,一劳永逸地约定:所有我们将讨论的函数,对于负值的 t 都等于 0 (例如替代 $\eta(t)$ 将写 1,替代 $\eta(t)\sin\omega t$ 只写 $\sin\omega t$ 等等).

由关系式

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt \tag{3}$$

所定义的复变量 $p=s+i\sigma$ 的函数,叫做**函数 $f(t)$ 的像**(依照拉普拉斯的说法),这里

---

* 如果趋向更精确的估计,那么作为增长的指数取这种使得 $|f(t)|e^{-st}$ 当 $t\to\infty$ 时保持有界的数 s 的下界更好.

的积分是沿着正半轴来取的."函数 $f(t)$ 具有自己的像 $F(p)$"这句话,我们将用下面的记号来表示*:

$$f(t) \doteqdot F(p) \text{或} F(p) \doteqdot f(t).$$

注意,赫维赛德的方法在于把函数 $f(t)$ 转变到函数

$$F^*(p) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

这是在卡松的工作之后弄清楚的.

因此,赫维赛德的像,同拉普拉斯的像相差一个乘数 p.

附加的乘数 p 的存在,使赫维赛德的方法接近于电工学中应用另外一种符号方法,可是它在某一些计算中,引入了不适当的复杂化.此外,拉普拉斯变换更自然地与著名的傅里叶积分有联系,这种积分同样广泛地被应用于数学物理(参看第 88 目)**.基于这些理由,我们将处处考虑拉普拉斯变换,而不考虑赫维赛德变换.

定理 1 *对于每一个像原函数 $f(t)$,像函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\, p > s_0$ 上都已确定,其中 s_0 是 $f(t)$ 的增长指数,而且 $F(p)$ 是在这半平面上的解析函数.*

实际上,当 $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$ 时,由于不等式(1),积分(3)被收敛的积分控制

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \leqslant \int_0^\infty Me^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0}, \tag{4}$$

故积分(3)绝对收敛.再者,在任意半平面 $\mathrm{Re}\, p \geqslant s_1 > s_0$ 上,从积分(3)对于 p 求微分而得到的那个积分是一致收敛的,因为它也被一个与 p 无关的收敛积分所控制,

$$\left|\int_0^\infty f(t)te^{-pt}dt\right| \leqslant \int_0^\infty Mte^{-(s_1-s_0)t}dt = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}. \tag{5}$$

由此,根据第 16 目中的定理 4,我们得到结论:函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\, p > s_0$ 上的每一个点处都具有导数.定理已经证明了.

注 1 拉普拉斯积分(3),一般说来,只是在半平面 $\mathrm{Re}\, p > s_0$ 中定义像函数 $F(p)$,正如我们在下面看到的一样,在大量实际问题中像函数的定义域要比这个半平面宽广得多.因此我们考虑像函数过直线 $\mathrm{Re}\, p = s_0$ 的解析延拓,并且将利用在相应的拉普拉斯积分收敛的半平面中建立起来的不同像函数之间的关系在这种延拓下保持的事实(参阅第 25 目).

注 2 *如若点 p 趋于无穷远,使得 $\mathrm{Re}\, p = s$ 无限制地增大,则 $F(p)$ 趋于 0,即:*

$$\lim_{s\to+\infty} F(p) = 0. \tag{6}$$

这个论断可直接从不等式(4)推出.

由此推得:假若 $p\to\infty$ 并始终保持在任何一个角 $-\frac{\pi}{2}+\delta < \arg p < \frac{\pi}{2}-\delta$ 的内

* 也有使用记号→,↔,‖ 及其他的记号的.

** 最后,读者在以后的叙述中将会看到,拉普拉斯变换的性质更为对称:像原函数的每一种性质对应于像函数的类似的("对偶的")性质——参看性质Ⅲ与Ⅳ,Ⅴ与Ⅵ,Ⅶ与Ⅷ,Ⅸ与Ⅹ.

部,其中 $\delta>0$ 可以任意小,则 $F(p)\to 0$. 并且,这收敛性对于 $\arg p$ 来说是一致的. 特别是,如果 $F(p)$ 在无穷远点是解析的,则沿任意路径 $p\to\infty$ 时,$F(p)\to 0$. 因此,$F(p)$ 就应该在无穷远处有零点.

拉普拉斯变换的性质我们将于下一目阐明,而现在来谈一下如何导出由其像来确定像原函数的公式(算子法的第四阶段,参看 392 页). 我们将首先给出这公式的不严格却是构造性的推导,以后再引入严格的证明.

考虑积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}dp, \tag{7}$$

是沿着直线 $\operatorname{Re} p=a>0$,从下向上来取的. 我们还用 C_R 与 C'_R 来分别表示圆周 $|p|=R$ 的位于直线 $\operatorname{Re} p=a$ 的左边与右边的部分,用 $a-ib$ 与 $a+ib$ 来表示 C_R 与 C'_R 的端点(图 175).

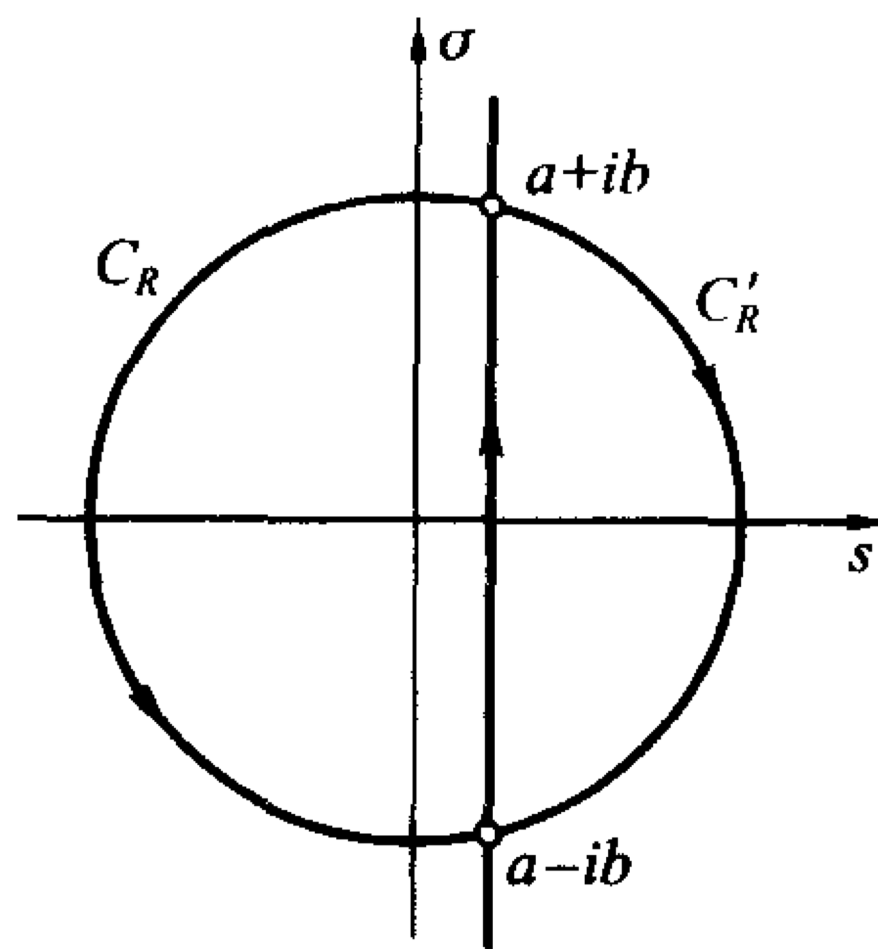


图 175

假设 $t>0$. 由于当 $R\to\infty$ 时,$\frac{1}{p}$ 对于 $\arg p$ 来说一致地趋于 0,故按第 73 目的若尔当引理(公式(4)),

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=0.$$

因此,从柯西的留数定理有

$$\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp+\int_{C_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=2\pi i\operatorname{res}\left.\frac{e^{pt}}{p}\right|_{p=0}=2\pi i,$$

当 $R\to\infty$ 时取极限得

$$f(t)=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp=1\quad(t>0).$$

如果 $t<0$,则仍按若尔当引理(第 73 目的公式(5)),

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=0,$$

而按柯西定理

$$\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp+\int_{C'_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=0,$$

由此当 $R\to\infty$ 时取极限得

$$f(t)=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp=0\quad(t<0).$$

因此,积分(7)是单势函数.

显然,若在(7)中用 $t-\tau$ 来替代 t,其中 τ 是个固定的数,则我们得到函数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{p(t-\tau)}}{p}dp=\begin{cases}0, & \text{当 } t<\tau,\\ 1, & \text{当 } t>\tau.\end{cases} \tag{8}$$

在(8)中代入 $\tau=\tau_1$,然后代入 $\tau=\tau_2>\tau_1$,且从第一个积分减去第二个,我们得到阶

梯函数的表示式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\frac{e^{-p\tau_1}-e^{-p\tau_2}}{p}dp=\begin{cases}0, & 当\ t<\tau_1,\\ 1 & 当\ \tau_1<t<\tau_2,\\ 0, & 当\ t>\tau_2.\end{cases}$$

完全同样,我们可用积分来表示出在图 176 中所示的那个阶梯函数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\frac{e^{-p\tau_k}-e^{-p\tau_{k+1}}}{p}dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)e^{-p\tau_k}\Delta'\tau_k\right\}dp, \quad (9)$$

其中 $\Delta'\tau_k=\frac{1-e^{-p\Delta\tau_k}}{p}=\Delta\tau_k-\frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!}p+\frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!}p^2-\cdots \quad (\Delta\tau_k=\tau_{k+1}-\tau_k)$. 现在假若增大 n 使 $\max\Delta\tau_k$ 趋于 0,则 $\Delta'\tau_k$ 与 $\Delta\tau_k$ 是等价的无穷小量,因而在公式(9)的大括弧中的那个和,与积分相差极小,在极限时就变为这积分. 自然期望,在极限时我们将得出函数 $f(t)$ 在区间 $(0,\tau)$ 上的积分表示:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{\int_0^{\tau} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right\}dp.$$

让 τ 趋于 ∞,并且用

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \qquad (10)$$

来表示函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换,在极限时我们便得到所求的用其像来表示像原函数的表达式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp. \qquad (11)$$

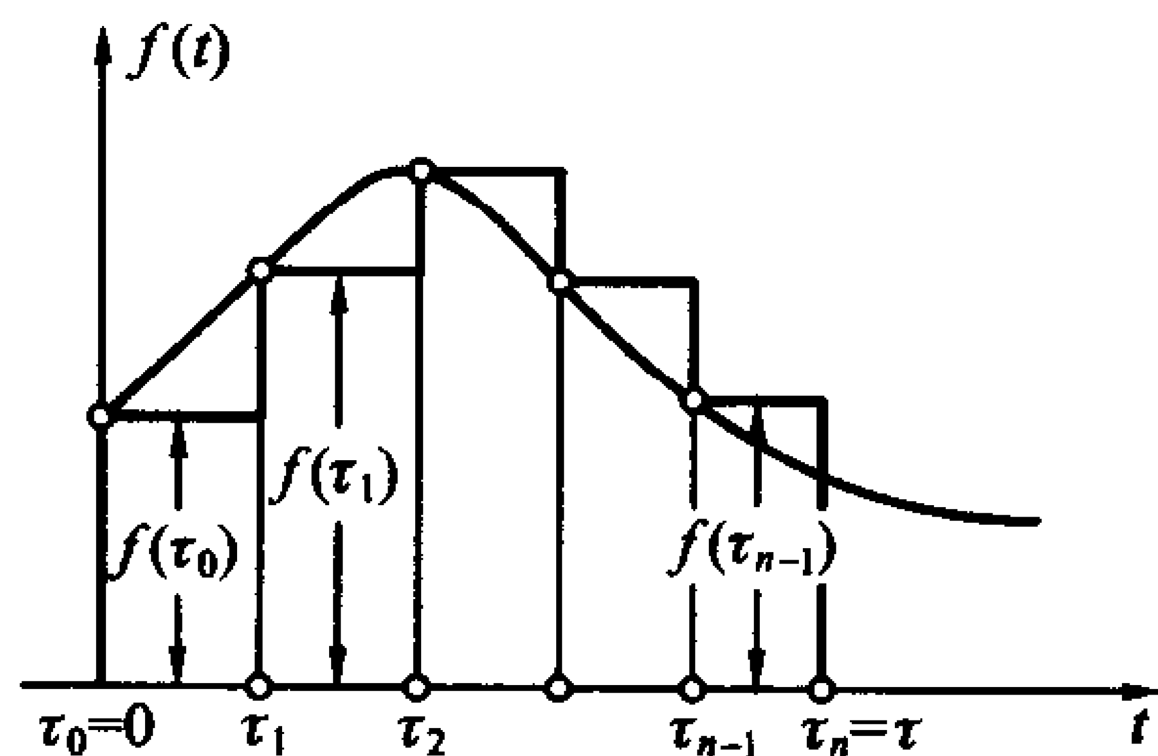


图 176

公式(11)是公式(10)的"反演",即是说,用 $f(t)$ 的像 $F(p)$ 来表示函数 $f(t)$. 完全同样,(10)也可视为(11)的反演,所以公式(10)与(11)称做**反演公式**(**拉普拉斯**).

现在我们引入精确的结果.

定理 2 如若函数 $f(t)$ 是个像原函数,即,如若它满足条件 1)、2)、3),且 $F(p)$ 是它的像,则在 $f(t)$ 满足赫尔德条件的任何一点 t 处,等式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \qquad (11)$$

成立,这里,积分沿着任一直线 $\operatorname{Re} p=a>s_0$ 来取,并且理解为是在主值意义下的*.

事实上我们考虑积分

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}F(p)dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}\left\{\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right\}dp$$

(参看公式(10)). 由于在半平面 $\operatorname{Re} p\geqslant a$ 上,积分 $\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$ 对于 p 来说一致收

* 即是,当 $b\to\infty$ 时沿着线段 $(a-ib,a+ib)$ 的积分的极限.

敛(参看定理 1 的证明),故可改变积分的顺序*,因而我们得到

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}f(\tau)d\tau\int_{a-ib}^{a+ib}e^{p(t-\tau)}dp=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(\tau)e^{a(t-\tau)}\frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-t}^{\infty}f(\xi+t)e^{-a(\xi+t)}\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi$$

(我们作了置换 $\tau-t=\xi$). 设 $g(t)=f(t)e^{-at}$,并且考虑到对一切 $t<0, g(t)=0$,我们得到

$$f_b(t)=\frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\sin b\xi d\xi+\frac{1}{\pi}f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi. \tag{12}$$

在第二项中积分——这是欧拉积分(见第 73 目例 2),在任何 $b>0$ 下它等于 π,也就意味着第二项等于 $f(t)$. 为了证明我们需要的关系式 $\lim\limits_{b\to\infty}f_b(t)=f(t)$,因此剩下要证明,(12)式中的第一项在 $b\to\infty$ 时趋于 0. 为此我们需要

引理 *对于任何在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可积的函数 $\varphi(\xi)$,*

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\sin b\xi d\xi=0.$$

事实上,如果 $\varphi(\xi)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微,那么一切可通过分部积分来加以证明:当 $b\to\infty$ 时,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\sin b\xi d\xi=-\varphi(\xi)\frac{\cos b\xi}{b}\bigg|_{\alpha}^{\beta}+\int_{\alpha}^{\beta}\varphi'(\xi)\frac{\cos b\xi}{b}d\xi\to 0.$$

如果 $\varphi(\xi)$ 表示任何可积函数,那么对于任何 $\varepsilon>0$,总可找到连续可微函数 $\varphi_{\varepsilon}(\xi)$,使得

$$\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi(\xi)-\varphi_{\varepsilon}(\xi)|d\xi<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而此时

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\sin b\xi d\xi=\int_{\alpha}^{\beta}\{\varphi(\xi)-\varphi_{\varepsilon}(\xi)\}\sin b\xi d\xi+\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_{\varepsilon}(\xi)\sin b\xi d\xi,$$

其中右边第一项,对一切 b,绝对值不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$ (因为 $|\sin b\xi|\leqslant 1$),而第二项对于充分大的 b (按照刚才证明的)也小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 引理得证.

为了结束定理的证明,固定 $\varepsilon>0$,并且把公式(12)的第一项中的积分分成三个

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\sin b\xi d\xi$$

$$=\int_{-B}^{B}\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\sin b\xi d\xi+\int_{|\xi|>B}\frac{g(\xi+t)}{\xi}\sin b\xi d\xi-g(t)\int_{|\xi|>B}\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi$$

这里第二和第三项是收敛积分,因此其中每一项按绝对值可以做到小于 $\frac{\varepsilon}{3}$,只要把数

---

* 这可从分析中熟知的定理直接推出. 参看,例如,Фихтенгольц,卷 II,733 页.

B 选得充分大. 在第一项中 $\sin b\xi$ 前的因子在区间 $[-B,B]$ 上是可积函数,因为根据赫尔德条件在 $\xi=0$ 的邻域内我们有

$$\left|\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\right| \leqslant \frac{A}{|\xi|^{1-\alpha}},$$

其中 $\alpha>0$,因此根据引理第一项绝对值在一切充分大的 b 下都将小于 $\frac{\varepsilon}{3}$. 由此推出

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\sin b\xi d\xi=0,$$

定理完整地证毕.

从已证明的定理直接可有

定理 3 像原函数 $f(t)$ 的值,除了在它的间断点处之外,完全由它的像 $F(p)$ 所确定.

实际上,按照刚才所证明的定理,像原函数在它的连续点处的值,可按照公式 (11) 用它的像 $F(p)$ 来表达. 像原函数在它的间断点处的值,显然不影响它的像.

我们还要举出使给定的复变函数 $F(p)$ 是某一个像原函数的像的充分条件:

定理 4 如果函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ p>s_0$ 上是解析的,在任意半平面 $\mathrm{Re}\ p\geqslant a>s_0$ 上当 $|p|\to\infty$ 时对于 $\arg p$ 来说一致地收敛于 0,且积分 $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)dp$ 是绝对收敛的,则 $F(p)$ 是函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}F(p)dp \tag{11}$$

的像.

实际上,我们取定某一数值 p_0, $\mathrm{Re}\ p_0>a$,于是由 (11) 推知

$$\int_0^{\infty}e^{-p_0t}f(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}e^{-p_0t}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}F(p)dp\right\}dt. \tag{13}$$

由于在内部的积分中, $p=a+i\sigma$, $dp=id\sigma$,因此可以将因子 e^{at} 拿出到积分号的外面,而留下的积分

$$\left|\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{i\sigma t}F(p)dp\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|F(a+i\sigma)|d\sigma.$$

由此看出:这个积分对于 t 来说一致收敛,因此在公式 (13) 中可交换积分顺序. 我们得

$$\int_0^{\infty}e^{-p_0t}f(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)dp\int_0^{\infty}e^{(p-p_0)t}dt=\frac{-1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{F(p)}{p-p_0}dp, \tag{14}$$

因为,由于 $\mathrm{Re}(p-p_0)<0$ 且 $t>0$ 内部的积分收敛,并且等于 $\frac{-1}{p-p_0}$. 再者,由于定理中的条件,在圆弧 C'_R: $|p|=R$, $\mathrm{Re}\ p>a$ 上有:当 $R\to\infty$ 时, $\max|F(p)|=M_R\to 0$,因此

$$\left|\int_{C'_R}\frac{F(p)}{p-p_0}dp\right|\leqslant\frac{M_R}{R-|p_0|}\pi R,$$

因而当 $R\to\infty$ 时这积分趋于 0. 由此推得:在(14)中的积分直线可用由 C_R 与从上到下通过的线段 $(a+ib, a-ib)$ 所组成的周线 $\widetilde{C}_R$ 来替代

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{C}_R} \frac{F(p)}{p-p_0}dp$$

(改变绕行直线的方向,摆脱公式(14)中的符号"-"). 而在周线 $\widetilde{C}_R$ 的内部,解析函数 $\frac{F(p)}{p-p_0}$ 只有一个奇点 $p=p_0$,而且是一个具有留数 $F(p_0)$ 的一阶极点,因此

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)dt = F(p_0),$$

这正是所要证明的.

现在注意:当 $t<0$ 时,按若尔当引理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} e^{pt}F(p)dp = 0,$$

因此在公式(11)中的积分直线可用前述的周线 $\widetilde{C}_R$ 来替代. 当 $t<0$ 时我们得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{C}_R} e^{pt}F(p)dp = 0,$$

因为被积函数在 $\widetilde{C}_R$ 内是解析的. 因此,关于像原函数的条件 2)已经满足. 再者,从(11)有

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}e^{at}\int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\sigma)|d\sigma = Me^{at},$$

因此条件 3)也被满足. 我们将不详细叙述条件 1)的核验.

80. 拉普拉斯变换的性质 在此,我们将举出一系列的简单命题,它们构成了算子法的工具. 首先,注意到拉普拉斯变换的两个简单的例子*:

$$1 \doteqdot \frac{1}{p}, \quad e^{p_0 t} \doteqdot \frac{1}{p-p_0}, \tag{1}$$

它们可直接从它的定义得出(前一目的公式(2)).

其次,我们以后将处处用 $f(t), g(t), \cdots$ 来代表像原函数,而用 $F(p), G(p), \cdots$ 来代表它们的像

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \quad G(p) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt}dt, \cdots.$$

直接从积分的性质可得出:

Ⅰ. 线性性质 对于任何两个(复)常量 α 与 β,有

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p). \tag{2}$$

例如,根据这性质,从公式(1)立即得出关系式

---

* 在这里,1 与 $e^{p_0 t}$ 依照我们的约定分别表示 $\eta(t)$ 和 $\eta(t)e^{p_0 t}$.

$$\sin \omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\doteqdot\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{3}$$

类似地,有

$$\cos \omega t\doteqdot\frac{p}{p^2+\omega^2},\quad \operatorname{sh}\omega t\doteqdot\frac{\omega}{p^2-\omega^2},\quad \operatorname{ch}\omega t\doteqdot\frac{p}{p^2-\omega^2}. \tag{4}$$

Ⅱ. 相似定理　对于任一常数 $\alpha>0$,有

$$f(\alpha t)\doteqdot\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{5}$$

实际上,令 $\alpha t=\tau$,有

$$f(\alpha t)\doteqdot\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}d\tau=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Ⅲ. 像原函数的微分法　如若函数 $f(t)$ 在 $t>0$ 时连续,$f'(t)$,或更一般地,$f^{(n)}(t)$,是像原函数,则

$$f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0), \tag{6}$$

或

$$f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0), \tag{7}$$

其中 $f^{(k)}(0)$ 理解为右极限值 $\lim\limits_{t\to+0}f^{(k)}(t)$.

实际上,过渡到像并用分部积分法,有

$$f'(t)\doteqdot\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=[f(t)e^{-pt}]_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

由于 $\operatorname{Re}p=s>s_0$,有 $|f(t)e^{-pt}|\leqslant Me^{(s-s_0)t}$,因而第一项在代入 $t=\infty$ 后给出 0,代入 $t=0$ 后显然给出 $-f(0)$*. 第二项等于 $pF(p)$,因而公式(6)得证. 应用公式(6)两次,便得出

$$f''(t)=[f'(t)]'\doteqdot p[pF(p)-f(0)]-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

如此类推.

特别是,如果 $f(0)=0$,则

$$f'(t)\doteqdot pF(p), \tag{8}$$

因而像原函数的求导,归结到用 p 乘它的像(参看本章的引言).

对偶** 于性质Ⅲ的是性质

Ⅳ. 像的微分法　像的微分法可归结为用 $-t$ 来乘像原函数,或者,更一般地,

$$F^{(n)}(p)\doteqdot(-1)^nt^nf(t). \tag{9}$$

实际上,由于 $F(p)$ 是在半平面 $\operatorname{Re}p>s_0$ 上解析的函数,因而它可以对 p 来求导数***,因而得

---

* 显然,$f(0)$ 应当理解为右极限值,左极限值总是等于 0.

** 参看 394 页脚注 **.

*** 在积分号下求微分的可能性是这样推得的:所有积分(10)在任一半平面 $\operatorname{Re}p\geqslant a>s_0$ 上对于 p 来说都一致收敛. 也可以利用第 16 目的魏尔斯特拉斯定理.

$$F'(p)=-\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt,\quad F''(p)=\int_0^\infty t^2f(t)e^{-pt}dt,\cdots,$$

$$F^{(n)}(p)=(-1)^n\int_0^\infty t^nf(t)e^{-pt}dt,\tag{10}$$

这与公式(9)等价.

作为性质Ⅳ的应用的例子,我们指出,从关系式(1)可推得:

$$t^n\doteqdot\frac{n!}{p^{n+1}},\quad t^ne^{p_0t}\doteqdot\frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}},\tag{11}$$

而从公式(3),(4)有

$$t\sin\omega t\doteqdot\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},\quad t\cos\omega t\doteqdot\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.\tag{12}$$

Ⅴ. 像原函数的积分法 **像原函数的积分法归结到用 p 来除它的像:**

$$\int_0^t f(t)dt\doteqdot\frac{F(p)}{p}\tag{13}$$

(参看本章的引言).

首先,容易验证,函数 $g(t)=\int_0^t f(t)dt$ 与 $f(t)$ 一起是像原函数,就是说,它满足第 79 目的条件 1),2),3). 于是由公式(8)(这公式可以应用,因为 $g(0)=0$)有

$$f(t)=g'(t)\doteqdot pG(p).$$

这样,对于 $f(t)$ 的像有 $F(p)=pG(p)$,由此

$$G(p)=\frac{F(p)}{p},$$

这便是所要求的.

对偶于性质Ⅴ的是性质

Ⅵ. 像的积分法 **如果积分 $\int_p^\infty F(p)dp$ 收敛,则它可视为函数 $\frac{f(t)}{t}$ 的像:**

$$\frac{f(t)}{t}\doteqdot\int_p^\infty F(p)dp,\tag{14}$$

(像的积分法,相当于用 t 来除像原函数).

实际上,我们有

$$\int_p^\infty F(p)dp=\int_p^\infty dp\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

假定积分路线 (p,∞) 全部位于半平面 $\mathrm{Re}\,p\geqslant a>s_0$ 上,我们得到内部的积分的估计

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right|\leqslant M\int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}dt,$$

从这显然可见,对于 p 来说它是一致收敛的. 所以我们可交换积分的顺序

$$\int_p^\infty F(p)dp=\int_0^\infty f(t)dt\int_p^\infty e^{-pt}dp=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt.$$

所得到的等式与公式(14)等价*.

例 1 我们有(参看(1))

$$e^{bt}-e^{at}\doteqdot\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-a}.$$

应用性质Ⅵ,得到

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\doteqdot\int_p^{\infty}\left(\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-a}\right)dp=\ln\frac{p-a}{p-b}. \tag{15}$$

例 2 从公式(3),应用性质Ⅵ,求得

$$\frac{\sin t}{t}\doteqdot\int_p^{\infty}\frac{dp}{1+p^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan p=\operatorname{arccot} p,$$

再应用性质Ⅴ,便求得正弦积分的像

$$\operatorname{si} t=\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt\doteqdot\frac{\operatorname{arccot} p}{p}. \tag{16}$$

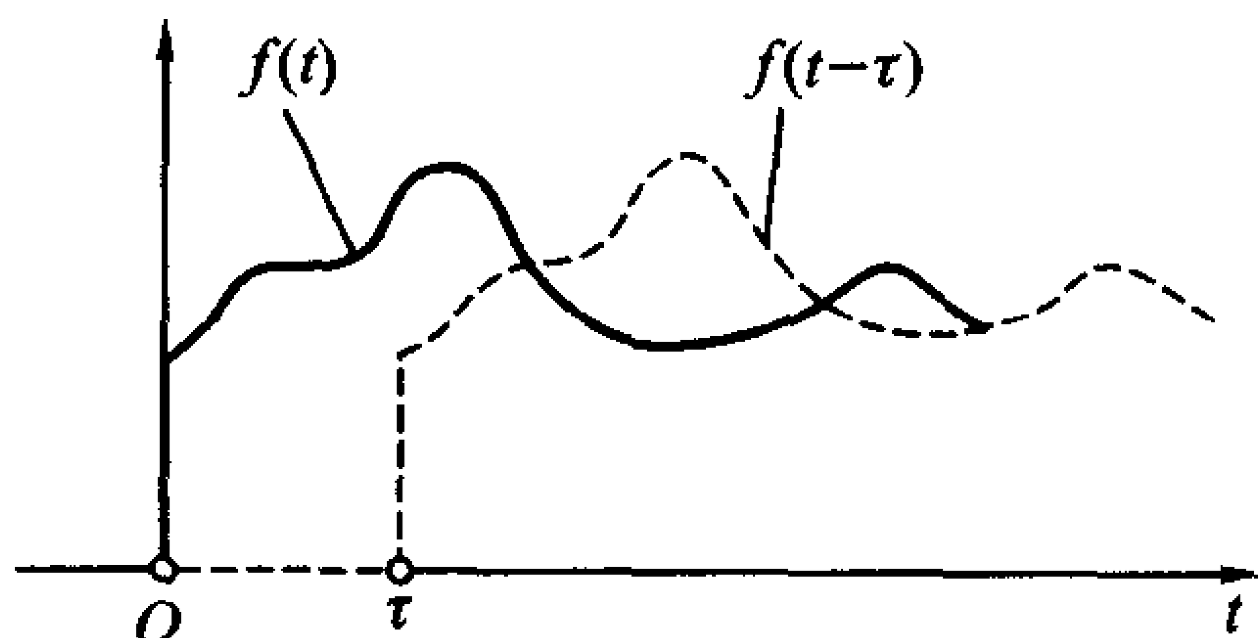


图 177

Ⅶ. *滞后定理* 对于任一正数 τ,

$$f(t-\tau)\doteqdot e^{-p\tau}F(p) \tag{17}$$

(*像原函数的具有滞后* τ,*相当于像乘以因子* $e^{-p\tau}$)(图 177).

因为当 $t<\tau$ 时 $f(t-\tau)=0$,故作变量代换 $t-\tau=t_1$ 后,得到

$$f(t-\tau)\doteqdot\int_\tau^{\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1=e^{-p\tau}F(p),$$

这正是所要证明的.

寻找在不同区段上由不同解析表达式给出的函数的像时应用这定理特别方便.

例 1 求图 178 中所表示的阶梯函数的像.显然有

$$f(t)=A\{\eta(t)+\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+\cdots\},$$

因此按滞后定理

$$f(t)\doteqdot A\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-p\tau}+\frac{1}{p}e^{-2p\tau}+\cdots\right\}.$$

因为 $|e^{-p\tau}|=e^{-s\tau}<1$,在右边是收敛的几何级数,所以

$$f(t)\doteqdot\frac{A}{p}\frac{1}{1-e^{-p\tau}}=\frac{A}{2p}\left(1+\operatorname{cth}\frac{p\tau}{2}\right). \tag{18}$$

例 2 周期性的矩形脉冲函数 $g(t)$,其图像表示在图 179 中,可写成如下形式

$$g(t)=A\{\eta(t)-2\eta(t-\tau)+2\eta(t-2\tau)-\cdots\},$$

因此按滞后定理

$$g(t)\doteqdot A\left\{\frac{1}{p}-\frac{2}{p}e^{-p\tau}+\frac{2}{p}e^{-2p\tau}-\cdots\right\}=\frac{A}{p}\left(1-2\frac{e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}\right)=\frac{A}{p}\operatorname{th}\frac{p\tau}{2}. \tag{19}$$

周期性的三角形脉冲函数 $h(t)$,其图像在图 179 中用虚线表出,等于 $\int_0^t g(t)dt$.因此按性质Ⅴ得

---

* 注意,从我们的讨论可得出积分 $\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt$ 的收敛性.

$$h(t) \doteqdot \frac{A}{p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}. \tag{20}$$

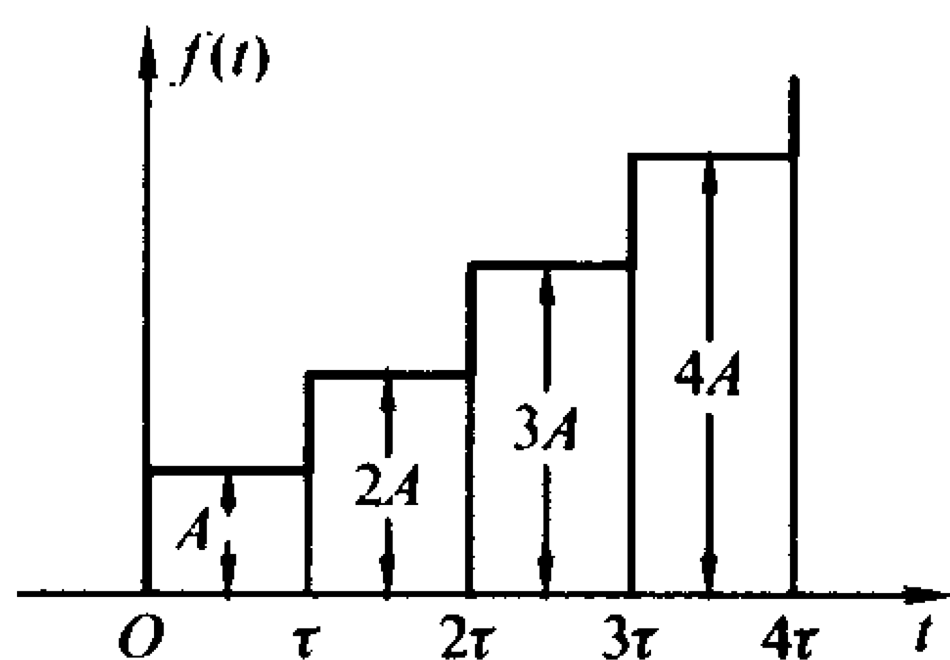


图 178

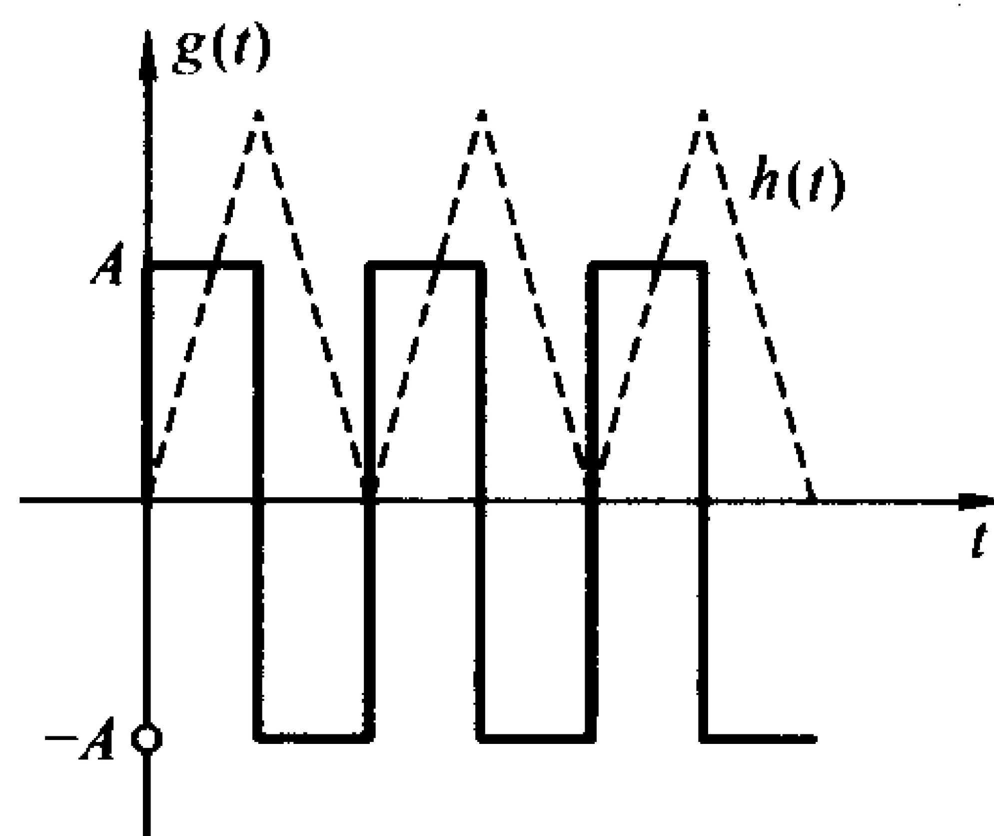


图 179

对偶于滞后定理的是

Ⅷ. 位移定理　对于任一复数 p_0,

$$e^{p_0 t} f(t) \doteqdot F(p - p_0) \tag{21}$$

(对像作"位移"p_0,相当于用 $e^{p_0 t}$ 来乘像原函数).

我们有

$$e^{p_0 t} f(t) \doteqdot \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p - p_0),$$

这就是要证明的.

这条定理使我们能按函数已知的像,求得这函数乘以指数函数后的函数的像,例如:

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2},\ e^{-\lambda t} \cos \omega t \doteqdot \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2},$$

$$e^{-\lambda t} t^n \doteqdot \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}. \tag{22}$$

81. 乘法定理　表达函数乘积的像原函数与像之间的联系的命题,在算子法中占有特殊地位.

Ⅸ. 乘法定理(博雷尔)　两个像 $F(p)$ 与 $G(p)$ 的乘积也是像,并且

$$F(p) \cdot G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \tag{1}$$

实际上,在公式(1)的右端的积分是个像原函数:条件 1)与 2)很明显,要证明 3),可注意如果取数值 s_0 等于 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的增长指数中的较大的,则

$$\left| \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right| < M \left| \int_0^t e^{s_0 \tau} e^{s_0 (t-\tau)} d\tau \right| = M t e^{s_0 t}.$$

由此有:积分(1)不超过某一个常数乘以 $e^{(s_0+\varepsilon)t}$,其中 ε 是任意小的正数.

现在考虑积分(1)的像:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

在此,右端是一个二重积分,分布在平面(t,τ)的扇形 S 上(图 180),因为当固定 t 时,对 τ 的积分是自 0 到 $\tau=t$ 而取的,然后 t 自 0 变动到∞.由于当 $\mathrm{Re}\ p>s_0$时,这二重积分绝对收敛,因此可以交换积分的顺序*,并且我们得到(并令 $t_1=t-\tau$ 来替代t):

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}g(t-\tau)dt$$
$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^\infty g(t_1)e^{-pt_1}dt_1=F(p)G(p),$$

这正是所要证明的.

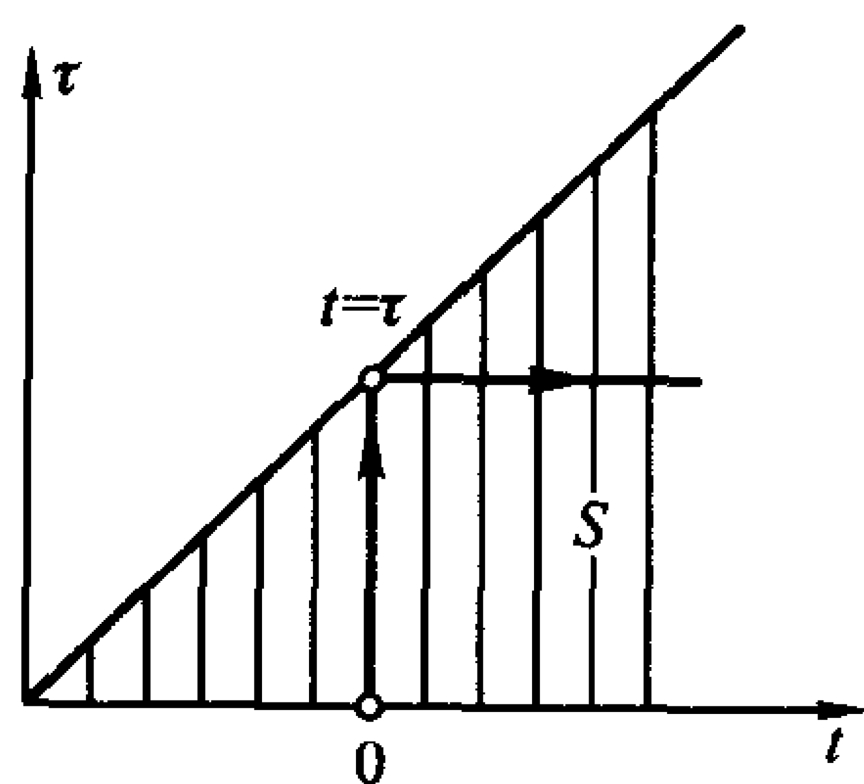


图 180

在公式(1)的右端的那个积分称为函数 $f(t)$与$g(t)$的**卷积****,用记号

$$(f*g)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{2}$$

来表示.

定理Ⅸ断言:*像的乘积,等价于像原函数的卷积*

$$(f*g)\doteqdot F(p)G(p). \tag{3}$$

在应用时,乘积定理的下述推论很有用,这推论与须要求出乘积 $pF(p)G(p)$的像原函数的情况有关.利用像原函数的求微分规则(上一目的公式(6))和已经证明的乘法定理,我们得到所谓的杜阿梅尔(Duhamel)积分:

$$pF(p)G(p)=f(0)G(p)+\{pF(p)-f(0)\}G(p)$$
$$\doteqdot f(0)g(t)+\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{4}$$

根据卷积的对称性质,这积分也可写成形状

$$pF(p)G(p)\doteqdot f(0)g(t)+\int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau, \tag{5}$$

而变换函数 $F(p)$和 $G(p)$的作用导出公式

$$pF(p)G(p)\doteqdot g(0)f(t)+\int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau$$
$$=g(0)f(t)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \tag{6}$$

应用杜阿梅尔积分的例子将在下面给出(见第 84 目及以后).

---

* 参看,例如,Фихтенгольц,卷Ⅲ.

** 注意卷积的对称性质$(f*g)=(g*f)$,这是容易证明的:在卷积的定义中以 $\tau_1=t-\tau$ 代τ 即得.它也可从当交换 $F(p)$与 $G(p)$的地位时(3)的左端不改变而推得.

我们来举出对偶于乘积定理的定理：

Ⅹ. 定理 设已给定了两个像原函数 $f(t)$ 与 $g(t)$，其增长指数分别是 s_1 与 s_2. 则它们的乘积也是像原函数，且

$$f(t)g(t)\doteqdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)G(p-q)dq, \tag{7}$$

其中 $a>s_1$，且 $\operatorname{Re} p>s_2+a$.

实际上，乘积 $f(t)g(t)$ 显然满足关于像原函数的条件 1)－3). 它的像是

$$f(t)g(t)\doteqdot\int_0^{\infty}f(t)g(t)e^{-pt}dt.$$

取 $a>s_1$，且按反演公式来代换 $f(t)$

$$\begin{aligned}f(t)g(t)&\doteqdot\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)e^{qt}dq\right\}g(t)e^{-pt}dt\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left\{F(q)\int_0^{\infty}g(t)e^{-(p-q)t}dt\right\}dq\end{aligned}$$

（由于绝对收敛性，交换积分的顺序是合法的）.

假若还设 $\operatorname{Re} p>s_2+a$，则将有 $\operatorname{Re}(p-q)>s_2$，因为我们有 $\operatorname{Re} q=a$，所以内部的积分可用 $G(p-q)$ 来替代. 定理得证.

还要注意，由于 a 可以取成任意地接近 s_1，故函数 $f(t)g(t)$ 的像定义在半平面 $\operatorname{Re} p>s$ 上，其中 $s=s_1+s_2$ 是 $f(t)g(t)$ 的增长指数.

在 1935 年苏联数学家 A. M. 艾弗洛斯证明了非常有用的

Ⅺ. 广义乘积定理 设已给定了像 $F(p)\doteqdot f(t)$，与两个解析函数 $G(p)$ 与 $q(p)$，使得

$$G(p)e^{-\tau q(p)}\doteqdot g(t;\tau) \tag{8}$$

则 *

$$F[q(p)]G(p)\doteqdot\int_0^{\infty}f(\tau)g(t;\tau)d\tau. \tag{9}$$

实际上，右端的像是

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}f(\tau)g(t;\tau)d\tau&\doteqdot\int_0^{\infty}e^{-pt}dt\int_0^{\infty}f(\tau)g(t,\tau)d\tau\\&=\int_0^{\infty}f(\tau)d\tau\int_0^{\infty}g(t;\tau)e^{-pt}dt\end{aligned}$$

（我们假定，可以交换积分的顺序）. 但内部的积分是 $g(t;\tau)$ 的像；因此按公式(8)可写成

$$\int_0^{\infty}f(\tau)g(t;\tau)d\tau\doteqdot G(p)\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-q(p)\tau}d\tau=G(p)F[q(p)],$$

* 我们不表述定理的条件. 从这些条件应当得出：所需的函数都是像，且可交换积分的顺序（参看证明）.

这正是所要求的.

注　特别是,如果取 $q(p)=p$,则 $g(t;\tau)\doteqdot e^{-p\tau}G(p)$. 因而按滞后定理,$g(t;\tau)=g(t-\tau)$. 因此公式(9)采取形式

$$F(p)G(p)\doteqdot\int_0^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^{t}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(当 $\tau>t$ 时,由于像原函数的条件 2),有 $g(t-\tau)=0$),因而与公式(1)一致. 由此可见,艾弗洛斯定理实际上是乘积定理的拓广.

我们来举出艾弗洛斯定理的一些应用例子.

例 1　设 $G(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p)=\sqrt{p}$. 函数 $g(t;\tau)$ 可根据反演公式求得

$$g(t;\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}.$$

考虑由下述曲线所组成的周线:线段 $(a-ib,a+ib)$,圆周 $|p|=R$ 的弧 C'_R 与 C''_R 割痕的两岸 Ⅰ,Ⅱ,与圆周 $c_r:|p|=r$ (图 181). 在这周线的内部,被积函数是解析的和单值的(为确定起见,我们将设 $-\pi<\arg p<\pi$). 所以按柯西定理,沿线段 $(a-ib,a+ib)$ 的积分可用沿周线的其余部分的积分来替代(积分的方向在图 181 中用箭头标出). 由于 $\tau>0$,故在弧 C'_R 与 C''_R 上当 $R\to\infty$ 时函数 $\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\tau\sqrt{p}}\to 0$. 因此,按若尔当引理,当 $t>0$ 时,$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\tau\sqrt{p}+pt}$ 的沿 C'_R 与 C''_R 的积分当 $R\to\infty$ 时都趋于 0,因而可写

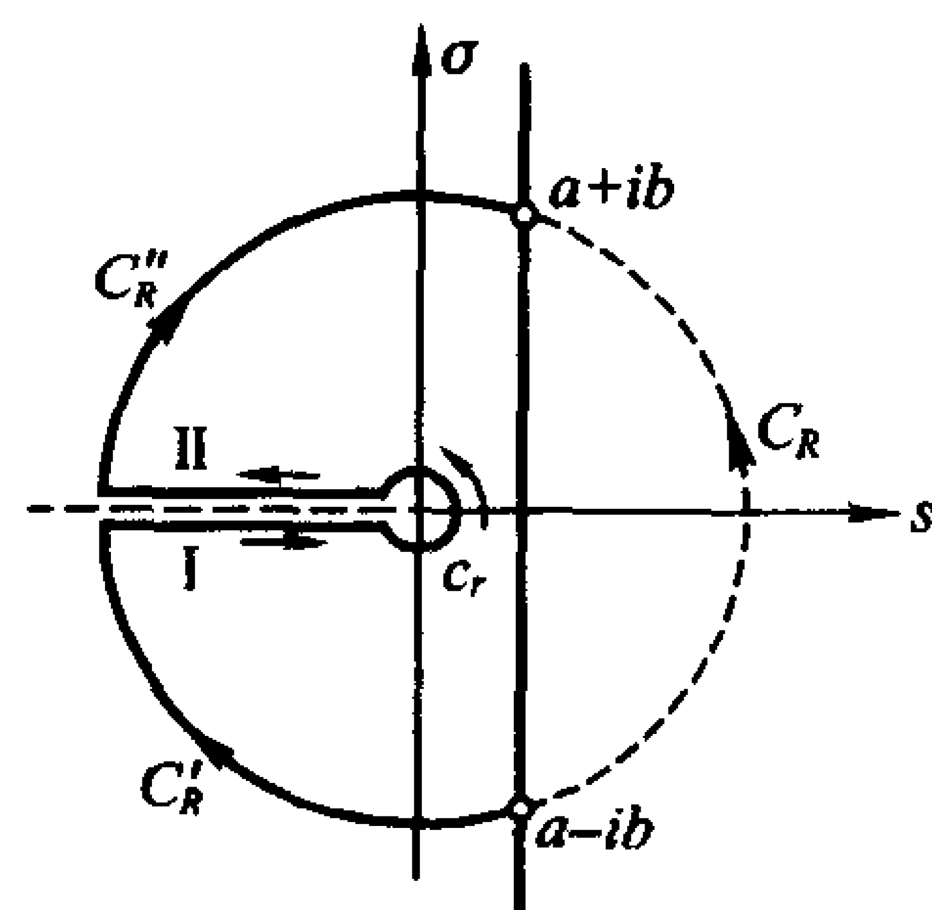


图 181

$$g(t;\tau)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{Ⅰ}e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}+\int_{c_r}+\int_{Ⅱ}\right\}.$$

在边岸 Ⅰ 上有 $p=xe^{-i\pi}$, $\sqrt{p}=-i\sqrt{x}$,在边岸 Ⅱ 上有 $p=xe^{i\pi}$, $\sqrt{p}=i\sqrt{x}$. 因此,

$$\int_{Ⅰ}=\int_R^r e^{i\tau\sqrt{x}-xt}\frac{dx}{i\sqrt{x}},$$

$$\int_{Ⅱ}=-\int_r^R e^{-i\tau\sqrt{x}-xt}\frac{dx}{i\sqrt{x}}.$$

显然,沿 c_r 的积分当 $r\to 0$ 时趋于 0,因为 $\left|\int_{c_r}\right|<\frac{M}{\sqrt{r}}2\pi r$. 因此

$$g(t;\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-xt}\cos\tau\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-tu^2}\cos\tau u du=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$$

(我们令 $x=u^2$,然后利用泊松积分已知值,见第 73 目的例 4),即是说 *

$$\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}.\qquad(10)$$

---

* 当 $t<0$ 时,在图 181 中沿着用虚线表示的弧 C_R 的积分趋于 0. 用类似的讨论可证明,当 $t<0$ 时 $g(t;\tau)=0$.

现在假设像原函数 $F(p)\doteqdot f(t)$ 是已知的. 考虑到关系(10),我们按艾弗洛斯定理直接可求得 $\dfrac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$ 的像原函数

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau. \tag{11}$$

例如,设 $F(p)=\dfrac{e^{-\alpha p}}{p}$ $(\alpha>0)$,按滞后定理求得 $f(t)=\eta(t-\alpha)$,因而公式(11)给出

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

$\left(\text{我们利用: 当 } \tau<\alpha \text{ 时 } \eta(\tau-\alpha)=0, \text{然后令} \dfrac{\tau}{2\sqrt{t}}=x\right)$. 利用记号

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-x^2}dx,\quad 1-\operatorname{erf} x=\operatorname{Erf} x \tag{12}$$

且考虑到 $\operatorname{erf}\infty=1$ (见第 70 目),我们可以把最后那个公式写成形式

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}\doteqdot 1-\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)=\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right). \tag{13}$$

例 2 设 $G(p)=\dfrac{1}{p}$, $q(p)=\dfrac{1}{p}$. 函数 $g(t;\tau)\doteqdot\dfrac{1}{p}e^{-\frac{\tau}{p}}$ 可借助于相似定理从公式 $\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}\doteqdot J_0(2\sqrt{t})$ 来求出

$$g(t;\tau)=J_0(2\sqrt{t\tau}).$$

公式 $\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}\doteqdot J_0(2\sqrt{t})$ 将于下目*得出.

艾弗洛斯定理给出

$$\frac{1}{p}F\left(\frac{1}{p}\right)\doteqdot\int_0^{\infty} f(\tau)J_0(2\sqrt{t\tau})d\tau. \tag{14}$$

特别,令 $f(\tau)=\cos\tau$,得出 $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$(参看第 80 目(4)),$F\left(\dfrac{1}{p}\right)=\dfrac{p}{p^2+1}$. 因而公式(14)具有形式

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\tau})\cos\tau d\tau=\frac{1}{p^2+1}. \tag{15}$$

注意到第 80 目的公式(3),得到含有贝塞尔函数 J_0 的下述关系式:

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\tau})\cos\tau d\tau=\sin\tau. \tag{16}$$

82. 展开定理 在此,我们将证明某些与展开像原函数或像函数为级数有关的定理. 在第一个定理中,我们将假定:像 $F(p)$ 在无穷远点处是解析的(按第 79 目的注,这时 $F(\infty)=0$). 并且证明:在这种情况下,像原函数可以找出,形式上取为函数 $F(p)$ 在无穷远点的邻域内的洛朗展开式的各项的像原函数的和. 考虑到第 80 目中关于 p 的负幂的像原函数的公式(11),我们可把这定理表述为下面的形式:

Ⅻ. *第一展开定理* *如果 $F(p)$ 在无穷远点处是正则的,且在它的邻域* $|p|\geqslant R$

---

* 参看第 82 目的公式(4),J_0 是零阶的第一类贝塞尔函数,见第 70 目,也可见下一章.

内有洛朗展开式

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k},\tag{1}$$

则 $F(p)$ 的像原函数是(乘以 $\eta(t)$ 的)函数

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}.\tag{2}$$

这时，$f(t)$ 是一个整函数.

为了证明，令 $p=\frac{1}{q}$ 和 $F\left(\frac{1}{q}\right)=\Phi(q)$. 函数 $\Phi(q)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kq^k$ 在圆 $|q|\leqslant\frac{1}{R}$ 内是解析的，因此由第 17 目中柯西不等式给出

$$|c_k|<MR^k.$$

从所得到的这些不等式，对于任何(复数) t 得

$$|f(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!}\leqslant MR\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(R|t|)^k}{k!}=MRe^{R|t|}.$$

由此推得：第一，级数(2)对于所有的复数 t 都收敛，亦即，它是一个整函数；第二，对于 t 的所有的正值，$|f(t)|<Ce^{Rt}$. 因此，函数 $\eta(t)\cdot f(t)$ 的确是个像原函数. 由于级数(2)在任何有限圆内是一致收敛的，我们可以把它乘以 e^{-pt}，然后关于 t 自 0 到任何 $T>0$ 逐项求积分. 如果这时 $\mathrm{Re}\,p>R$. 也就可以对 t 从 0 到 ∞ 进行逐项积分. 利用第 80 目的公式(11)，我们便得到需要的展开式(1). 定理得证.

注　也可以证明其逆命题：如果像原函数具有形状 $\eta(t)f(t)$，其中 $f(t)$ 是个整函数，满足不等式 $|f(t)|<Me^{s_0|t|}$ (即是，$f(t)$ 具有有限阶)，则它的像 $F(p)$ 在无穷远点处是正则的.

例　考虑展开式

$$F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^{n+k+1}}.$$

由于 $F(p)$ 在无穷远处是正则的，且在那里有零点，故按定理Ⅻ可形式地变到像原函数

$$\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}\doteqdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}=f(t).$$

在右端的级数使我们联想起圆柱函数 J_n 的展开式(参看第 70 目公式(13)). 为了把它化到这个函数，令 $t=\left(\frac{\tau}{2}\right)^2$，于是

$$f(t)=\left(\frac{\tau}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ (n+k)!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k}=\left(\frac{\tau}{2}\right)^nJ_n(\tau)=t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t}).$$

因此，我们有

$$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}},\tag{3}$$

特别，当 $n=0$ 时

$$J_0(2\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}.\tag{4}$$

我们还要举出所得到的公式的某些推论. 从关系式(3)按反演公式得

$$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{1}{p^{n+1}}e^{pt-\frac{1}{p}}dp.$$

在这里代入 $2\sqrt{t}=\tau$ 与(当固定 τ 时) $p=\frac{2}{\tau}p_1$，还考虑到，由最后那个代换，只将积分直线在右半平面上作平行移动$\left(因为\frac{2}{\tau}>0\right)$，我们得到

$$J_n(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty}e^{\frac{\tau}{2}\left(p_1-\frac{1}{p_1}\right)}\frac{dp_1}{p_1^{n+1}} \tag{5}$$

(与第 70 目的类似的公式相比较). 现在令 $p=\frac{1}{2}\left(p_1-\frac{1}{p_1}\right)$. 右半平面 $\operatorname{Re}p_1>0$ 在这时变为割去了射线 $(-i\infty,-i)$ 与 $(i,i\infty)$ 的 p 平面. 为了阐明积分直线的像 L 的特征，令 $p_1=re^{i\varphi}$，$p=s+i\sigma$，于是

$$s=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\quad \sigma=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

在积分直线 $\operatorname{Re}p_1=a_1$ 上有 $r\cos\varphi=a_1$，于是曲线 L 的参数方程是

$$s=\frac{1}{2}\left(a_1-\frac{\cos^2\varphi}{a_1}\right),\quad \sigma=\frac{1}{2}\left(a_1\tan\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2a_1}\right),$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. 从第一个方程看出：$L$ 位于在 $s=a'=\frac{1}{2}\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)$ 与 $s=a''=\frac{1}{2}a_1$ 之间的那个带形内，且当 $\varphi\to\pm\frac{\pi}{2}$ 时有垂直的渐近线. 第二个方程显示：当 φ 自 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，σ 自 $-\infty$ 变到 ∞，且只有在 a_1 充分大时(这可以在不失一般性下假设的)方可能是单调的. 因此，曲线 L 具有在图 182 中所示的形状.

在作代换 $p=\frac{1}{2}\left(p_1-\frac{1}{p_1}\right)$，$p_1=p+\sqrt{p^2+1}$ 后，关系式(5)变成

$$J_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{pt}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})^n} \tag{6}$$

(我们仍写 t 替代 τ). 由于被积函数只在点 $\pm i$ 处有奇点(分支点)，且曲线 L 具有在图 182 中所示的形状，故我们可用直线 $\operatorname{Re}p=a''>0$ 来替代 L，而不改变积分的数值. 回忆起反演公式，我们得出圆柱函数的像

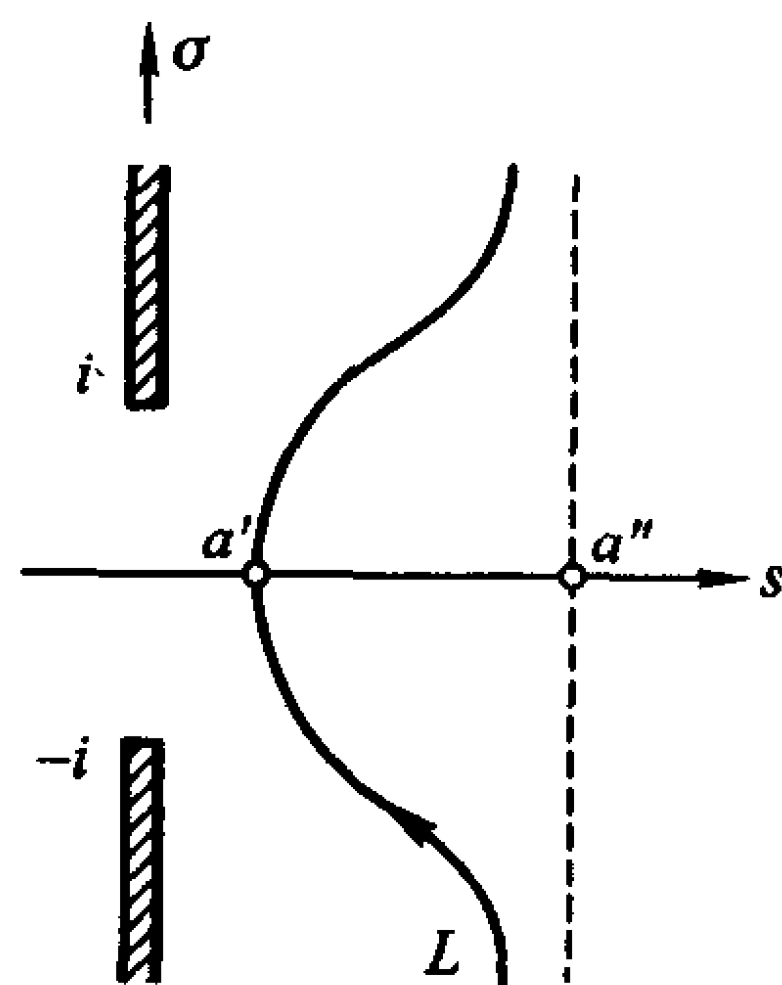


图 182

$$J_n(t)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})^n}=\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{7}$$

特别，对于零阶的圆柱函数有

$$J_0(t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{8}$$

对于一类重要的像函数 $F(p)$,容易得到像原函数的级数展开式,其项对应于像的奇点.

也就是下列定理成立.

XIII. 第二展开定理 设函数 $F(p)$:1) 在某个半平面 $\operatorname{Re} p > s_0$ 中是亚纯的和正则的;2) 存在圆周族 $C_n: |p| = R_n, R_1 < R_2 < \cdots < R_n \to \infty$,在这一族上 $F(p)$ 关于 $\arg p$ 一致收敛于 0;3) 对于任何 $a > s_0$,积分 $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$ 绝对收敛.于是 $F(p)$ 的像原函数是(乘以 $\eta(t)$ 的)函数

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname*{res}_{p_k} F(p)e^{pt}, \tag{9}$$

其中留数的和是按函数 $F(p)$ 的所有奇点 p_k 以它们的模的非降次序取的.

事实上,在所考虑的条件下可利用第 79 目中的定理 4*,根据那个定理 $F(p)$ 是函数

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp \tag{10}$$

的像.

用 C'_n 表示圆周 C_n 在直线 $\operatorname{Re} p = a$ 的左边的部分,用 $a \pm ib$ 表示 C_n 与这条直线的交点,并且用 Γ_n 表示由线段 $(a - ib_n, a + ib_n)$ 与 C'_n 所组成的闭周线,而且以逆时针方向通过的.因为按若尔当引理,当 $t < 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C'_n} e^{pt}F(p)dp = 0,$$

所以在 $t > 0$ 时代替(10)可以写

$$f(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} e^{pt}F(p)dp. \tag{11}$$

应用柯西留数定理,我们得出

$$f(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{(\Gamma_n)} \operatorname*{res}_{p_k} F(p)e^{pt},$$

其中和是按函数 $F(p)$ 的位于 Γ_n 内部的所有奇点取的,而这也就是需要的结果.

推论 如果函数 $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ 是一个有理分式函数,并且分子中多项式 $A(p)$ 的次数低于分母中多项式 $B(p)$ 的次数,那么它的像原函数是(乘以 $\eta(t)$ 的)函数

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k - 1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\{F(p)(p-p_k)^{n_k}e^{pt}\}, \tag{12}$$

---

* 在这里当 $p\to\infty$ 时 $F(p)\to 0$,只是按照某个圆周族,这没有给本定理的证明带入实质性的改变.

其中 p_k 表示 $F(p)$ 的极点，而 n_k 是它们的重数并且和数是按所有极点取的.

事实上，$F(p)$ 是像，是直接从拉普拉斯变换的线性性质和根据有理分式函数分解成最简单分数的定理（第 80 目中公式(11)）推出（见第 71 目）. 公式(11)的正确性由若尔当引理推出，因为 $p\to\infty$ 时 $F(p)\to 0$，引理是可用的，因此公式(9)也成立，在公式(9)中用有限和代替级数. 余下的事是利用第 23 目中的在极点处计算留数的公式，我们也就得出所要求的公式(12).

特别，如果 $F(p)$ 的所有极点都单极点，那么公式(12)就简化为：

$$\frac{A(p)}{B(p)} \doteq \sum_{k=1}^{l} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \tag{13}$$

（我们利用在单极点上计算留数的公式. 在右边部分中的因子 $\eta(t)$ 我们根据所采用的条件可舍掉）.

在应用（主要在电工技术应用）中这个公式的一种变形是重要的，这种变形是与有形状如 $F(p)=\dfrac{A(p)}{pB(p)}$ 的像的情形有关的，其中 $A(p)$ 的幂次不高于 $B(p)$ 的幂次，并且 $B(p)$ 有不同于 0 的单根. 在这情况下代替(13)，显然，我们有

$$\frac{A(p)}{pB(p)} \doteq \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^{l} \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t}, \tag{14}$$

其中和是按 $B(p)$ 的全部根来取的.

注 1 如果多项式 $B(p)$ 有实系数，则对于它的每一个复数根 p 有一个复数共轭根 $\bar{p}$. 事实上，

$$B(\bar{p}) = a_0(\bar{p})^n + a_1(\bar{p})^{n-1} + \cdots + a_n = \overline{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n} = \overline{B(p)} = 0.$$

此外，如果多项式 $A(p)$ 也有实系数，那么

$$\frac{A(\bar{p})}{B'(\bar{p})} e^{\bar{p}t} = \overline{\frac{A(p)}{B'(p)} e^{pt}}.$$

并且，因此对根 $p=p_k$ 和 $p=\bar{p}_k$ 计算的表达式 $\dfrac{A(p)}{B'(p)}e^{pt}$ 的和将等于 $2\mathrm{Re}\,\dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$.

由此得出，如果多项式 $A(p)$ 和 $B(p)$ 有实系数，则公式(13)可以表示成形状

$$\frac{A(p)}{B(p)} \doteq \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + 2\mathrm{Re} \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \tag{15}$$

其中第一个和遍及到 $B(p)$ 的全部实根，而第二个和遍及到带有正虚部的全部复根.

注 2 公式(13)的对应于根 $p_k = s_k + i\sigma_k$ 的每一项可以表示成复振动形式中所写的

$$\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{s_k t} \{\cos \sigma_k t + i \sin \sigma_k t\}.$$

由此清楚，对应于实根（$\sigma_k=0$）的是非周期振动，对应于带有负实数部分 s_k 的复数根的是阻尼振动，对应于纯虚根（$s_k=0$）的是调和振动. 如果所考虑的系统不容许具有无限增长的振幅，正的实根或者带有正实数部分的复数根一般不可能存在.

对于这些系统容易写出与稳定状态相对应的振动,

$$f(t)=2\mathrm{Re}\sum\frac{A(i\sigma_k)}{B'(i\sigma_k)}e^{i\sigma_k t}\tag{16}$$

其中求和遍及到带有正虚部的所有纯虚根 $p_k=i\sigma_k$*. 事实上,在我们的假设条件下所有根的实部是非正的,$s_k\leqslant 0$,而对应于负 s_k 的振动的振幅按指数法则趋向于 0,并且不进入稳定状态.

应用展开定理的例子,我们举出在下面一些目中.

83. 例 补充 在本目中我们将引入一系列关系式和定理,它们在用算子法作业时很有益处.

(1) 极限关系 如果 $f(t)$ 与自己导数 $f'(t)$ 一起是像原函数**且 $F(p)\doteqdot f(t)$,那么

$$\lim_{p\to\infty}pF(p)=f(0),\tag{1}$$

其中在角 $|\arg p|<\frac{\pi}{2}-\delta$ 内部 $p\to\infty$,并且 $f(0)=\lim\limits_{t\to+0}f(t)$. 此外,如果存在 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=f(\infty)$,则

$$\lim_{p\to 0}pF(p)=f(\infty).\tag{2}$$

其中 $p\to 0$ 在同一角内部.

事实上,关系式(1)直接由 $pF(p)\to f(0)$ 是由 $f'(t)$ 的像推出的,也就意味着,根据第 79 目中的注在 $p\to\infty$,$|\arg p|<\frac{\pi}{2}-\delta$ 时趋向于 0,为了证明关系式(2),我们注意到,由 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 的存在推出函数 $f(t)$ 的有界性. 因此,可以取 $s_0=0$ 和 $F(p)$ 定义在半平面 $\mathrm{Re}\,p>0$ 内. 按照拉普拉斯变换公式,对于任何 p,$\mathrm{Re}\,p>0$,我们得出

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=pF(p)-f(0).$$

因为在 $p=0$ 时左边部分的积分存在,而在角 $|\arg p|<\frac{\pi}{2}-\delta$ 内它关于 p 一致收敛,所以在后一关系式中当在此角内 $p\to 0$ 时可以趋向极限,并且在极限时

$$\int_0^\infty f'(t)dt=\lim_{p\to 0}pF(p)-f(0)$$

这与(2)等价.

关系式(1)与(2)对检验用算子法进行的计算是有益的. 例如由第 80 目中的公式(22),在 $\lambda>0$ 时我们得出 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\lambda t}\sin\omega t=\lim\limits_{p\to 0}\frac{p\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}=0$. 由(16)式: si 0 =

* 如果 $B(0)=0$,在(16)式中还进入了常数项 $\frac{A(0)}{B'(0)}$.

** 这个限制条件的加入只是为了让证明简单,但是它不是负担过重的,并且在实际中通常是满足的.

$\lim\limits_{p\to\infty}\operatorname{arccot} p=0$. 由(18)式：$f(0)=\lim\limits_{p\to\infty}\frac{A}{2}\left(1+\operatorname{cth}\frac{p\tau}{2}\right)=A$ 等等.

(2) 分数幂的像 按欧拉的 Γ 函数的定义，对于任一个 $a>-1$ 有：

$$\Gamma(a+1)=\int_0^{\infty} t^a e^{-t}dt$$

(参看第 74 目例 8). 设 $p=re^{i\alpha}$ 是右半平面$\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$上的任意复数. 在上面这个积分中，引入复数的积分变量 $q=\frac{t}{p}$ 来替代 t，得到

$$\Gamma(a+1)=p^{a+1}\int_L q^a e^{-pq}dq,$$

其中积分路线沿着射线 $L:\arg q=-\alpha$ 来取. 在圆弧 $C_R:|q|=R,-\alpha<\arg q<0$ 上，令 $q=Re^{i\varphi}$，于是有

$$\left|\int_{C_R} q^a e^{-pq}dq\right|\leqslant R^a\left|\int_{-\alpha}^{0} e^{-rR\cos(\alpha+\varphi)}Rd\varphi\right|.$$

由于在这里 $\alpha+\varphi$ 是在 0 与 α 之间变化的，故 $\cos(\alpha+\varphi)$保持大于某一个正的常数. 因此，当 $R\to\infty$时，沿 C_R的积分趋于 0. 还考虑到：在 L 与平面q 的实轴之间，没有被积函数的奇点，我们可用沿正半轴的积分来代替沿 L 的积分. 重新用 t 来表示积分变量，得出

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}=\int_0^{\infty} t^a e^{-pt}dt. \tag{3}$$

当 $a\geqslant 0$ 时，函数 $f(t)=t^a$(乘以 $\eta(t)$后)是个像原函数，因此方程(3)与算子关系式

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}\doteqdot t^a \tag{4}$$

等价. 所得出的公式把第 80 目的关系式(11)推广到任意的正数次幂(当 $a=n$ 是非负整数时，$\Gamma(a+1)=n!$).

当 $-1<a<0$ 时，函数 t^a 在 $t\to 0$ 时无限增大，所以它不满足加在像原函数上的条件. 可是对于这样的值 a 来说，(3)式的右端的那个积分是收敛的，因而这公式依然成立. 所以可以说：当 $-1<a<0$ 时，函数 t^a 是“奇异的”像原函数，而函数$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$是它的“奇异的”像.

特别，当 $a=-\frac{1}{2}$时有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^{\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$

(我们令 $t=u^2$，且利用第 70 目中已知的值 $\operatorname{erf}\infty=1$)，因而公式(4)给出

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p}}. \tag{5}$$

(3) 我们将引入一些在应用上时常遇到的含有$\sqrt{p}$的运算关系式. 像$\dfrac{1}{p+\sqrt{p}}$可表为形式$\dfrac{1}{\sqrt{p}}F(\sqrt{p})$,其中$F(p)=\dfrac{1}{p+1}\doteqdot e^{-t}$. 按第 81 目的公式(11)因此有:

$$\frac{1}{1+\sqrt{p}}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\left(\tau+\frac{\tau^2}{4t}\right)}d\tau.$$

在积分号下的幂指数中配完全平方$\tau+\dfrac{\tau^2}{4t}=\left(\dfrac{\tau}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)^2-t$,且令$\dfrac{\tau}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}=x$, $d\tau=2\sqrt{t}dx$,求得

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{p}}\doteqdot\frac{e^t}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)^2}d\tau=e^t\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{t}}^\infty e^{-x^2}dx.$$

引入通常用的记号(参看第 70 目(5)),最后得

$$\frac{1}{p+\sqrt{p}}\doteqdot e^t\,\mathrm{Erf}(\sqrt{t}).\tag{6}$$

由此,再利用公式(5)便求得

$$\frac{1}{1+\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{p+\sqrt{p}}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^t\,\mathrm{Erf}(\sqrt{t}).\tag{7}$$

其次

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p}=\frac{p+\alpha}{p\sqrt{p+\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}+\frac{\alpha}{p\sqrt{p+\alpha}}.$$

按位移定理从(5)得

$$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}\doteqdot e^{-\alpha t}\frac{1}{\sqrt{\pi t}},\tag{5'}$$

因而按像原函数的积分定理有

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}\doteqdot\int_0^t e^{-\alpha\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\alpha t}}e^{-x^2dx}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha t})\tag{8}$$

(我们令 $\alpha\tau=x^2$). 结果得出

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}+\sqrt{\alpha}\,\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha t}).\tag{9}$$

最后,从第 82 目的公式(8)借助于相似定理得

$$J_0(i\beta t)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p^2-\beta^2}}.$$

纯虚变元的贝塞尔函数 $J_0(it)$可用特殊记号 $I_0(t)$来表示. 利用这记号且在上面这公式里用 $p+\alpha$ 替代 p,按位移定理得

$$\frac{1}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\beta^2}}\doteqdot e^{-\alpha t}I_0(\beta t).\tag{10}$$

(4) 菲涅耳积分的像 按照这些积分的定义有(参看第 73 目例 6)

$$C(t)=\int_0^t\frac{\cos t dt}{\sqrt{2\pi t}},\quad S(t)=\int_0^t\frac{\sin t dt}{\sqrt{2\pi t}}.$$

我们不考虑它们而考虑积分$\int_0^t e^{it}\dfrac{dt}{\sqrt{2\pi t}}$. 按公式(5)与位移定理有 $e^{it}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\doteqdot\dfrac{1}{\sqrt{2(p-i)}}$,由此按像

原函数的积分定理有

$$\int_0^t e^{it}\frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} \doteqdot \frac{1}{p\sqrt{2(p-i)}}.$$

类似地，求得

$$\int_0^t e^{-it}\frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} \doteqdot \frac{1}{p\sqrt{2(p+i)}}.$$

由此按线性性质立刻得

$$C(t) \doteqdot \frac{1}{2p\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{p+i}}+\frac{1}{\sqrt{p-i}}\right)=\frac{1}{2p\sqrt{2}}\frac{\sqrt{p+i}+\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}} \tag{11}$$

与

$$S(t) \doteqdot \frac{1}{2pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}-\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=\frac{1}{2pi\sqrt{2}}\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}} \tag{12}$$

(5) 相似定理可写成下列形式：

$$F(\alpha p)=\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-pt}dt,$$

对于 α 自 0 到 1 求积分，得

$$\int_0^1 F(\alpha p)d\alpha=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\alpha}$$

（假定可以交换积分的顺序）. 这等式就是

$$\int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\alpha} \doteqdot \int_0^1 F(\alpha p)d\alpha.$$

在左端的积分中引入新变量 $\tau=\frac{t}{\alpha}$，而在右端引入新变量 $q=\alpha p$，得

$$\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^p F(q)dq. \tag{13}$$

我们来引入公式(13)的应用的一些例子. 首先，从公式 $\cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}$ 可得到积分余弦的像(见第 70 目)：

$$\mathrm{Ci}\ t=-\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^p \frac{q\,dq}{1+q^2}=\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{14}$$

从公式 $e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p+1}$ 得出

$$-\mathrm{Ei}(-t)=\int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^p \frac{dq}{q+1}=\frac{1}{p}\ln(1+p) \tag{15}$$

（见第 76 目公式(8)），从公式 $J_0(t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ 得出

$$\int_t^\infty \frac{J_0(t)}{t}dt \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{p}\ln(p+\sqrt{1+p^2}). \tag{16}$$

所有在公式(14)－(16)中的像原函数都是奇异的，因为当 $t\to 0$ 时左端的积分发散.

注 从像原函数与像函数的积分定理有

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_p^\infty F(q)dq.$$

将这同(13)相加就有

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^\infty F(q)dq.$$

在最后这个关系式中,左右两端的积分都是常数,因此这关系式具有 $A \doteqdot \frac{B}{p}$ 的形式. 比较它与关系式 $1 \doteqdot \frac{1}{p}$,按拉普拉斯变换的唯一性定理,推得:$A=B$. 由此我们得到

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau = \int_0^\infty F(q)dq. \tag{17}$$

(6) 分数指数法则 第 82 目中的第一展开定理可推广到广义幂级数(参看第 25 目). 我们将限制于下面的简单而在实用上很重要的情形.

定理 设当 $p\to\infty$,$\mathrm{Re}\,p<a$ (a 是某一个正数)时 $F(p)\to 0$,且 $F(p)$在有限的 p 平面上除了坐标原点 $p=0$ 以外没有任何其他奇点,而坐标原点是有限阶的支点. 于是,如果 $F(p)$的广义幂级数展开式具有形式

$$F(p)=p^\alpha\sum_{k=0}^\infty c_k p^{k\beta}, \tag{18}$$

其中 β 是正的有理数,则 $F(p)$的像原函数(乘以 $\eta(t)$)是级数

$$f(t)=\frac{1}{t^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{\Gamma(-\alpha-k\beta)}\frac{1}{t^{k\beta}}, \tag{19}$$

其中去掉所有的具有非负的整数 $\alpha+k\beta$ 的各项.

考虑由下述曲线组成的闭周线 $C_{R,r}^*$:线段$(a-ib,a+ib)$. 圆周$|p|=R$,$\mathrm{Re}\,p<a$ 的弧C'_R与C''_R,沿 $-R<p<-r$ 的割痕的两岸 Ⅰ,Ⅱ 和圆周 c_r:$|p|=r$ (参看图 181).

由于 $F(p)$ 在这周线内部是解析的与单值的(为确定起见,我们设 $\left(-\frac{\pi}{2}<\arg p<\frac{\pi}{2}\right)$,按柯西定理,沿线段$(a-ib,a+ib)$的积分可用在周线上其余部分的积分来替代. 此外,由于当 $t>0$ 时,按若尔当引理,$F(p)e^{pt}$沿 $C'_R+C''_R$的积分当$R\to\infty$时趋于 0,故反演公式可写成如下形式

$$f(t)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R,r}^*}F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^*}F(p)e^{pt}dp,$$

其中 C_r^* 是由沿 p 的负半轴的割痕 $-\infty<p<-r$ 的两岸以及圆周$|p|=r$ 所组成的周线(没有点 $p=-r$). 在最后这个公式中,以 $F(p)$的展开式(18)代入,且逐项求积分*,得

* 严格说来,对于级数沿无限直线的逐项求积分的可能性需要附加条件. 例如,充分条件是:级数和 $\sum_{k=0}^\infty |c_k||p|^{k\beta}$ 沿C_r^* 的积分的收敛性(参看 Г. Ватсон[16]).

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^*}p^{\alpha+k\beta}e^{pt}dp\right\}.$$

引入新的积分变量 $\zeta=pt$. 由于 $t>0$,故这代换不改变周线的形状,因而得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^*}p^{\alpha+k\beta}e^{pt}dp=\frac{1}{t^{\alpha+k\beta+1}}\int_{C_n^*}\zeta^{\alpha+k\beta}e^{\zeta}d\zeta=\frac{1}{t^{\alpha+k\beta+1}}\frac{1}{\Gamma(-\alpha-k\beta)}$$

(参看汉克尔的Γ函数的积分表示——第74目的公式(15)). 将这结果代入前述的公式中,我们便得出所求的展开式(19). 如果 $\alpha+k\beta$ 是非负的整数,则 $p^{\alpha+k\beta}e^{pt}$ 沿 C_r^* 的积分等于0,因此从我们的展开式中应去掉所有具有这种 $\alpha+k\beta$ 的各项*.

注 如同在第一展开定理中一样,级数(19)可由逐项应用幂的像公式

$$p^{\alpha}\doteqdot\frac{1}{\Gamma(-\alpha)t^{\alpha+1}}$$

于级数(18)而形式地得出. 可是这公式只对于负的 α 被证明过,对于 $\alpha>0$ 它具有假定的性质. 此外,还要注意到:一般地说,级数(19)的和不满足条件3). 因此是奇异的像原函数.

例 假设

$$F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\sqrt{p}(i-1)}.$$

令 $p=Re^{i\varphi}$, $i-1=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$. 当 $\mathrm{Re}\,p<0$, 即 $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ 时,有 $\mathrm{Re}\sqrt{p}(i-1)=\sqrt{2R}\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{3}{4}\pi\right)<0$,因为这时 $\pi<\frac{\varphi}{2}+\frac{3}{4}\pi<\frac{3}{2}\pi$. 此外,对于大的 $\mathrm{Im}\,p$ 与 $0<\mathrm{Re}\,p<a$,将有 $\varphi\approx\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\pi$,因此 $\sqrt{p}(i-1)\approx-\sqrt{2R}$ 或 $-i\sqrt{2R}$. 从所有这些可推得:若 $p\to\infty$, $\mathrm{Re}\,p<a$,则 $F(p)\to0$. 就是说, $F(p)$ 满足分数指数法则的条件. 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\sqrt{p}(i-1)}=\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\sqrt{2p}e^{\frac{3\pi}{4}i}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{3k\pi}{4}i}}{k!}2^{\frac{k}{2}}p^{\frac{k-1}{2}}.$$

形式地变到像原函数,且只留下所有的使 $\frac{k-1}{2}$ 不是整数的各项,即具有偶数 $k=2n$ 的各项,得出

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\sqrt{p}(i-1)}\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{(2n)!}2^n\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)t^{n+\frac{1}{2}}}.$$

在下一章中将证明

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}$$

(参看第89目公式(19)). 注意到这个,并以形式 $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)2^n n!$ 替代 $(2n)!$,就有

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\sqrt{p}(i-1)}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2t}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{\frac{i}{2t}},$$

或

---

* 这也可以从整函数 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 在点 $z=0,-1,-2,\cdots$ 具有零点而推得(参看第七章第89目).

$$\frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}+i\frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}+i\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}.$$

由此得出

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}. \tag{20}$$

(7) 冲击函数　如果函数 $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$ 已经是奇异的像,则函数 $F(p)=1,p,p^2,\cdots$,即使它们当 $p\to\infty$ 时不趋于 0,也可以仅在完全有条件意义下认为是像.这些有条件的像以及与之对应的像原函数——所谓脉冲函数——是由狄拉克引入的,而且在必须与瞬息震动的特征的量有关的许多实用问题中,显得很有用.

考虑函数 $\delta_h(t)$:

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } t<0,t>h,\\ \frac{1}{h}, & \text{当 } 0<t<h.\end{cases}$$

它的图像表示在图 183 中.这函数代表一个只作用在线段$(0,h)$上的量,在这线段上它具有常数值$\frac{1}{h}$,它的作用的总效应等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(t)dt=\int_0^h\frac{dt}{h}=1.$$

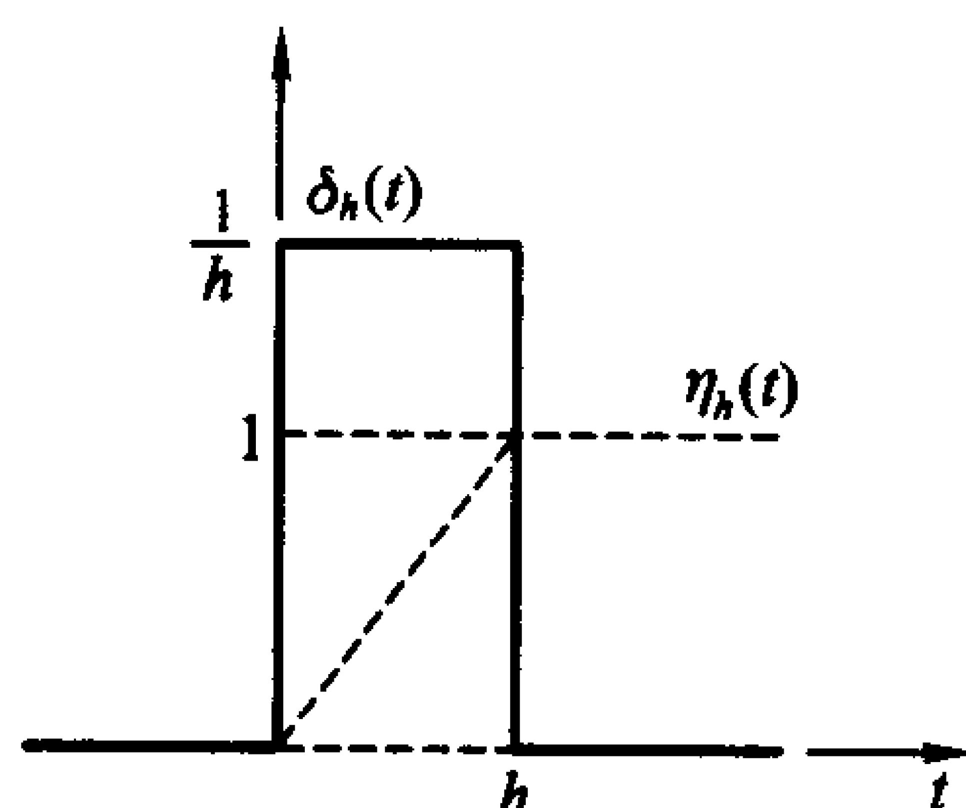


图 183

现在假定 $h\to 0$.显然,函数族 $\delta_h(t)$这时是发散的,但是我们将引入一个约定的函数 $\delta(t)$,它将被认为是这族函数的极限

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\delta_h(t),$$

并且把它叫做 0 **阶的脉冲函数**,或简称为 δ **函数**.脉冲函数 $\delta(t)$除了在点 $t=0$ 处等于∞之外,处处都等于 0.我们假设关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

依然成立,它是对于函数 $\delta_h(t)$的同一关系式的极限.

因此,δ 函数是代表一种完全确定的极限过程的简明的约定记号.这种极限过程常常在物理学中被考虑的:无穷大的量作用在无穷小的间隔上,其作用的总和效应等于 1.这种函数的引入有力地简化了与这种极限过程有关的计算:替代"在取极限前先完成计算,再在最后的结果中取极限"这样的计算过程,改为"在计算前立刻先取极限".在大多数的物理问题里,这种安排的合法性是完全可以被证明的.

我们约定认为:δ 函数的像是作为函数$\delta_h(t)=\frac{1}{h}[\eta(t)-\eta(t-h)]$的像的极限得出的,而 $\delta_h(t)$的像按滞后定理等于

$$\delta_h(t)\doteqdot\frac{1-e^{-ph}}{ph}.$$

取 $h\to 0$ 时的极限，得出(约定地)

$$\delta(t)\doteqdot\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-ph}}{ph}=1. \tag{21}$$

关系式(21)还可用下面的论断来"加以证实". 在图 183 中，虚线表示函数 $\delta_h(t)$ 的积分

$$\eta_h(t)=\int_0^t \delta_h(t)dt$$

的图像. 从这图像看出：当 $h\to 0$ 时 $\eta_h(t)$ 趋于单势函数 $\eta(t)$，因此我们令

$$\int_0^t \delta(t)dt=\eta(t).$$

于是便有 $\delta(t)=\eta'(t)$，且由于 $\eta(t)\doteqdot\frac{1}{p}$，故按像原函数的微分定理，我们重新得到

$\delta(t)\doteqdot p\cdot\frac{1}{p}=1$ （参加到这定理中的像原函数在 $t=0$ 的值，我们认为在那"底"上等于 0，它是作为由值 $\eta_k(0)=0$ 在 $h\to 0$ 时的极限值得到的. 所指出的定理的形式上应用，在定理中应当令 $\eta(0)=\lim_{t\to+0}\eta(t)=1$，这导出了不正确的结果. 不应该对此感到惊奇，因为我们是在它的条件被破坏的情况下应用定理的）.

其次，对于满足第 79 目的条件 1)的任一函数 $\varphi(t)$，按中值定理得

$$\int_0^\infty \varphi(t)\delta_h(t)dt=\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t)dt=\varphi(t^*),$$

其中 $0<t^*<h$. 取 $h\to 0$ 时的极限，按定义认为

$$\int_0^\infty \varphi(t)\delta(t)dt=\varphi(0) \tag{22}$$

（如若 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，则 $\varphi(0)$ 表示它的右极限值）. 与此对应，重新得到

$$\delta(t)\doteqdot\int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}dt=1.$$

算子法的基本法则可推广到 δ 函数，例如，滞后定理给出

$$\delta(t-\tau)\doteqdot e^{-p\tau}$$

$\left(\text{这同按照(22)得出的}\int_0^\infty \delta(t-\tau)e^{-pt}dt=e^{-p\tau}\text{相符合}\right)$，乘积定理给出

$$1\cdot F(p)\doteqdot\int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t)$$

（这也是正确的）.

类似地，我们可引入高阶的脉冲函数. 例如，考虑函数

$$\delta_h^{(1)}(t)=\frac{1}{h^2}[\eta(t)-2\eta(t-h)+\eta(t-2h)]$$

（图 184）. 它当 $h\to 0$ 时的"极限"是

$$\delta_1(t)=\lim_{h\to 0}\delta_h^{(1)}(t),$$

我们将称它做**一阶脉冲函数**.我们设它的像是像

$$\delta_h^{(1)}(t) \risingdotseq \frac{1-2e^{-hp}+e^{-2hp}}{h^2 p}$$

的极限,亦即,

$$\delta_1(t) \risingdotseq \lim_{h\to 0}\frac{1-2e^{-hp}+e^{-2hp}}{h^2 p} = p. \tag{23}$$

函数 $\delta_h^{(1)}(t)$ 的第二次积分

$$\eta_k^{(1)}(t) = \int_0^t dt\int_0^t \delta_h^{(1)}(t)dt$$

的图像在图 184 中用虚线表出.从图中可看出:当 $h\to 0$ 时 $\eta_h^{(1)}(t)$ 趋于单势函数 $\eta(t)$.我们按定义设

$$\int_0^t dt\int_0^t \delta_1(t)dt = \eta(t), \quad \delta_1(t) = \eta''(t),$$

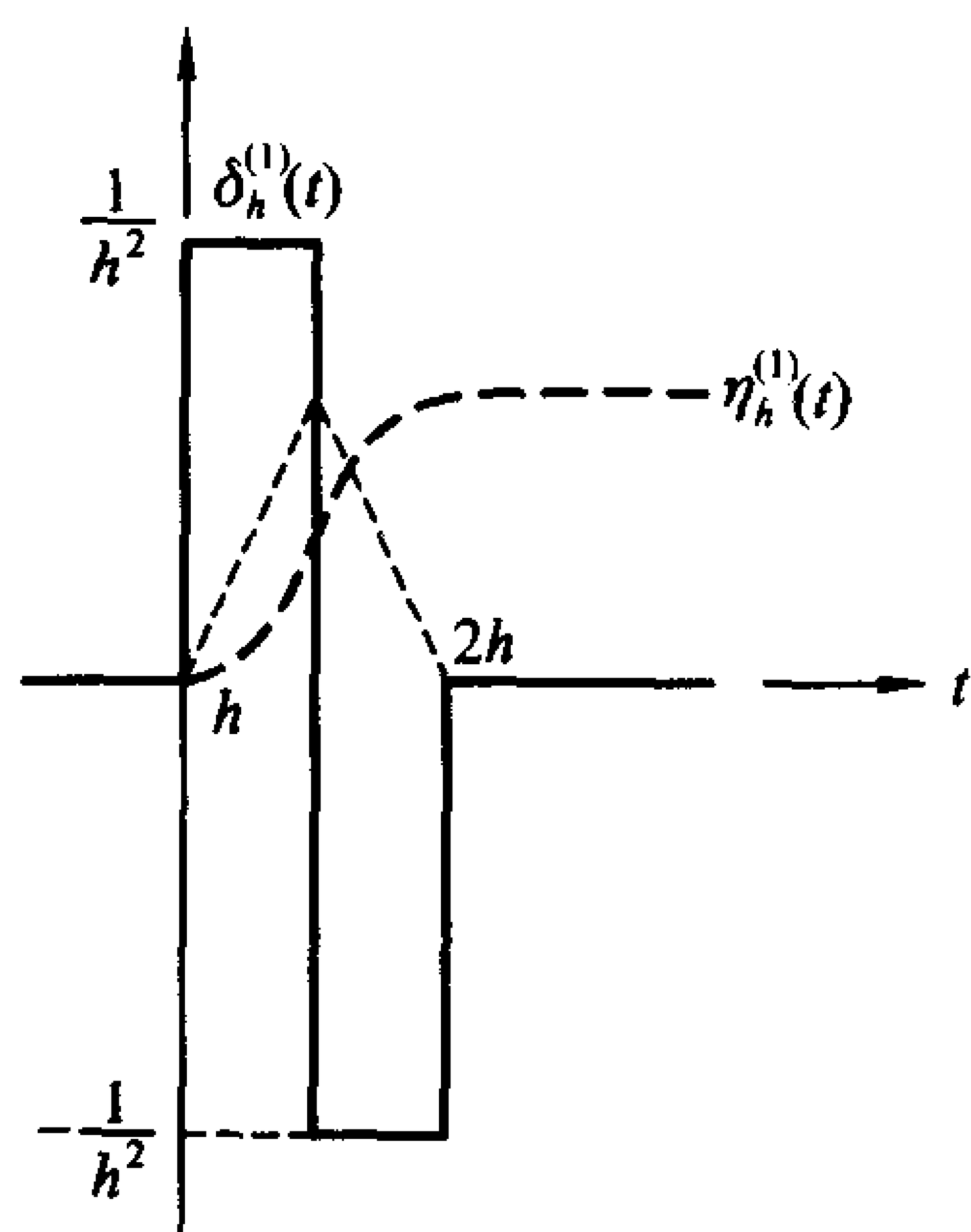


图 184

因而得到 $\delta_1(t)\risingdotseq p^2\frac{1}{p}=p$,与(23)相符合.

完全同样地,我们可视幂 p^n 的"像原函数"为 **n 阶脉冲函数**

$$\delta_n(t)\risingdotseq p^n, \quad \delta_n(t)=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\eta(t). \tag{24}$$

脉冲函数的应用的例子将于后面举出.

(8) 广义函数 在我们的时代脉冲函数在所谓的广义函数论中获得了严格的理论根据,这理论的发端应归功于索波列夫和法国数学家施瓦茨(L. Schwarz)的工作,我们大略描述这一理论的某些基本原理,特别地引进上面第(7)部分中的近似讨论的严格版本.详细的叙述可以看,譬如,И. М. Гельфанд 和 Г. Е. Шилов 的书[14]和 П. Швард 的书[15].

理论的主要思想是从函数过渡到给出在某个函数空间中的泛函,这些函数称为基本函数.最常用的空间是由在整个轴上无穷可微,且其中每一个在某一有限线段(依赖于函数)外面转变为 0 的,全体实变量 t 的复函数 $\varphi(t)$ 组成.这空间的函数序列 φ_n 称为收敛于 0 ($\varphi_n\to 0$),如果所有 φ_n 在一个线段外面都转变为 0,而在这线段上 $\varphi_n(t)\to 0$ 与所有各阶导数一起是一致的.这个基本函数的空间我们将用字母 $\mathscr{A}$ 表示.

集合 $\mathscr{A}$ 上的连续线性泛函 f 称为 **$\mathscr{A}^*$ 类的广义函数**,亦即一个映射,对于每一个函数 $\varphi\in\mathscr{A}$ 这映射用一个复数 (f,φ) 来比拟它,并且满足

1) **线性性质** 对任何复数 α_1,α_2 和任何函数 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{A}$, $(f,\alpha\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(f,\varphi_1)+\alpha_2(f,\varphi_2)$.

2) **连续性质** 对于任何序列 $\varphi_n\in\mathscr{A}$,在上面所采用的定义的涵义下它收敛于 0.复数序列 $(f,\varphi_n)\to 0$.

特别,任何一个定义在整个 t 轴上的普通函数 $f(t)$,且在每一个有限区间上可

积,按照规则

$$(f,\varphi)=\int f(t)\varphi(t)dt \tag{25}$$

定义一个广义函数 f.(如果沿整个直线取积分,或者同样沿一个线段取积分,而在这线段外面 $\varphi=0$, 不再写出积分限). 可以证明,对于两个这样的普通函数 $f(t)$ 和 $g(t)$,泛函(25)重合,即对一切 $\varphi\in\mathscr{K}$ 有 $(f,\varphi)=(g,\varphi)$,那么 $g(t)$ 不同于 $f(t)$ 只是非本质的(例如只在个别一些点上的值不同). 因此我们可以认为,泛函 f 表示函数 $f(t)$,即把普通函数看作广义的. δ 函数也是广义函数,这个函数严格定义为一个泛函,它把每一个函数 $\varphi\in\mathscr{K}$ 比拟为它在点 $t=0$ 的值:

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0) \tag{26}$$

(比较公式(22)).

广义函数不是函数,而是泛函,因此它在一点上的值没有意义,但是人们说广义函数在点 t_0 的邻域内等于 0,如果对于仅在这邻域范围内不同于 0 的一切基本函数 φ, $(f,\varphi)=0$. 这样的点 t_0 的全体称为广义函数 f 的**载体**,在 t_0 的任何邻域内 f 都不等于 0. 特别,对于普通函数 $f(t)$,载体与 $f(t)\neq0$ 的点 t 的集合的闭集重合. 显然,δ 函数在任何点 $t_0\neq0$ 的邻域内等于 0,所以它的载体是点 $t=0$.

广义函数的加法自然定义为:对一切 $\varphi\in\mathscr{K}$, $(f+g,\varphi)=(f,\varphi)+(g,\varphi)$. 但是把它们相乘在一般情况下是不能的,只可以定义广义函数乘以无穷可微函数的积. 这可以借助下面的方法做:对于普通函数 $f(t)$ 和无穷可微函数 $\alpha(t)$ 我们有

$$(\alpha f,\varphi)=\int\alpha(t)\cdot f(t)\varphi(t)dt=(f,\alpha\varphi)$$

(我们可以把因子 α 搭在基本函数上,因为由于 $\alpha(t)$ 的无穷可微性 $\alpha\varphi\in\mathscr{K}$),并且这个性质在一般情况下可取作定义:泛函 αf 称为广义函数 f 乘以无穷可微函数 $\alpha(t)$ 的积,它按规则

$$(\alpha f,\varphi)=(f,\alpha\varphi) \tag{27}$$

作用于函数 $\varphi\in\mathscr{K}$.

广义函数的优越性在它们微分时特别明显地表现出来. 这样一来,没有必要对导数存在作预先声明——*任何广义函数是无穷可微的*.

这个有益的性质直接从导数的定义推出,在定义中使用同一个搭在基本函数上的方法. 也就是,对于普通连续可微函数 $f(t)$ 我们有

$$(f',\varphi)=\int f'(t)\varphi(t)dt=f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int f(t)\varphi'(t)dt=-(f,\varphi')$$

(非积分项消失,因为 $\varphi(t)$ 在有限区间外面等于 0). 在一般情况把这个取作定义:在空间 $\mathscr{K}$ 上泛函 f' 称做广义函数 f 的**导数**,这泛函按规则

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi')^{*} \tag{28}$$

作用于基本函数 φ.

例 1 对于单势函数 $\eta(t)$,导数

$$(\eta',\varphi)=-(\eta,\varphi')=-\int_0^\infty \varphi'(t)dt=\varphi(0),$$

因为 $\varphi(\infty)=0$,所以 $\eta'=\delta$ (与 419 页上所述比较).

例 2 设普通函数 $f(t)$除点 $t=0$ 以外处处连续可微,而在这一点上它有跃度为 $h=f(+0)-f(-0)$的第一类间断点.在广义函数论意义下它的导数

$$\begin{aligned}(f',\varphi)&=-\int_{-\infty}^0 f(t)\varphi'(t)dt-\int_0^\infty f(t)\varphi'(t)dt\\&=-f\varphi\Big|_{-\infty}^0-f\varphi\Big|_0^\infty+\int f'(t)\varphi(t)dt\\&=\int f'(t)\varphi(t)dt+h\varphi(0)\end{aligned}$$

由此可见,$f'=f'_{经}(t)+h\delta$,其中左边是广义函数意义下的导数,而右边 $f'_{经}(t)$是经典导数(在 $t\neq0$下处处有定义的)和 δ 函数乘以 $f(t)$的跃度.这个例子是前面 $f'_{经}(t)=0$ 和 $h=1$ 情形的拓广.

例 3 δ 函数的导数$(\delta',\varphi)=-(\delta,\varphi')=-\varphi'(0)$,并且一般 n 阶导数$(\delta^{(n)},\varphi)=(-1)^n\varphi^{(n)}(0)$.显然,$\delta^{(n)}=\eta^{(n+1)}$(与公式(24)比较).

进一步,广义函数序列 f_n称为**收敛于**广义函数f,如果对于任何函数 $\varphi\in\mathscr{A}$

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi)=(f,\varphi) \tag{29}$$

(这里指的是复数序列的极限).广义函数组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$称为**收敛**的,如果它的部分和 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k$的序列在前面定义的意义下收敛.

例 1 普通函数序列 $\delta_n(t)$,$\delta_n(t)$在区间$\left(0,\frac{1}{n}\right)$上等于$n$ 和区间外面等于 0,在经典意义下是发散的,但是根据中值定理

$$(\delta_n,\varphi)=n\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi(t)dt=\varphi(\xi_n),$$

其中 $\xi_n\in\left(1,\frac{1}{n}\right)$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}(\delta_n,\varphi)=\varphi(0)$.由此可见,在广义函数意义下$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n(t)$存在,并且等于 δ 函数(参看 418 页).

例 2 图形画在图 184 上的普遍函数序列的极限在广义函数意义下存在,并且等于 δ'.

非常好的是,在广义函数论里对任何收敛序列或级数可以逐项求微分.这一性质立刻从定义得出:如果 $f_n\to f$,则对于任何 $\varphi\in\mathscr{A}$, $(f'_n,\varphi)=-(f_n,\varphi')$收敛于$-(f,\varphi')=(f',\varphi)$,而这意味着 $f'_n\to f'$.由此可见,在广义函数论里可以解除与序列和级数的微分法有关系的所有经典的警戒心.

* 基本函数的导数也是基本函数.

我们进一步的目的——定义广义函数的拉普拉斯变换.对于普通函数 $f(t)$,拉普拉斯积分

$$F(p)=\int f(t)e^{-pt}dt=(f,e^{-pt})$$

想要把它看作泛函 f 在函数 e^{-pt} 上的值.但是后者不属于基本函数类 $\mathscr{A}$,我们就应当扩大这一类,把它的函数在有限区间外面等于0的条件用较少限制的条件来代替.由于在拉普拉斯变换理论里考虑带有载体在半轴 $t\geqslant0$ 上的函数,所以在 $t\to-\infty$ 时基本函数的行动上我们没有再加上任何限制.但是我们要求,在 $t\to+\infty$ 时它们与自己的导数一起趋于0要比 $\frac{1}{t}$ 的任何幂次快.

换句话说,我们引入新的一类基本函数 $\mathscr{B}$,这一类由所有在 t 轴上无穷可微的函数 $\varphi(t)$ 组成,且对其中每一个函数在任何整数 $l,m\geqslant0$ 下有 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^l\varphi^{(m)}(t)=0$.函数 $\varphi_n\in\mathscr{B}$ 的序列将被称做**收敛于** 0,如果对于任何整数 $l,m\geqslant0$,在 $n\to\infty$ 时序列 $t^l\varphi_n^{(m)}(t)$ 在任何线段 (a,∞) 上一致收敛于0.

在空间 $\mathscr{B}$ 上线性的和连续的泛函(亦即具有420页上的性质1)和2),在新的收敛定义 $\varphi_n\to0$ 下).我们将称为 **$\mathscr{B}^*$ 类的广义函数**.由于 $\mathscr{B}\supset\mathscr{A}$,所以,显然有 $\mathscr{B}^*\subset\mathscr{A}^*$,但是反之不正确,不是类 $\mathscr{A}^*$ 的所有广义函数在 $\mathscr{B}$ 中的基本函数上得以继续,因此也就不属于 $\mathscr{B}^*$.

现在可以表述一些主要定义.我们将把带有载体在半轴 $t\geqslant0$ 上的广义函数 $f\in\mathscr{A}^*$ 称做**广义像原函数**,如果存在实数 s_0 这样,使得在一切 $s>s_0$ 时广义函数 $e^{-st}f\in\mathscr{B}^*$.复变量 $p=s+i\sigma$ 的函数

$$F(p)=(f,e^{-pt}),\tag{30}$$

称做这像原函数的**像**,它定义在半平面 $\mathrm{Re}\,p>s_0$ 上,并且以下列方式来理解.对于 $\mathrm{Re}\,p=s>s_0$ 的固定的 p,选取一个数 s_1,$s_0<s_1<s$,此时

$$(f,e^{-pt})=(e^{-s_1t}f,e^{-(p-s_1)t}).\tag{30′}$$

由于 $|e^{-(p-s_1)t}|=e^{-(s-s_1)t}$ 在 $t\to+\infty$ 时很快收敛于0,所以 $e^{-(p-s_1)t}\in\mathscr{B}$,而按条件 $e^{-s_1t}f\in\mathscr{B}^*$,因此(30′)式的右边部分有定义(显然,它不依赖于 s_1 的选取).

例1 在第79目的意义下的任何像原函数 $f(t)$ 就是广义像原函数,因为在 $s_1>s_0$ 时 $e^{-s_1t}f(t)$ 是可积函数,而对于它们,正如我们在420页上约定好的,

$$(e^{-s_1t}f,e^{-(p-s_1)t})=\int f(t)e^{-pt}dt,$$

亦即,与拉普拉斯积分重合.

例2 任何带有有界载体的类 $\mathscr{A}$ 的广义函数属于类 $\mathscr{B}^*$,因为在无穷远处基本函数的性状在这里是非本质的.因此对于所有被考虑的广义函数,拉普拉斯变换是确定的.特别,

$$(\delta,e^{-pt})=e^{-pt}\Big|_{t=0}=1,\quad(\delta',e^{-pt})=(\delta,pe^{-pt})=p,$$

一般说来 $(\delta^{(n)},e^{-pt})=p^n$(与公式(24)相比较).

广义函数的拉普拉斯变换具有许多经典变换的性质.我们把其中某些列举出来.广义像原函数 f 的像 $F(p)$ 是半平面 $\operatorname{Re} p > s_0$ 中的解析函数,并且性质Ⅳ

$$(-1)^n t^n f \doteqdot F^{(n)}(p)$$

仍然是成立的.像原函数的求微分的性质Ⅲ马上可从广义函数的导数定义推出

$$(f', e^{-pt}) = p(f, e^{-pt}).$$

我们注意,特别,如果 f 是普通的在 $t>0$ 时连续的函数,那么这公式导出第 80 目的公式(6),事实上,按照 422 页上例 2,$f' = f'_{经}(t) + f(0)\delta$,其中 $f(0)$ 是 $t\to 0$ 时 $f(t)$ 的右极限值(左极限值等于 0),并且因此

$$(f', e^{-pt}) = -(f'_{经}, e^{-pt}) - f(0)(\delta, e^{-pt}) = p(f, e^{-pt}) - f(0).$$

性质Ⅶ (滞后定理)在一般情况下不保持,因为函数 $f(t-\tau)$ 没有意义.但是,譬如,对于 δ 函数它成立并且有形状

$$\delta_\tau \doteqdot e^{-p\tau} \quad (\tau \geqslant 0),$$

其中 δ_τ 是带有载体在点 τ 的狄拉克函数(在(7)部分中的表示,$\delta_\tau = \delta(t-\tau)$).

在结束时我们引入下列施瓦茨定理:

为了使得半平面 $\operatorname{Re} p > s_0$ 中解析的函数 $F(p)$ 是某个带有载体在半轴 $t \geqslant 0$ 上的广义函数 f 的拉普拉斯变换,充分必要条件是 $|F(p)|$ 在这半平面上不超过 $|p|^n$ 的某次幂.

条件的充分性证明很简单:可以认为 $s_0 > 0$,并且在半平面 $\operatorname{Re} p \geqslant s_0$ 中函数 $\frac{F(p)}{p^{n+2}} = G(p)$ 对于经典像原函数 $g(t)$ 的像满足充分条件(第 79 目定理 4).但是此时 $F(p)$ 将是广义函数意义上 $g(t)$ 的 $(n+2)$ 阶导数的像,这导数总是存在的.我们不讲必要性的证明.为了方便读者我们对所有已得到的算子关系式进行了汇编,同时也把用类似方法获得的某些关系式编了进来.算子关系式的较大的汇集读者可以在 В. А. Диткин 和 А. П. Прудников 的手册[11]中找到.

像原函数及其像函数的一览表 *

公式号、目号	像原函数	像
1 (83.4)	$t^a\ (a>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
2 (80.1)	$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
3	$e^{-\lambda t} t^a$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$

* 在编号下面的括号内指出本书中的目号和公式号;Γ 函数(第 74,89 目);erf 和 Erf——误差概率函数(第 70 目);si,Si,Ci 和 Ei 积分函数(第 70,76 目);S 和 C——菲涅耳积分(第 83 目);$J_n, I_n, Y_n, H_n^{(i)}$,ber,bei——圆柱函数(第 96 目).

续表

公式号、目号	像原函数	像
4 (80.3)	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5 (80.4)	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6 (80.12)	$t^n\sin\omega t$	$n!\,\frac{\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
7 (80.12)	$t^n\cos\omega t$	$n!\,\frac{\mathrm{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
8 (80.22)	$e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\alpha)$	$\frac{\omega\cos\alpha+(p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
9 (80.22)	$e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)$	$\frac{(p+\lambda)\cos\alpha-\omega\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
10 (80.4)	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
11 (80.4)	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
12 (80.15)	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
13 (83.5′)	$\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$
14	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2\alpha\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{\alpha^2}{p}}\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{p}}\right)$
15	$e^{-\alpha^2t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4\alpha^2}}\mathrm{Erf}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)$
16 (81.10)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
17	$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\sin 2\sqrt{\alpha t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha}{p}}$
18	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\alpha t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha}{p}}$
19 (83.20)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$
20 (83.20)	$\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$
21	$\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\sin\omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}-p}{p^2+\omega^2}}$
22	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}+p}{p^2+\omega^2}}$

续表

公式号、目号	像原函数	像
23	$\frac{1}{1\pm t}$	$\mp e^{\pm p}\mathrm{Ei}(\mp p)$
24	$\frac{1}{1+t^2}$	$\sin p\mathrm{Ci}\, p-\cos p\mathrm{Si}\, p$
25	$\frac{1}{\sqrt{1+t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{p}\mathrm{Erf}\sqrt{p}$
26	$\frac{1}{t}\ln(1+t^2)$	$\mathrm{Ci}^2 p+\mathrm{Si}^2 p$
27	$\frac{1}{t}\ln(1-t^2)$	$\mathrm{Ei}\, p\mathrm{Ei}(-p)$
28 (82.7)	$J_n(t)(n>-1)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
29	$\frac{J_n(\alpha t)}{t}(n>0)$	$\frac{1}{n\alpha^n}(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^n$
30 (83.10)	$e^{-\alpha t}I_0(\beta t)$	$\frac{1}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\beta^2}}$
31	$\lambda^n e^{-\lambda t}I_n(\lambda t)(n>-1)$	$\frac{(p+\lambda-\sqrt{p^2+2p\lambda})^n}{\sqrt{p^2+2p\lambda}}$
32	$t^n J_n(t)\left(n>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$
33 (82.3)	$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})(n>-1)$	$\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{2p}}$
34	$\frac{1}{\sqrt{t}}J_{2n}(2\sqrt{t})$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-\frac{1}{2p}}I_n\left(\frac{1}{2p}\right)$
35 (99.19)	$J_0\left(a\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\eta(t-\tau)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}$
36	$\frac{J_1(a\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\eta(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau p}-e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}}{a\tau}$
37	$Y_0(t)$	$-\frac{2}{\pi}\frac{\ln(p+\sqrt{p^2+1})}{\sqrt{p^2+1}}$
38	$H_0^{(1,2)}(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\mp\frac{2i}{\pi}\frac{\ln\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)}{\sqrt{p^2+1}}$
39	$\sqrt{2}\mathrm{ber}\,\omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^4+\omega^4}+p^2}{p^4+\omega^4}}$
40	$\sqrt{2}\mathrm{bei}\,\omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^4+\omega^4}-p^2}{p^4+\omega^4}}$
41 (83.8)	$\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha t})$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{p\sqrt{p+\alpha}}$

续表

公式号、目号	像原函数	像
42 (81.13)	$\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$
43 (83.6)	$e^t\mathrm{Erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$
44 (83.7)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^t\mathrm{Erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$
45 (83.9)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}+\sqrt{\alpha}\,\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha t})$	$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p}$
46 (80.16)	$\mathrm{si}\ t$	$\frac{\mathrm{arcctg}\ p}{p}$
47 (83.14)	$\mathrm{Ci}\ t$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
48 (83.12)	$S(t)$	$\frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}}$
49 (83.11)	$C(t)$	$\frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}}$
50 (83.15)	$-\mathrm{Ei}(-t)$	$\frac{1}{p}\ln(1+p)$

§2　应用

在此，我们将讨论算子法应用于解与线性微分方程有关的问题上的应用．算子法在特殊函数上的某些应用，我们将于下一章讨论．

84．常微分方程与方程组　算子法可特别简单地应用于解决具有常系数的线性微分方程或这种方程组．设给定微分方程

$$L[x]=a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t),\tag{1}$$

与始值条件

$$x(0)=x_0,x'(0)=x_1,\cdots,x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}.\tag{2}$$

我们设 $a_0\neq0$ 且函数 $f(t)$ 以及解 $x(t)$，连同它到 n 阶为止的导数，都是像原函数，且记 $X(p)\risingdotseq x(t)$，$F(p)\risingdotseq f(t)$．

按微分法则与线性性质，替代具有始值条件(2)的微分方程(1)，得**算子方程**

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n)X(p)$$
$$= F(p) + x_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$$
$$+ x_1(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \cdots + a_{n-2}) + \cdots + x_{n-1}a_0,$$

或

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p), \tag{3}$$

其中 $A(p)$ 与 $B(p)$ 是已知的多项式.解这方程,得**算子解**

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \tag{4}$$

假若方程(1)在给定的始值条件(2)之下,允许有满足加在像原函数上的条件的解 $x(t)$ (可以证明:在采用的条件下,这种解总存在),则这解是 $X(p)$ 的像原函数.

我们来举几个用这种方法解方程的例子.

例 1 方程 $x'' + a^2 x = b\sin at$ 在一般的始值条件下.算子方程是

$$(p^2 + a^2)X = \frac{ab}{p^2 + a^2} + x_0 p + x_1,$$

它的解是*

$$X(p) = \frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} + x_0\frac{p}{p^2 + a^2} + \frac{x_1}{p^2 + a^2}. \tag{5}$$

在表上有第二项与第三项的像原函数.第一项的像原函数我们按照表中公式 6 和像原函数的积分定理来求出

$$\frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} \doteqdot \frac{b}{2}\int_0^b t\sin at dt = \frac{b}{2a^2}(\sin at - at\cos at).$$

同样可以利用展开式定理,最后得

$$x(t) = \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)\frac{\sin at}{a} + \left(x_0 - \frac{bt}{2a}\right)\cos at. \tag{6}$$

例 2 方程 $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ 在全为零的始值条件下.算子方程是

$$(p+1)^3 X = \frac{1}{p},$$

它的解是

$$X(p) = \frac{1}{p(p+1)^3} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3}.$$

按表上的公式 1 和 11 求出像原函数

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t}. \tag{7}$$

例 3 方程 $x''' + x = 1$ 在全为零的始值条件下.算子解

$$X(p) = \frac{1}{p(p^3 + 1)}.$$

按第二展开定理找出像原函数

---

* 对应于始值条件有 $\lim\limits_{p\to\infty} pX = x_0$ (参看第 83 目的极限关系式(1)).在其他的例子中,也可作类似的检验.

$$x(t)=1-\frac{1}{3}e^{-t}+2\mathrm{Re}\frac{e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}}{-3}=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}. \tag{8}$$

例 4 方程 $x^{(4)}+2x''+x=\sin t$ 在全为零的始值条件下.算子解:

$$X(p)=\frac{1}{(p^2+1)^3}.$$

我们求出像原函数,它是函数 $X(p)e^{pt}$ 在奇点 $p=i$ 的留数.

$$x(t)=\mathrm{Re}\frac{d^2}{dp^2}\left[\left\{\frac{e^{pt}}{(p+i)^3}\right\}\right]_{p=i}=\frac{1}{8}(3-t^2)\sin t-\frac{3}{8}t\cos t. \tag{9}$$

例 5 方程 $x''+\omega^2x=a[\eta(t)-\eta(t-b)]$ 在全为零的始值条件下.根据滞后定理求得算子方程,它的解是

$$X(p)=\frac{a(1-e^{-bp})}{p(p^2+\omega^2)}.$$

按第二展开定理

$$\frac{a}{p(p^2+\omega^2)}\doteqdot\frac{a}{\omega^2}-\frac{a}{\omega^2}\cos\omega t=\frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}.$$

按滞后定理

$$\frac{ae^{-bp}}{p(p^2+\omega^2)}\doteqdot\frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\eta(t-b).$$

最后得出

$$x(t)=\frac{2a}{\omega^2}\left[\sin^2\frac{\omega t}{2}\eta(t)-\sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\cdot\eta(t-b)\right]. \tag{10}$$

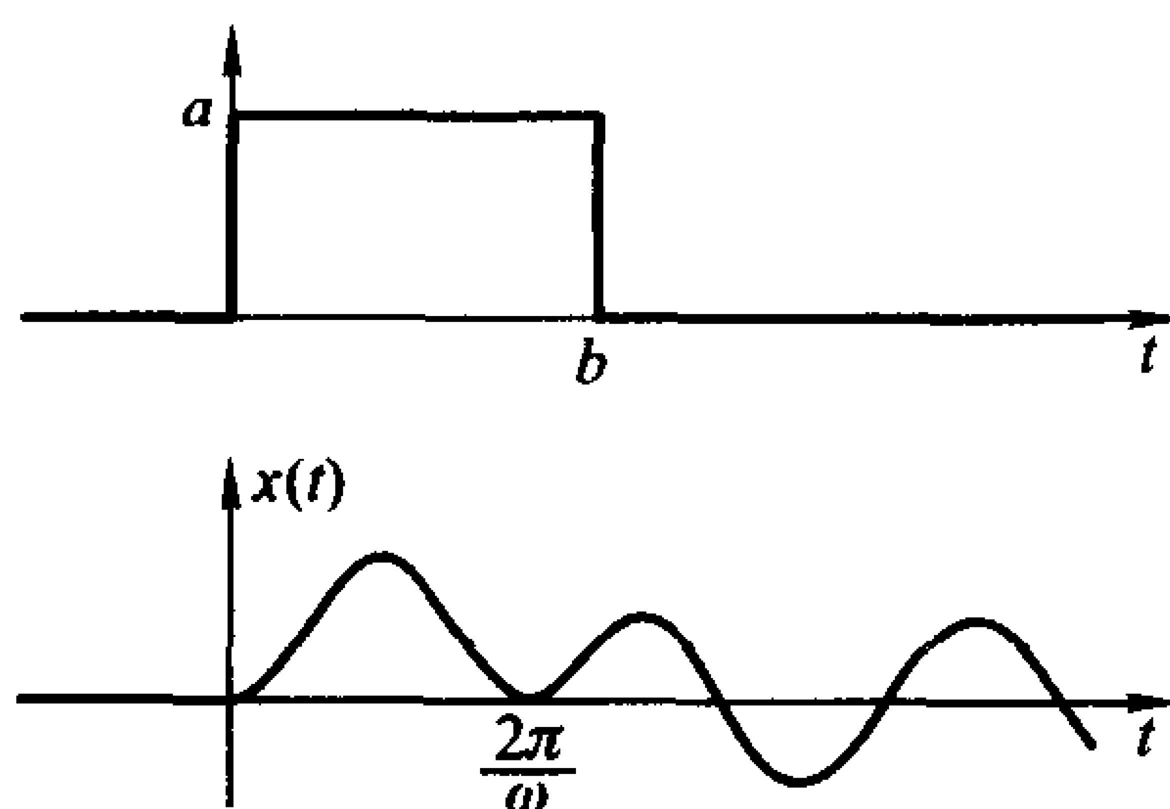


图 185

解的图像画在图 185 上.

例 6 质点 m 作直线的振动,并且我们略去介质的阻力,而回复力 $m\omega^3x$ 与位移成比例.在时刻 $t_k=k\tau$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 时,这质点受到大小为 a 的脉冲.假若运动开始时的偏差与开始时的速度都为 0,求质点的运动方程.

运动方程的形式是

$$mx''+m\omega^2x=a\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k\tau),$$

其中 $\delta(t)$ 是脉冲函数.算子方程的解

$$X(p)=\frac{a}{m}\frac{1}{p^2+\omega^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau p}=\frac{a}{m}\frac{1}{(p^2+\omega^2)(1-e^{-\tau p})}$$

满足第二展开定理的条件.依照这定理,像原函数可表为函数 $X(p)e^{pt}$ 在它所有的极点 $p_0=0$, $p=\pm i\omega$ 与 $p_k=\frac{2k\pi i}{\tau}$ $(k=1,2,\cdots)$ 处的留数的总和.如若 τ 不是 $\tau_1=\frac{2\pi}{\omega}$ 的整倍数,那么我们就假定所有的极点都是简单的,于是,求出留数,最后我们就得出

$$x(t)=\frac{a}{m\omega^2}\left\{\frac{1}{\tau}-\frac{\omega}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\cos\omega\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\tau}{\tau^2-k^2\tau_1^2}\cos k\frac{\tau_1}{\tau}\omega t\right\}. \tag{11}$$

特别我们注意第 81 目中的杜阿梅尔积分的作用.假设需要解具有常系数的线性微分方程

$$L[x]=f(t) \tag{12}$$

在零始值条件下. 如果已经知道方程

$$L[x]=1,\tag{13}$$

即左边与(12)左边相同和右边为 1 的方程, 同样在零始值条件下的解 $x(t)$, 那么杜阿梅尔积分能够在没有任何计算下写出方程(12)的解.

事实上, 对应于方程(12)和(13)的算子方程有形状分别为

$$A(p)X(p)=F(p),\quad A(p)X_1(p)=\frac{1}{p},$$

其中 $F(p)$ 为 $f(t)$ 的像, 由此 $X(p)=pX_1(p)F(p)$. 所以, 根据杜阿梅尔公式

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau)d\tau\tag{14}$$

(我们考虑到, 按照始值条件 $x_1(0)=0$), 或者

$$x(t)=x_1(t)f(0)+\int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau.\tag{15}$$

例 方程 $x''-a^2x=be^{-t^2}$, 零始值条件. 我们先在同样条件下解方程 $x''-a^2x=1$,

$$X_1=\frac{1}{p(p^2-a^2)}\doteqdot\frac{1}{a}\int_0^t \operatorname{sh} at dt=\frac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at-1)$$

(利用表上公式 10 和像原函数积分定理). 按照公式(14)我们求出所要找的解

$$x(t)=\frac{b}{a}\int_0^t e^{-\tau^2}\operatorname{sh} a(t-\tau)d\tau,$$

在经过简单变换之后, 用函数 erf 表达出来:

$$x(t)=\frac{b\sqrt{\pi}}{4a}e^{\frac{a^2}{4}}\left\{e^{at}\operatorname{erf}\left(t+\frac{a}{2}\right)-e^{-at}\operatorname{erf}\left(t-\frac{a}{2}\right)-2\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{ch} at\right\}.\tag{16}$$

完全类似地, 可以应用算子法解具有常系数的线性微分方程组. 例如, 设求解 n 个二阶微分方程的组

$$L_\nu=\sum_{k=1}^n\left(a_{\nu k}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{\nu k}\frac{dx_k}{dt}+c_{\nu k}x_k\right)=f_\nu(t)\quad(\nu=1,2,\cdots,n)\tag{17}$$

其给定的始值条件是

$$x_k(0)=\alpha_k,\quad \frac{dx_k(0)}{dt}=\beta_k.\tag{18}$$

如果设 $x_k(t)$ 与 $f_\nu(t)$ 为像原函数, 且用 $X_k(p)$ 与 $F_\nu(p)$ 来表示它们的像, 则具有始值条件(18)的方程组(17)可用算子方程组来代替.

$$\sum_{k=1}^n(a_{\nu k}p^2+b_{\nu k}p+c_{\nu k})X_k(p)=F_\nu(p)+\sum_{k=1}^n[(a_{\nu k}p+b_{\nu k})\alpha_k+a_{\nu k}\beta_k].\tag{19}$$

当作代数的线性方程组那样将它们解出, 便可求得 $X_k(p)$, 然后求出它们的像原函数 $x_k(t)$. 我们来举出一些例子.

例 1 解方程组

$$(2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0,$$
$$(2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0,$$

使其满足始值条件 $x(0)=x'(0)=1, y(0)=y'(0)=0$. 转变为算子组

$$(2p^2-p+9)X-(p^2+p+3)Y=2p+1,$$
$$(2p^2+p+7)X-(p^2-p+5)Y=2p+3,$$

而且,为了简化起见,取这两个方程的和与差

$$2X-Y=2\frac{p+1}{p^2+4},\quad X+Y=\frac{1}{p-1}.$$

由此得出

$$X=\frac{1}{3}\frac{1}{p-1}+\frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{3}\frac{1}{p^2+4},$$
$$Y=\frac{2}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4}-\frac{2}{3}\frac{1}{p^2+4}.$$

过渡到像原函数,最后求得

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t),\\ y&=\frac{1}{3}(2e^t-2\cos 2t-\sin 2t).\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

例 2 方程组

$$x''-x+y+z=0,\quad x+y''-y+z=0,\quad x+y+z''-z=0.$$

始值条件 $x(0)=1, y(0)=z(0)=x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$. 算子方程组为

$$(p^2-1)X+Y+Z=p,\quad X+(p^2-1)Y+Z=0,\quad X+Y+(p^2-1)Z=0.$$

利用行列式,容易得出它的解为

$$X=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)},\quad Y=Z=-\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}.$$

按第二展开定理,求得像原函数

$$x=\frac{2}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2})+\frac{1}{3}\cos t,\quad y=z=-\frac{1}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2})+\frac{1}{3}\cos t.\tag{21}$$

例 3 方程组

$$x'_0=-ax_0,$$
$$x'_k+ax_k=ax_{k-1}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

给定的始值条件为 $x_0(0)=1, x_1(0)=\cdots=x_n(0)=0$. 算子方程组的形式是

$$(p+a)X_0=1,\quad (p+a)X_k-aX_{k-1}=0,$$

由此得

$$X_k=\frac{a^k}{(p+a)^{k+1}}\quad(k=0,1,2,\cdots,n).$$

按表中的公式 3 求得像原函数

$$x_k(t)=\frac{1}{k!}(at)^k e^{-at}.\tag{22}$$

例 4 三个同样的点质量 m 固定在一条弦上,使它们之间的距离以及从两个边上的质点到弦的固定了的端点的距离都等于 l. 在开始的瞬时,所有质点位于平衡状态,这时给予中间的质点一个脉冲 v_0. 求这系统的运动方程.

这系统的运动的微分方程借助于拉格朗日方程求最简单,而对于微小的自由振动,拉格朗日

方程具有形式(参看[8])：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)+\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}=0,$$

其中 T 是这系统的动能，Π 是势能，q_k 是广义坐标，而"·"表示对于时间求导数.

在我们的情形，如果用 $x_1(t),x_2(t),x_3(t)$ 来分别表示三个质点与平衡状态的偏离，将有

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2),\quad \Pi=\frac{P}{l}(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3),$$

其中 P 是弦的张力.因此，运动方程具有形式

$$\ddot{x}_1+\lambda(2x_1-x_2)=0,$$
$$\ddot{x}_2+\lambda(2x_2-x_1-x_3)=0,$$
$$\ddot{x}_3+\lambda(2x_3-x_2)=0,$$

其中 $\lambda=\frac{P}{ml}$.注意到始值条件 $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_3(0)=0,\dot{x}_2(0)=v_0$，得算子方程组

$$(p^2+2\lambda)X_1-\lambda X_2=0,$$
$$-\lambda X_1+(p^2+2\lambda)X_2-\lambda X_3=v_0,$$
$$-\lambda X_2+(p^2+2\lambda)X_3=0.$$

解这方程组，求得

$$X_2=\frac{p^2+2\lambda}{(p^2+2\lambda)^2-2\lambda^2}v_0,\quad X_1=X_3=\frac{\lambda}{(p^2+2\lambda)^2-2\lambda^2}v_0.$$

应用第二展开定理，得出

$$x_1(t)=x_3(t)=-\frac{v_0}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}-\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right),\quad x_2(t)=\frac{v_0}{2}\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}+\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right),\tag{23}$$

其中 $\omega_1=\sqrt{(2+\sqrt{2})\lambda},\omega_2=\sqrt{(2-\sqrt{2})\lambda}$.

算子法在解某些具有可变系数的线性微分方程时，也可以显得有用.设 $x(t)\doteqdot X(p)$，按像原函数与像的微分定理，我们有

$$\begin{aligned}&x\doteqdot X,\quad tx\doteqdot -X',\quad t^2x\doteqdot X'',\cdots,\\&x'\doteqdot pX-x(0),\quad tx'\doteqdot-(pX)',\quad t^2x'\doteqdot(pX)'',\cdots,\\&x''\doteqdot p^2X-x(0)p-x'(0),\quad tx''\doteqdot-(p^2X)'+x(0),\quad t^2x''\doteqdot(p^2X)'',\cdots\end{aligned}\tag{24}$$

等等.过渡到像，有时可以使我们能简化含有类似形式的项的微分方程.

例　微分方程

$$tx''+x'+tx=0\tag{25}$$

称为具指标为 0 的圆柱函数的方程(见第 95 目).按公式(24)我们求得算子方程

$$(p^2+1)X'+pX=0.$$

这是一个具有可分离变量的方程.它容易解出，并给出 $X=\frac{C}{\sqrt{1+p^2}}$，其中 C 为任意常数.由于 $\lim\limits_{p\to\infty}pX=C$，所以根据第 83 目的极限关系式(1)应当是 $C=x(0)$.为了确定起见令 $x(0)=1$，按

照表上公式 28 我们求得,在这初始值条件下方程(25)的解是贝塞尔函数*

$$x = J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \tag{26}$$

85. 电路的计算 众所周知,在含有有效电阻 R、自感应 L 或电容 C 的电路中的电流 $i(t)$ 与元件端点的电压 $u(t)$,分别由下列关系式联系着:

$$u(t) = Ri(t), \quad u(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{1}{C}\left\{\int_0^t i(t)dt + q_0\right\}, \tag{1}$$

其中 q_0 是电容器的板上的初始电荷.

如果引入 $i(t)$ 与 $u(t)$ 的像——"算子电流" $I(p)$ 与"算子电压" $U(p)$,则这些关系式转为下面的关系式

$$U = RI, \quad U = L(pI - i_0), \quad U = \frac{1}{Cp}(I + q_0), \tag{2}$$

其中 $i_0 = i(0)$ 是初始电流. 如果设 $i_0 = q_0 = 0$,这对应于接电的问题,替代方程(2)将有

$$U = RI, \quad U = LpI, \quad U = \frac{1}{Cp}I.$$

最后的这些关系式可合并成"*欧姆算子定律*"的形式:

$$U = ZI, \tag{3}$$

其中 Z 是"*算子电阻*"(*它也称做阻抗*),在有效电阻、自感应以及电容的情形,分别等于

$$Z_R = R, \quad Z_L = Lp, \quad Z_C = \frac{1}{Cp}. \tag{4}$$

再要注意:当串联两个具有阻抗 Z_1 与 Z_2 的元件时,得 $U_1 = Z_1 I$, $U_2 = Z_2 I$, $U = U_1 + U_2$(这些记号的意义是很明白的),由此

$$U = (Z_1 + Z_2)I = ZI,$$

或

$$Z = Z_1 + Z_2. \tag{5}$$

类似地,当并联时,$U = Z_1 I_1 = Z_2 I_2$, $I_1 + I_2 = I$,由此,设 $U = ZI$,我们便求得

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \tag{6}$$

因此,*在接通电问题中,电路的算子电阻可按元件联结的通常规则来计算.*

如果初始电流与初始电荷异于 0,则在方程(3)中将出现附加的项. 例如,在电阻、电压与自感应串联的情形(RLC 线路)时,得到

$$U = \left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right)I - Li_0 + \frac{q_0}{Cp} = ZI - Li_0 + \frac{q_0}{Cp}, \tag{7}$$

* 点 $t = 0$ 是微分方程(25)的奇点,这也可以说明算子方程不含初始值条件. 在第七章中将会看到,方程(25)的全部解,在点 $t = 0$ 是正则的,并且与解(26)成比例. 这方程的解与(26)线性无关,在 $t = 0$ 时有奇点.

其中 $Z=R+Lp+\frac{1}{Cp}$是这电路的算子电阻.

如果有由一些表示 RLC 线路的元件所组成的电路,则在每一个 RLC 线路上将有

$$R_k i_k(t)+L_k\frac{di_k(t)}{dt}+\frac{1}{C_k}\left\{\int_0^t i_k(t)dt+q_{k0}\right\}+\sum_{\nu\neq k}M_{k\nu}\frac{di_\nu(t)}{dt}=u_k(t), \quad (8)$$

其中 $R_k, L_k, C_k, q_{k0}, i_k(t), u_k(t)$是对于第 k 个RLC 线路的普通的数值,而 $M_{k\nu}$是第k 个与第 ν 个线路之间的互感系数.从(8)过渡到算子方程,得

$$U_k=\sum_\nu Z_{k\nu}I_\nu+\frac{q_{k0}}{pC_k}-L_k i_{k0}-\sum_{\nu\neq k}M_{k\nu}i_{\nu 0}. \quad (9)$$

其中

$$Z_{kk}=R_k+L_k p+\frac{1}{C_k p}, Z_{k\nu}=M_{k\nu}p \quad (\nu\neq k). \quad (10)$$

把对于组成闭电路的所有元件的那些关系式(9)相加,且利用基尔霍夫的第二定律,求得:

$$\sum_k\sum_\nu Z_{k\nu}I_\nu=\sum_k\left(L_k i_{k0}+\sum_{\nu\neq k}M_{k\nu}i_{\nu 0}-\frac{q_{k0}}{pC_k}\right)+U, \quad (11)$$

其中的和式是对于组成这个闭电路的所有的元件来取的,而 U 表示作用于它的那些算子电动势的和.对于任一分支点,基尔霍夫的第一定律给出

$$\sum I_k=0, \quad (12)$$

其中的和式是对于通至这个点的所有的元件来取的.*方程组(11)与(12)使我们能确定在这电路中的所有的元件上的算子电流.*

还要指出杜阿梅尔积分在解接通电问题中的作用.为简单起见,考虑一个线路的接通电问题,分别接通电动势 $u(t)$和单位电动势,我们得到如下的算子方程:

$$I=AU, \quad I_1=\frac{A}{p},$$

其中 $A=\frac{1}{Z}$表示这线路的算子导电率("导纳").因此 $I=pI_1U$,并且按照杜阿梅尔公式

$$i(t)=\int_0^t u(\tau)i'_1(t-\tau)d\tau=i_1(t)u(0)+\int_0^t i_1(\tau)u'(t-\tau)d\tau, \quad (13)$$

其中 $i_1(t)$——函数 $I_1(p)$的像原函数——在把线路接通在单位电动势时线路中的电流("暂时导电率").

由此可见,知道了线路接在单位电动势时线路中的电流,可以按照杜阿梅尔公式(13)立刻写出这线路接在任何电动势 $u(t)$上时的电流 $i(t)$ (比较上一目的公式(14)和(15)).

第 83 目中的极限关系式(1)和(2)使我们能够指出在接通时刻($t=0$)的暂时导

电率及在稳定状态($t=\infty$)的电流 $i_1(t)$ 与算子导电率 $A(p)$ 在 $p=\infty$ 和 $p=0$ 时的值之间的简单关系. 这就是,由等式 $A=I_1p$ 和根据这两个关系得出

$$i_1(0)=\lim_{p\to\infty}I_1p=A(\infty),\quad i_1(\infty)=\lim_{p\to 0}I_1p=A(0) \tag{14}$$

利用关系式(14)来检查计算是很方便的.

我们将举出几个应用算子方法于电路计算的例子.

例 1 接常数电动势 U_0 于图 186 的线路上——自感应与被电阻器所分路的电容是串联的. 算子电阻按公式(4)、(5)和(6)求得为

$$Z=Lp+\frac{1}{Cp+\frac{1}{R}}=\frac{LCRp^2+Lp+R}{RCp+1}.$$

算子电动势是 $U=\frac{U_0}{p}$,因此按公式(3),算子电流是

$$I=\frac{U_0(RCp+1)}{p(LCRp^2+Lp+R)}.$$

瞬时电流可按第二展开定理来求得. 函数 $I(p)$ 在点 $p=0$ 处具有一阶极点,并且

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\frac{1}{4R^2C^2}-\frac{1}{LC}}.$$

如果 $L<4R^2C$,则其根是共轭复数 $p_{1,2}=-\sigma\pm i\omega$,其中 $\sigma=\frac{1}{2RC}$, $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{4R^2C^2}}$,因而过程具有振动的特征. 按第 82 目的公式(15),这时求得

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left\{1-e^{-\sigma t}\left[\cos\omega t+\left(\frac{\sigma}{\omega}-\frac{R}{\omega L}\right)\sin\omega t\right]\right\}. \tag{15}$$

如果 $L>4R^2C$,则 ω 将是纯虚数. 在(15)中令 $\omega=i\lambda$,其中 λ 是实数,因而求得

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left\{1-e^{-\sigma t}\left[\operatorname{ch}\lambda t+\left(\frac{\sigma}{\lambda}-\frac{R}{\lambda L}\right)\operatorname{sh}\lambda t\right]\right\}. \tag{16}$$

过程具有非周期的特征.

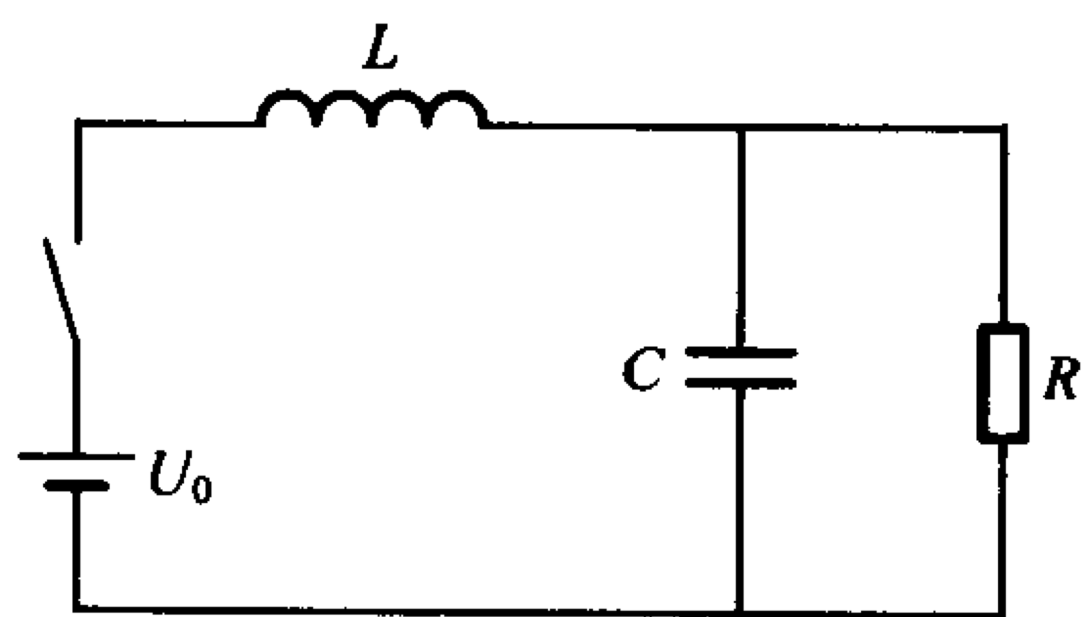


图 186

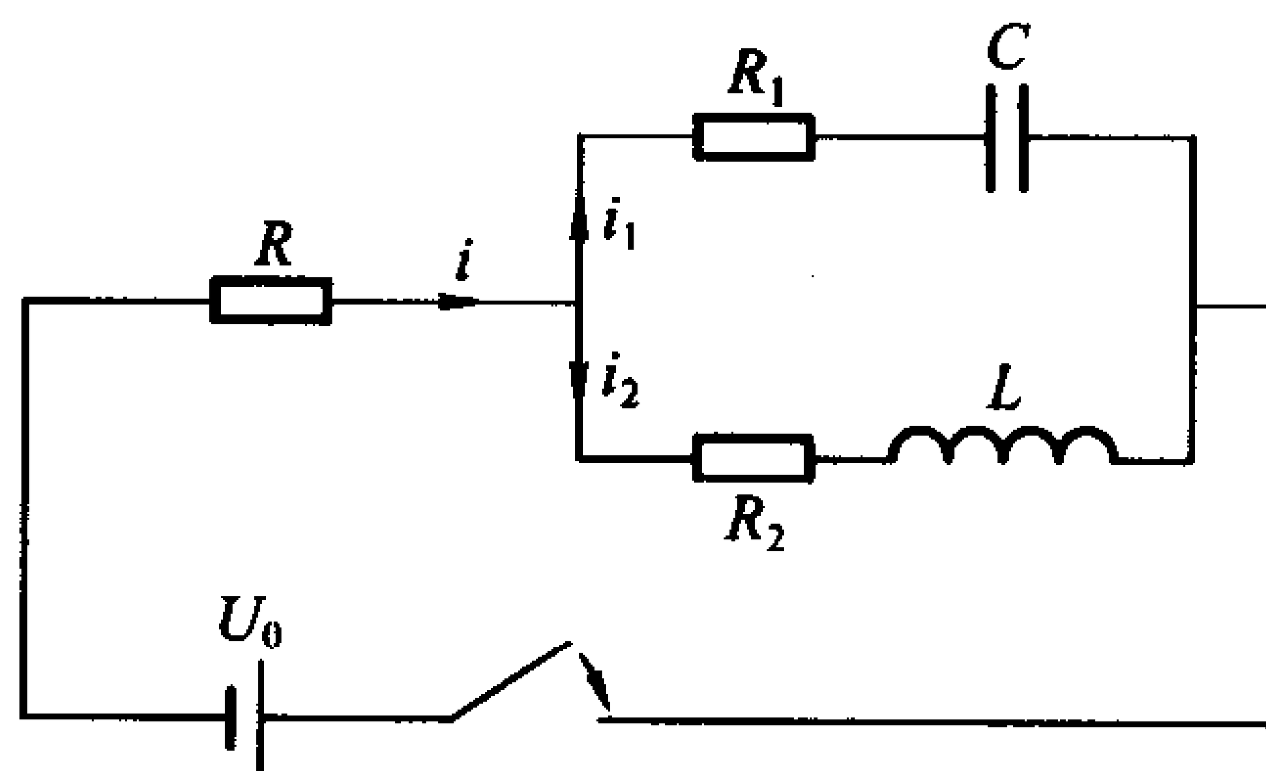


图 187

例 2 我们来求出图 187 中接在常数电动势 U_0 上的线路中,通过电容 C 的电流 $i_1(t)$. 设 $Z_1=R_1+\frac{1}{Cp}$ 与 $Z_2=R_2+Lp$ 是线路的支线上的算子阻抗,在这两条支线上通过电流 $i_1(t)$ 与 $i_2(t)$ (参看图 187),因而

$$Z=R+\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$

是整个线路的阻抗.我们有

$$I=\frac{U_0}{pZ}=I_1+I_2,\quad I_1Z_1=I_2Z_2,$$

因而 $I_1=I-\frac{I_1Z_1}{Z_2}$,由此

$$I_1=\frac{Z_2I}{Z_1+Z_2}=\frac{U_0Z_2}{p(Z_1+Z_2)Z}.$$

将求得的 Z_2 与 $(Z_1+Z_2)Z$ 的数值代入,得到

$$I_1(p)=\frac{U_0(R_2+Lp)}{\alpha p^2+2\beta p+\gamma},$$

其中 $\alpha=(R+B_1)L, 2\beta=(R_1+R_2)R+R_1R_2+\frac{L}{C}, \gamma=\frac{R_1+R_2}{C}$.按第 82 目的公式(13),便求得瞬时电流为

$$i(t)=\frac{U_0}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{R_2+Lp_k}{\alpha p_k+\beta}e^{p_kt},\tag{17}$$

其中 $p_{1,2}$ 是 $I_1(p)$ 的表达式分母中的二次三项式的根.

例 3 接 RLC 线路在正弦式的电动势 $U_0\sin\omega t$ 上.这时 $Z=Lp+R+\frac{1}{Cp}, U=\frac{U_0\omega}{p^2+\omega^2}$,因此算子电流等于

$$I_0(p)=\frac{U_0\omega p}{(p^2+\omega^2)\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}.\tag{18}$$

按第 82 目的展开定理(15),得到

$$i_0(t)=U_0\omega\left\{\mathrm{Re}\frac{e^{i\omega t}}{-L\omega^2+Ri\omega+\frac{1}{C}}+2\mathrm{Re}\frac{p_0}{(p_0^2+\omega^2)(2Lp_0+R)}e^{p_0t}\right\}$$

其中 $p_0=-\frac{R}{2L}+i\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=-\sigma_0+i\omega_0$ 是表达式(18)的分母中的二次三项式的根(我们设,有振动的情形发生,即设 ω_0 是实数).引入电工学中所采用的常数 $X=L\omega-\frac{1}{C\omega}, X'=L\omega+\frac{1}{C\omega}$(瞬变电抗),$Z^*=\sqrt{R^2+X^2}$(全阻抗),在简单的变换后求得

$$i_0(t)=\frac{U_0}{Z^*}\sin(\omega t-\delta)-\frac{U_0}{\omega_0Z^*\sqrt{LC}}e^{-\sigma_0t}\sin(\omega_0t-\delta_0),\tag{19}$$

其中 $\tan\delta=\frac{X}{R}, \tan\delta_0=\frac{\omega_0X}{\sigma_0X'}$.

例 4 设作用在 RLC 线路上的电动势,在时间 $0<t<\frac{\pi}{\omega}$ 内等于 $U_0\sin\omega t$,而其后重新等于 0.我们来求出当 $t>\frac{\pi}{\omega}$ 时在线路上的电流.作用的电动势是

$$u(t)=U_0\left\{\eta(t)\sin\omega t-\eta\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\sin\omega t\right\}=U_0\left\{\eta(t)\sin\omega t+\eta\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right\},$$

其中 $\eta(t)$ 是单势函数,第二项变换成这样,使得可用滞后定理.因此按滞后定理得出

$$U=\frac{U_0\omega}{p^2+\omega^2}(1+e^{-p\frac{\pi}{\omega}}).$$

算子电流等于

$$I(p) = I_0(p)(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}),$$

其中 $I_0(p)$由公式(18)确定.同样按滞后定理有

$$I_0(p)e^{-p\frac{\pi}{\omega}} \doteqdot i_0\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right).$$

把这个关系式的右端与(19)相加,且注意到当 $t > \frac{\pi}{\omega}$ 时 $\eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = \eta(t) = 1$,我们便得出所求的电流为

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 Z^* \sqrt{LC}} e^{-\sigma_0 t}\left\{\sin(\omega_0 t - \delta_0) + e^{\frac{\pi\sigma_0}{\omega}} \sin\left(\omega_0 t - \delta_0 - \pi\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right\}. \tag{20}$$

例 5 如图 188 中的线路,在时间 τ 时接在常数电动势 U_0上,而在时刻 $t = 0$ 时电动势被切断,求出当 $t > 0$ 时线路上的电流.

我们来求出在时刻 $t = 0$ 时在自感应上的电流及在电容器上的电荷.为此,先来解决线路接电在电动势 U_0 上的问题.设 1 与 2 分别是线路上含有 R,L 与 C 的部分,我们有 $Z_1 = R + Lp$,$Z_2 = \frac{1}{Cp}$,$I_1Z_1 = -I_2Z_2 = -\frac{U_0}{p}$ (电流的方向在图 188 中用箭头标出).由此 $I_1 = -\frac{U_0}{p(R + Lp)}$,$I_2 = U_0C$,因此

$$i_1(t) = -\frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}), \quad i_2(t) = U_0C\delta(t),$$

其中 $\delta(t)$是脉冲函数(参看第 83 目).因此,到时刻 $t = \tau$ 时,

$$i_0 = i_1(\tau) = -\frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}), \quad q_0 = U_0C\int_0^\tau \delta(t)dt = U_0C \tag{21}$$

(参看脉冲函数的积分的性质——第 83 目的公式(22)).现在来解具有始值条件(21)的 RLC 线路接通问题.对于线路 RLC,按公式(7)有

$$\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right)I = Li_0 - \frac{q_0}{Cp} = -\frac{LU_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}) - \frac{U_0}{p}.$$

由此,在用例 3 中的记号和 ω_0为实数时得

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 L}e^{-\sigma_0 t}\sin\omega_0 t - \frac{U_0}{R\omega_0}e^{-\sigma_0 t}(\omega_0\cos\omega_0 t - \sigma_0\sin\omega_0 t)(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}). \tag{22}$$

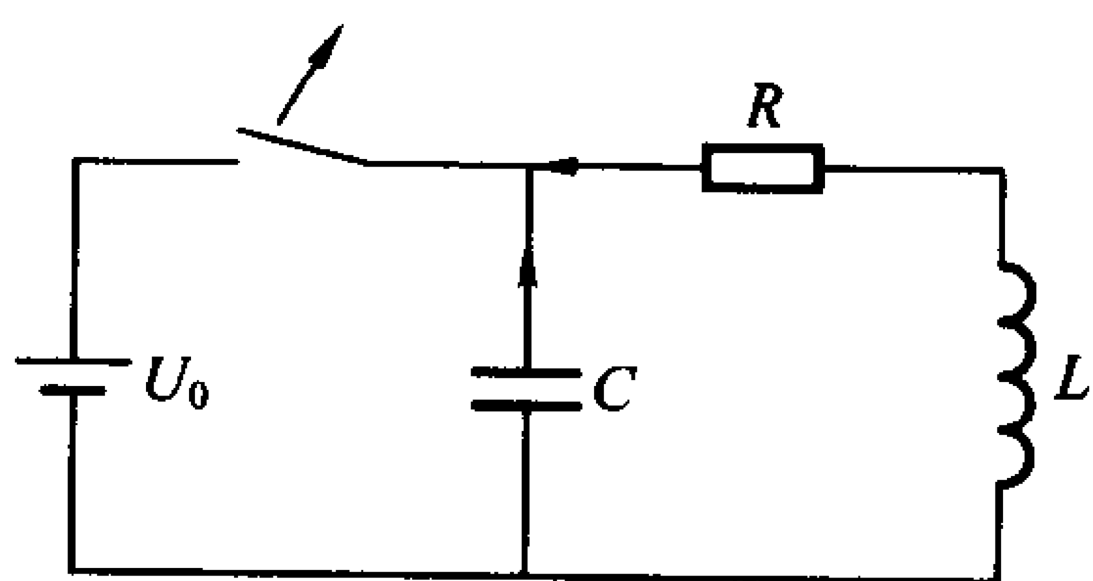


图 188

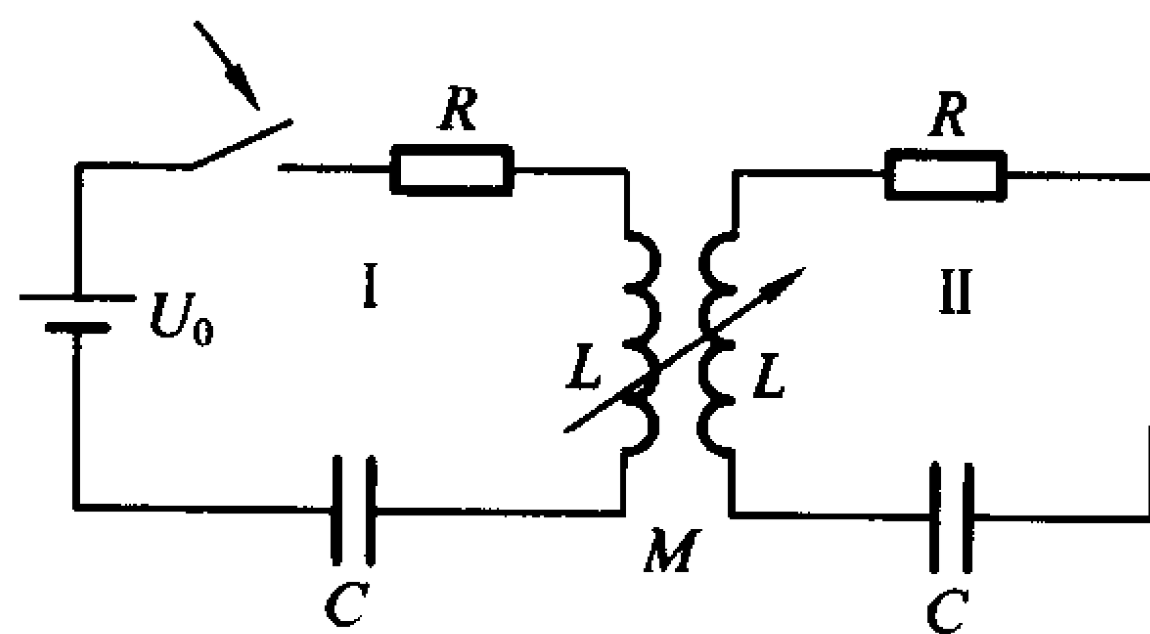


图 189

例 6 两个相同的 RLC 线路由互感应 M 来联系的(图 189).从 $t = 0$ 时刻开始,以常数电动势 U_0作用到其中的一个线路上.求在另一个线路上的电流.

算子方程组是:

$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)I_1+MpI_2=\frac{U_0}{p},$$

$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)I_2+MpI_1=0.$$

由此我们求得第二个线路上的算子电流

$$I_2(p)=\frac{U_0Mp^2}{M^2p^4-\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)^2}.$$

$I_2(p)$的极点是 $p_{1,2}=-\sigma_1\pm i\omega_1, p_{3,4}=-\sigma_2\pm i\omega_2$,其中

$$\sigma_{1,2}=\frac{R}{2(L\pm M)},\quad \omega_{1,2}^2=\frac{1}{C(L\pm M)}-\sigma_{1,2}^2.$$

按照第 82 目的第二展开定理求出像原函数,在简单的变换后得出

$$\begin{aligned}i_2(t)&=\frac{U_0}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(-\sigma_1+i\omega_1)t}}{(L+M)i\omega_1}-\frac{e^{(-\sigma_2+i\omega_2)t}}{(L-M)i\omega_2}\right\}\\&=\frac{U_0}{2}\left\{\frac{e^{-\sigma_1t}\sin\omega_1t}{\omega_1(L+M)}-\frac{e^{-\sigma_2t}\sin\omega_2t}{\omega_2(L-M)}\right\}.\end{aligned}\tag{23}$$

例 7　考虑所谓滤波器,即是由某些个数的串联的线路(部分)所组成的电路(图 190).

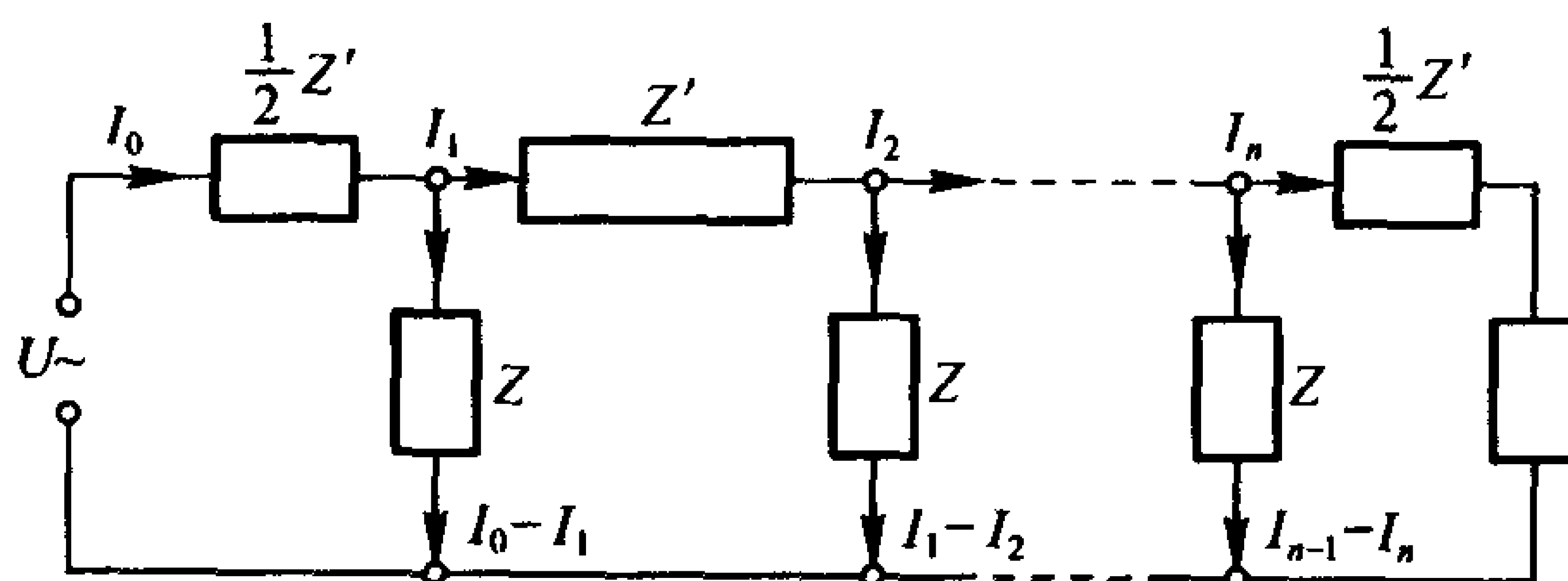


图 190

我们假定:电动势作用于第一个部分通过算子阻抗$\frac{1}{2}Z'$,且最后的部分接在同一算子阻抗$\frac{1}{2}Z'$上.相继应用基尔霍夫定律于那些闭线路,得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}Z'I_0+Z(I_0-I_1)=U,\\&Z(I_0-I_1)-I_1Z'-Z(I_1-I_2)=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&-Z(I_{n-1}-I_n)+\frac{1}{2}Z'I_n=0.\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

因此,相邻的部分(除了第一个与最后一个以外)的电流由下述有限差分方程来联系*

$$(2Z+Z')I_k - Z(I_{k+1}+I_{k-1})=0. \tag{25}$$

如同解对应的微分方程一样,我们可以形式地求出方程(25)的解如

$$I_k = Ae^{\gamma k}+Be^{-\gamma k}, \tag{26}$$

其中 A 与 B 是任意常数,而 γ 是适当地选出的.

把(26)式代入(25)式,得到一个关于 γ 的方程:$2Z+Z'-2Z\operatorname{ch}\gamma=0$,由此

$$\operatorname{ch}\gamma = 1+\frac{Z'}{2Z}. \tag{27}$$

常数 A 与 B 由"边值条件"来确定,即是,由方程(24)的第一个与最后一个方程来确定.求出这些常数,我们便把表达式(26)写成

$$I_k = \frac{U}{Z}\frac{\operatorname{ch}(n-k)\gamma}{\operatorname{sh}\gamma\operatorname{sh}n\gamma} \tag{28}$$

的形式.作为例子,我们来讨论阻流线圈滤波器,对于它来说,$Z'=R+Lp$, $Z=\frac{1}{pC}$,接在常数电动势 U_0 上.从(27)式有

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{2}{LC}(1-\operatorname{ch}\gamma)=0, \tag{29}$$

且公式(28)具有形式

$$I_k = U_0 C\frac{\operatorname{ch}(n-k)\gamma}{\operatorname{sh}\gamma\operatorname{sh}n\gamma}.$$

在此,在点 $\gamma_\nu=\frac{i\nu\pi}{n}$ $(\nu=0,1,\cdots,n)$处,分母变为0,按公式(29),这些点对应着一阶极点

$$p=0,\quad p=-\frac{R}{L}\quad(\nu=0),\quad p=-\sigma\pm i\omega_\nu\quad(\nu=1,2,\cdots,n),$$

其中 $\sigma=\frac{R}{2L}$, $\omega_\nu=\sqrt{\frac{2}{LC}\left(1-\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)-\frac{R^2}{4L^2}}$.像原函数 $i_k(t)$可按展开定理来求出.为此,首先利用公式(29),算得

$$B'=\frac{d}{dp}(\operatorname{sh}\gamma\operatorname{sh}n\gamma)=(\operatorname{cth}\gamma\operatorname{sh}n\gamma+n\operatorname{ch}n\gamma)\left(LCp+\frac{RC}{2}\right).$$

取当 $\gamma\to\gamma_0=0$ 时,因而,相应地,取 $p\to0,-\frac{R}{L}$时的极限,求得 $B'_0=\pm nRC$.类似地,在 $\gamma\to\gamma_n=i\pi$,因而 $p\to-\sigma_n\pm i\omega_n$时,求得 $B'_n=\pm2i(-1)^n nLC\omega_n$;而当 $\gamma\to\gamma_\nu$ $(\nu=1,2,\cdots,n-1)$时,$B'_\nu=\pm i(-1)^\nu nLC\omega_\nu$.于是展开定理给出滤波器在第 k 个部分上的电流

$$i_k(t)=\frac{U_0}{nR}-\frac{U_0}{nR}e^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{(-1)^k U_0}{nL\omega_n}e^{-\sigma t}\sin\omega_n t+\frac{2U_0}{nL}e^{-\sigma t}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\sin\omega_\nu t}{\omega_\nu}\cos\frac{k\nu\pi}{n}. \tag{30}$$

这里,第一项给出稳定状态,且等于电压除以全部的欧姆电阻,其余的项给出瞬变电流.振荡的各项的阻尼相同,当$\frac{R}{2L}$很小时,频率是

---

* 引入差 $\Delta I_k=I_{k+1}-I_k$和$\Delta^2I_k=\Delta I_{k+1}-\Delta I_k$,可以把方程(25)改写成$\Delta^2 ZI_{k-1}-Z'I_k=0$,这方程属于(带常系数)的线性有限差分方程一类.这些方程的解许多地方类似于解相应的微分方程,有关有限差分的知识,读者可以在 А.О.Гельфонд 的书《有限差分计算》("Исчисление конечных разностей" (М.:Гостехиздат.1952)中找到.

$$\omega_k \approx \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

最大的频率是 $\omega_n = \frac{2}{\sqrt{LC}}$；当增大 n 时频率之间的差数减少，亦即，滤波器对于整个的频率带很好地调谐为谐振．因此它被称做频带滤波器．

例 8 具有无穷多个元件的滤波器研究起来更为简单．在这种情形，方程(27)保持不变，而在公式(28)中应当取 $n \to \infty$ 时的极限

$$I_k = \frac{U}{Z} \frac{e^{-k\gamma}}{\operatorname{sh} \gamma} \tag{31}$$

(我们设 $\operatorname{Re} \gamma > 0$)．在这里变换 $Z \operatorname{sh} \gamma = Z\sqrt{\operatorname{ch}^2 \gamma - 1}$ 和 $e^{\gamma} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \gamma - 1} + \operatorname{ch} \gamma$，按公式(27)得出

$$I_k = \frac{U}{\sqrt{ZZ'}} \frac{\left\{\left(1 + \frac{Z'}{2Z}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{Z'}{2Z}\right)^2 - 1}\right\}^k}{\sqrt{1 + \frac{Z'}{2Z}}}. \tag{32}$$

作为例子，我们考虑由电容与电阻 $\left(Z = \frac{1}{Cp}, Z' = R\right)$ 所组成的无穷滤波器，接电在常数电动势 U_0 上．公式(32)给出

$$I_k = \frac{2U_0}{R\lambda^k} \frac{\{(p + \lambda) - \sqrt{p^2 + 2\lambda p}\}^k}{\sqrt{p^2 + 2\lambda p}},$$

其中 $\lambda = \frac{2}{RC}$．按表上的公式 31 求出像原函数为

$$i_k(t) = \frac{2U_0}{R} e^{-\lambda t} I_k(\lambda t), \tag{33}$$

其中 $I_k(t) = J_k(it)/i^k$ 是虚变元的 k 阶圆柱函数(见第 96 目)．

86．偏微分方程 算子方法成功地应用于解决数学物理方程中的所谓**非平稳问题**．为简单起见，我们将限制在下述情况：所求的函数 u 是依赖于两个独立变量 x 及 t 的，其中第一个自变量 x 我们解释为空间坐标，而第二个为时间．除此之外，我们将假定微分方程具有形式：

$$L[u] = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

其中 a, b, c, a_1 及 b_1 都是给定在区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上的一个变量 x 的连续函数．我们将恒设 $a > 0$，且考虑下列两种基本情况：1) $a_1 < 0$——双曲线型情况，以及 2) $a_1 \equiv 0$，$b_1 < 0$——抛物线型情况．

在我们的情况下，非平稳问题可表述为下面的方式：

对于 $0 \leqslant x \leqslant l$ 与 $t \geqslant 0$，求出微分方程(1)的这样的解 $u(x, t)$，它满足给定的始值条件

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{2}$$

(第二个只在双曲线型的情况时给出)，与边值条件

$$u(0,t)=f(t),\quad \alpha\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\beta\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}=\gamma u(l,t),\tag{3}$$

其中 α,β,γ 都是常数*.

问题的非平稳性可表为:所考虑的解是本质上依赖于始值条件的(物理过程的"不稳定的","瞬变的"状态).

我们假定:$u,\frac{\partial u}{\partial x}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$视为 t 的函数都是像原函数,并且用

$$U(p,x)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt$$

表示函数 u 的像.根据我们作的假定,这时

$$\frac{\partial u}{\partial x}\doteqdot\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial x}e^{-pt}dt=\frac{dU}{dx},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\doteqdot\int_0^\infty\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-pt}dt=\frac{d^2U}{dx^2},$$

(U 对于 x 的求导数我们用记号 d 来表示,而不用∂,因为在后面 p 将总是只视为参数).按像原函数的微分法得

$$\frac{\partial u}{\partial t}\doteqdot pU-u(x,0),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\doteqdot p^2U-u(x,0)p-\frac{\partial u(x,0)}{\partial t},$$

或,考虑到始值条件,

$$\frac{\partial u}{\partial t}\doteqdot pU-\varphi(x),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\doteqdot p^2U-p\varphi(x)-\psi(x).$$

还要假定:$f(t)$是像原函数,且 $F(p)\doteqdot f(t)$,于是边值条件给出

$$U\Big|_{x=0}=F(p),\left[\alpha\frac{dU}{dx}+\beta(pU-\varphi)\right]_{x=l}=\gamma U\Big|_{x=l}.$$

因此,算子法将前面给出的偏微分方程(1)的非平稳问题的求解归结为:在边值条件

$$a\frac{d^2U}{dx^2}+b\frac{dU}{dx}+AU+B=0,\tag{4}$$

其中

$$A=c+a_1p^2+b_1p,B=-a_1p\varphi-a_1\psi-b_1\varphi,$$

下来解常微分方程

$$U\Big|_{x=0}=F(p),\left[\alpha\frac{dU}{dx}+(\beta p-\gamma)U-\beta\varphi\right]_{x=l}=0\tag{5}$$

且 p 是个复参数.

前面所作的讨论表明:在采用的条件下,非平稳问题的解 u 的像 U 满足方程(4)与边值问题(5).如果知道:非平稳问题有唯一的解,这个解连同它的前二阶导数一起满足第 79 目中加在像原函数上的条件,而且如果关于方程(4)的问题(5)也有唯一的解 U,则显然非平稳问题的解可作为 U 的像原函数来得到.

---

* 边值条件可稍加改变.除此之外,时常遇到 $l=\infty$的情形,于是第二个边值条件就没有了.

我们来举出一些例子:

例 1 在细长的杆子上的温度 $u(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{6}$$

其中 a^2 是常系数. 考虑在一端为有限的杆子 $0<x<\infty$ 上的温度的分布,如果已知道它左端温度的变化规律,而且杆子的初始温度等于 0:

$$u\Big|_{t=0}=0,\ u\Big|_{x=0}=f(t).\tag{7}$$

过渡到像,得出一个具有复参数 p 的常微分方程

$$pU=a^2\frac{d^2U}{dx^2},\tag{8}$$

它必须在条件

$$U\Big|_{x=0}=F(p)\tag{9}$$

下解出. (8)的通解是

$$U=Ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_1e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

在此应有 $C_1=0$,因为否则当 $x\to\infty$ 时 U 将无限制地增大. 条件(9)在这时给出 $C=F(p)$,因此

$$U=F(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

为了求得像原函数,首先考虑特殊情形 $f(t)\equiv 1$,于是 $F(p)=\frac{1}{p}$, $U_1=\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$,因而按表中的公式 42 求得 U_1 的像原函数为

$$u_1(x,t)=\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\tau^2}d\tau.\tag{10}$$

在任意的边值条件(7)的情形,利用第 81 目的杜阿梅尔积分(6),我们有 $U(p)=pF(p)U_1(p)$,因此*

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}f\left(t-\frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right)e^{-\xi^2}d\xi\end{aligned}\tag{11}$$

$\left(我们令\ \xi=\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)$. 当 $x=0$ 时,从表达式(11)我们得出

$$u(0,t)=f(t)\mathrm{erf}(\infty)=f(t),$$

这正是所要求的.

例 2 同一问题,但在杆子的左端在温度为 0 的介质中发生热辐射,杆子的初始温度是 $u_0=$ const. 问题变为在始值条件与边值条件

---

* 在第 81 目的记号下,这里的

$$g(t)=\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),\quad g(0)=0,\quad g'(t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

$$u\Big|_{t=0}=u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=hu\Big|_{x=0} \tag{12}$$

下解方程 (6)($h>0$,为常数).算子方程具有形式

$$pU-a^2\frac{d^2U}{dx^2}=u_0,$$

应当在条件$\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0}=h\cdot U\Big|_{x=0}$下来解它.这方程的解当 $x\to\infty$时有界,具有形式

$$U=\frac{u_0}{p}+Ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

利用边值条件,最后得出

$$U=\frac{u_0}{p}\left(1-\frac{h}{\frac{\sqrt{p}}{a}+h}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)$$

$$=\frac{u_0}{p}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)+\frac{u_0}{a}\frac{1}{\sqrt{p}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}+h\right)}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

按表上的公式 42 有$\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\doteqdot \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$,因此,第一项的像原函数等于 $u_0\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.要得到第二项的像原函数,我们注意,按滞后定理及相似定理有

$$F(p)=\frac{1}{\frac{p}{a}+h}e^{-p\frac{x}{a}}\doteqdot ae^{-h(at-x)}\eta(at-x).$$

于是按第 81 目的艾弗洛斯定理的推论(11)得出

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{p}}{a}+h}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\doteqdot\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x}{a}}^{\infty}e^{-h(a\tau-x)-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau.$$

在这里作代换$\frac{\tau+2aht}{2\sqrt{t}}=\xi$,最后得到

$$u(x,t)=u_0\left\{\mathrm{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}+e^{hx+a^2h^2t}\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)\right\}. \tag{13}$$

例 3 讨论在有限长的杆子$0<x<l$上的温度的分布,这杆子的左端是热绝缘的,而在右端上保持常温 u_1,初始温度 u_0也是常数.问题归结为在条件

$$u\Big|_{t=0}=u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=l}=u_1$$

下解方程(6).算子方程具有形式

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{p}{a^2}U=-\frac{u_0}{a^2},$$

它应当在条件

$$\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0}=0,\quad U\Big|_{x=l}=\frac{u_1}{p}$$

下被解出.通解具有形式

$$U=\frac{u_0}{p}+C_1\,\mathrm{sh}\frac{\sqrt{p}}{a}x+C_2\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{p}}{a}x.$$

以第一个边值条件代入,得 $C_1=0$;第二个边值条件代入后,得 $C_2=\frac{u_1-u_0}{p}\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{p}}$.因此,解的像具有形式

$$U=\frac{u_0}{p}+\frac{u_1-u_0}{p}\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{p}}{\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{p}}.$$

因为双曲余弦是偶函数,并且它的泰勒展开式只含有变元的偶次项,故函数 $U(p)$ 是单值的.这函数是个亚纯函数,而且在点 $p=0$ 与 $p_k=-\frac{a^2\pi^2}{l^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2$ $(k=1,2,\cdots)$ 处具有单极点.可以证明:它满足第二展开定理的条件*.

我们记 $A(p)=u_0\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{p}+(u_1-u_0)\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{p}$, $B(p)=p\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{p}$,于是 $U=\frac{A(p)}{B(p)}$, $A(0)=u_1$, $B'(0)=1$,且当 $p=p_k=-\frac{a^2\pi^2}{l^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2$, $k=1,2,\cdots$ 时,我们有

$$A(p_k)=(u_1-u_0)\operatorname{ch}\frac{x}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)i\pi=(u_1-u_0)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l},$$

$$B'(p_k)=\frac{l}{2a}\sqrt{p_k}\operatorname{sh}\frac{l}{a}\sqrt{p_k}=(-1)^k\frac{\pi}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right).$$

于是由第二展开定理得出

$$u(x,t)=u_1+\frac{2(u_1-u_0)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k-\frac{1}{2}}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 t}. \tag{14}$$

例 4 为了减小发生在核子反应堆中的链锁反应的结果而释放出来的中子的速度,应用了减速剂(通常是石墨减速剂).在半空间 $x>0$ 形状内考虑减速剂,它包括平面的中子源,设它在平面 $x=x_0$ 内.在众所周知的简化条件下在这种减速剂里中子的减速过程由微分方程

$$\frac{\partial\chi(x,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial^2\chi(x,\theta)}{\partial x^2}+\delta(x-x_0)\delta(\theta) \tag{15}$$

描述,其中 θ 表示中子的象征性年龄,$\chi(x,\theta)$ 表示它们的减速的密度,亦即在单位体积和单位时间内的中子数,而 δ 表示脉冲函数**

这方程需要在边值条件

---

* 我们拟定证明的思路:令 $\frac{l}{a}\sqrt{p}=q$,于是重复我们在第 71 目中对于 $\cot z$ 的讨论,我们证得函数

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{p}}{\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{p}}=\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{l}q}{\operatorname{ch}q}$$

在去掉极点(用小圆)后的平面上是有界的.由此推知:函数 $\frac{1}{p}\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{p}}{\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{p}}$ 在某一族圆周上当 $p\to\infty$ 时趋于 0 (定理的条件 2);此外,在 $|p|$ 较大下这函数的模,不超过某个常数乘上 $\frac{1}{|p|}e^{\frac{x-l}{a}\sqrt{|p|}}$,并且我们这里 $x<l$,所以这函数在直线 $(\alpha-i\infty,\alpha+i\infty)$ 上绝对可积(定理的条件 3).在本节第一版这个地方犯了错误,这个错由(朝鲜)金圣延友好地指出.

** 方程(15)的推导读者可以在 И. Снеддон 的书[10] § 27 中找到.

$$\left(\chi-\gamma\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=0,\tag{16}$$

其中 γ 表示某个常数(这关系式物理上表示通过平面 $x=0$ 的整个中子流等于 0 的条件)和当 $x\to\infty$ 时对一切 θ,减速的密度趋向于 0,即

$$\lim_{x\to\infty}\chi(x,\theta)=0\tag{17}$$

条件下解出.初始值条件(在 $\theta=0$ 时的条件)没有,因为方程包含脉冲函数.

应用关于 θ 的拉普拉斯变换和利用关系式 $\delta(\theta)\doteqdot 1$,我们得出算子方程

$$pX=\frac{d^2X}{dx^2}+\delta(x-x_0).\tag{18}$$

方程中具有脉冲函数导致它的解在 $x=x_0$ 保持连续,而它的导数在这一点上有一个间断点.事实上,对方程(18)按 x 沿线段 (x_0-h,x_0+h) 进行积分,并且利用 δ 函数的积分性质,我们求得

$$p\int_{x_0-h}^{x_0+h}Xdx=\frac{dX}{dx}\bigg|_{x_0-h}^{x_0+h}+1,$$

由此,利用函数 X 的连续性,在 $h\to 0$ 时取极限,我们得出

$$\frac{dX}{dx}\bigg|_{x_0-0}-\frac{dX}{dx}\bigg|_{x_0+0}=1.\tag{19}$$

根据所述,方程(18)在 $x<x_0$ 时的通解可以取成形状 $X=Ae^{(x_0-x)\sqrt{p}}+Be^{-(x_0-x)\sqrt{p}}$,而在 $x>x_0$ 时,考虑到条件(17)取形状 $X=Ce^{-(x-x_0)\sqrt{p}}$,其中 A,B 和 C 是某些常量.条件(16)和(19),还有解在 $x=x_0$ 时连续的条件导出方程组

$$A(1+\gamma\sqrt{p})e^{x_0\sqrt{p}}+B(1-\gamma\sqrt{p})e^{-x_0\sqrt{p}}=0,$$
$$\sqrt{p}(-A+B+C)=1,$$
$$A+B-C=0,$$

完全决定这些常量.解这个方程组,在进行不复杂的变换之后,我们求得算子解

$$X=\frac{e^{-|x-x_0|\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}}+\frac{e^{-(x+x_0)\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}}-\frac{e^{-(x+x_0)\sqrt{p}}}{\gamma p+\sqrt{p}}.\tag{20}$$

前两项的像原函数在表中有.为了求出第三项的像原函数,我们记 $\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\beta p+\sqrt{p}}=\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$,于是 $F(p)=\frac{e^{-\alpha p}}{1+\beta p}$,根据滞后定理,我们求得像原函数 $f(t)=\frac{1}{\beta}e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}\eta(t-\alpha)$.因此,根据艾弗洛斯定理的推论(第 81 目公式(11))

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\beta p+\sqrt{p}}\doteqdot\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{\beta}-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau.$$

如果在幂次中分出完全平方,并且令 $\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{\beta}=\xi$,上面所得的积分很容易通过函数 Erf 来表示,最终获得

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\beta p+\sqrt{p}}\doteqdot\frac{1}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{t}{\beta^2}}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{\beta}\right).\tag{21}$$

由此可见,我们求得解(20)的像原函数——中子减速密度的最终表达式*

$$\chi(x,\theta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\left\{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\theta}}+e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}\right\}-\frac{1}{\gamma}e^{\frac{x+x_0}{\gamma}+\frac{\theta}{\gamma^2}}\operatorname{Erf}\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\theta}}+\frac{\sqrt{\theta}}{\gamma}\right). \tag{22}$$

我们引入在 γ 值很小时这函数的近似表达式. 利用函数 $\operatorname{Erf} x$ 的渐近公式(第 76 目公式(11)),对于大的 x 可以写 $\operatorname{Erf} x\approx\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}$. 因此,对于小的 γ,公式(22)的后一项渐近地等于

$$-\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\theta}}+\frac{\sqrt{\theta}}{\gamma}\right)}e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}\approx-\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\left(1-\frac{x+x_0}{2\theta}\right)e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}},$$

并且对于小的 γ

$$\chi(x,\theta)\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\left\{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\theta}}-e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}\right\}+\frac{x+x_0}{2\theta\sqrt{\pi\theta}}\gamma e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}. \tag{23}$$

对于物理应用重要的是会确定点 $x=x_c$,在这点上减速的速度等于 0,这点就是所谓的外推的尾端点. 根据近似表达式(23)我们从条件 $\chi(x_c,\theta)=0$ 求出 $1-e^{-\frac{x_c x_0}{\theta}}\approx\gamma\frac{x_c+x_0}{\theta}$. 如果假设 $x_c x_0$ 与 θ 相比很小,我们得到 $-x_c x_0=\gamma(x_c+x_0)$,由此,

$$x_c\approx-\frac{\gamma x_0}{x_0+\gamma}\approx-\gamma.$$

例 5　在不稳定绕行飞机机翼的线性理论中研究了下面的问题**.

两个变量的函数 $f(x,y)$——绕行机翼的超音速流的所得到的势能——在 $x<0$ 时等于 0,而在 $x\geqslant0$ 时满足微分方程

$$b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+c^2 f=0 \tag{24}$$

其中 b^2 和 c^2 为正常数,而且在 $x=0$ 时有零的条件

$$f\Big|_{x=0}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,$$

并且在 $y\to+\infty$ 时 $f(x,y)$ 仍然有界.

从物理学考虑出发函数 $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=0}=\alpha(x)$ 认为是已知的,它是机翼表面上流所经受的倾斜角,并且要求通过这个函数来表示机翼表面上势能的值 $f(x,0)$.

问题非常优美地用算子方法解出. 对变量 x 的拉普拉斯变换把 $f(x,y)$ 转变为满足方程 $\frac{d^2F}{dy^2}-b^2(p^2+\lambda^2)F=0$ 的函数 $F(p,y)$,其中 $\lambda^2=\frac{c^2}{b^2}$,表示正常数. 这方程的通解有形状 $F=Ce^{-b\sqrt{p^2+\lambda^2}\,y}+C_1e^{b\sqrt{p^2+\lambda^2}\,y}$,并且在所讨论的问题中 $C_1=0$,因为 $F(p,y)$ 在 $y\to+\infty$ 时应该保持有界. 因此,$\frac{dF}{dy}\Big|_{y=0}=-Cb\sqrt{p^2+\lambda^2}=-A(p)$,其中 $A(p)$ 为流的倾斜角 $\alpha(x)$ 的像,由此

---

* 算子解的导数在 $x=x_0$ 的间断点在过渡到像原函数时消失了.

** 例如,可见 Л. Хоуарт 编辑的“Современное состояние аэродинамики больших скоростей”(М.: ИЛ. 1955)第一卷第 9 章 § 6.

$$F(p,0)=C=\frac{A(p)}{b\sqrt{p^2+\lambda^2}}.$$

利用乘法定理和表中公式 28,我们得到问题的解

$$f(x,0)=\frac{1}{b}\int_0^x \alpha(x-\xi)J_0(\lambda\xi)d\xi. \tag{25}$$

例 6 具有长度 l 的杆子处于静止状态,它的端点 $x=0$ 固定,而在自由的端点 $x=l$ 沿着杆子的轴的方向施以力 $A\sin\omega t$. 求出杆子的纵向振动.

杆子的振动方程具有形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 $u=u(x,t)$是纵向的位移,a^2是与杆子的质料有关的一个常数系数. 其始值条件与边值条件可以写为

$$u\Big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0;\quad u\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\frac{A}{E}\sin\omega t, \tag{26}$$

其中 E 为弹性模 * ,算子方程具有形式

$$p^2U=a^2\frac{d^2U}{dx^2},$$

它应当在条件

$$U\Big|_{x=0}=0;\quad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=l}=\frac{A}{E}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

下被解出. 取其通解的形式为

$$U=C_1\operatorname{ch}\frac{p}{a}x+C_2\operatorname{sh}\frac{p}{a}x,$$

代入 $x=0$ 给出 $C_1=0$;代入 $x=l$ 得出 $C_2=\dfrac{b}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\dfrac{p}{a}l}$,其中 $b=\dfrac{Aa\omega}{E}$. 因此,算子解具有形式

$$U=\frac{b}{p(p^2+\omega^2)}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}p}{\operatorname{ch}\dfrac{l}{a}p}. \tag{27}$$

要求出像原函数,仍可利用第二展开定理. 函数 U 具有一个实的极点 $p=0$ 与无穷多个纯虚的极点,且所有这些虚极点都是成对地共轭的. 位于上半个平面的极点是:

$$p=i\omega,\ p_k=i\frac{\pi a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)=i\omega_k\quad(k=1,2,3,\cdots),$$

都是一阶的而且是不相同的,只要对于不论什么整数 k,都有 $\omega_k\neq\omega$(这是没有共振的情形的条件,我们将假定其被满足).

根据第二展开定理我们得

$$u(x,t)=2\mathrm{Re}\left\{\frac{A(i\omega)}{B'(i\omega)}e^{i\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{i\omega_k t}\right\}$$

---

* 利用这样情况,根据胡克定律沿杆子作用的力 X 与位移 u 由关系式 $X=E\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 联系着.

$$= \frac{1}{\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t + \frac{2ab}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{\omega_k}{a} x}{\omega_k^2 - \omega^2} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k}. \tag{28}$$

例 7 长度为 l 的两根相同的杆子,以相同的速度 v_0 沿着自己的轴彼此相对地运动着.确定在撞击后杆子上点的位移.

假设撞击发生于 $t=0$ 时,且在坐标的原点处.由于对称,只要讨论一根杆子上的点的位移 $u(x,t)$ 便够了,例如取右面的那根.问题归结于:在条件

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-v_0;\quad u\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$$

下解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

算子方程可写成形式

$$\frac{d^2 U}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}U=\frac{v_0}{a^2}, \tag{29}$$

而边值条件转为

$$U\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=l}=0.$$

在这些条件下,方程(29)的解具有形式

$$U=-\frac{v_0}{p^2}\left\{1-\frac{\operatorname{ch} p\frac{l-x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}\right\}=-\frac{v_0}{p^2}+\frac{v_0}{p^2}\,\frac{e^{-p\frac{x}{a}}+e^{-p\frac{2l-x}{a}}}{1+e^{-\frac{2pl}{a}}}. \tag{30}$$

展开 $\left(1+e^{-\frac{2pl}{a}}\right)^{-1}$ 为几何级数(这级数是收敛的,因为 $\left|e^{-\frac{2pl}{a}}\right|<1$),得到

$$U=-\frac{v_0}{p^2}+\frac{v_0}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{e^{-p\frac{2kl+x}{a}}+e^{-\frac{2(k+1)l-x}{a}}\right\},$$

再利用滞后定理,得像原函数为

$$u(x,t)=v_0\left\{-t+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\left(t-\frac{2kl+x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{2kl+x}{a}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(t-\frac{2(k+1)l-x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{2(k+1)l-x}{a}\right)\right]\right\}. \tag{31}$$

这个解只适用到两根杆子相接触时为止,即是说,适用到 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}<0$ 时.但从公式(30)有 $\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0}=-\frac{v_0}{ap}\operatorname{th}\frac{pl}{a}$,且按第 80 目的公式(19),$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=-g(t)$,并且在此公式中 $A=\frac{v_0}{a}$,$\tau=2\frac{l}{a}$.因此,只有当 $0<t<2\frac{l}{a}$ 时才有 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}<0$,而在这个区间内式(31)中只有三项异于 0,即

$$u(x,t)=v_0\left\{-t+\left(t-\frac{x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{x}{a}\right)+\left(t-\frac{2l-x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{2l-x}{a}\right)\right\}. \tag{32}$$

由此可见,当 $t\to\frac{2l}{a}$ 时,有 $u(x,t)\to 0$,$\frac{\partial u}{\partial t}\to v_0$,即是说,杆子互相弹回,没有振动,而具有速度 v_0.

87. 传输线的计算 我们将把双导线的传输线考虑作均匀地分布着的电阻、电

感、电容与漏损的系统. 它们的对于单位长度而言的数量,我们将分别用 R, L, C 与 G 来表示(图 191). 我们固定了在点 x 与 $x+\Delta x$ 间的一段电线,于是对于电压 u 与电流 i 将有

$$u(x,t)-u(x+\Delta x,t)=L\Delta x\frac{\partial i}{\partial t}+R\Delta x\cdot i,$$

$$i(x,t)-i(x+\Delta x,t)=C\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}+G\Delta x\cdot u,$$

取 $\Delta x\to 0$ 时的极限,得到

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri,\quad -\frac{\partial i}{\partial x}=C\frac{\partial u}{\partial t}+Gu. \tag{1}$$

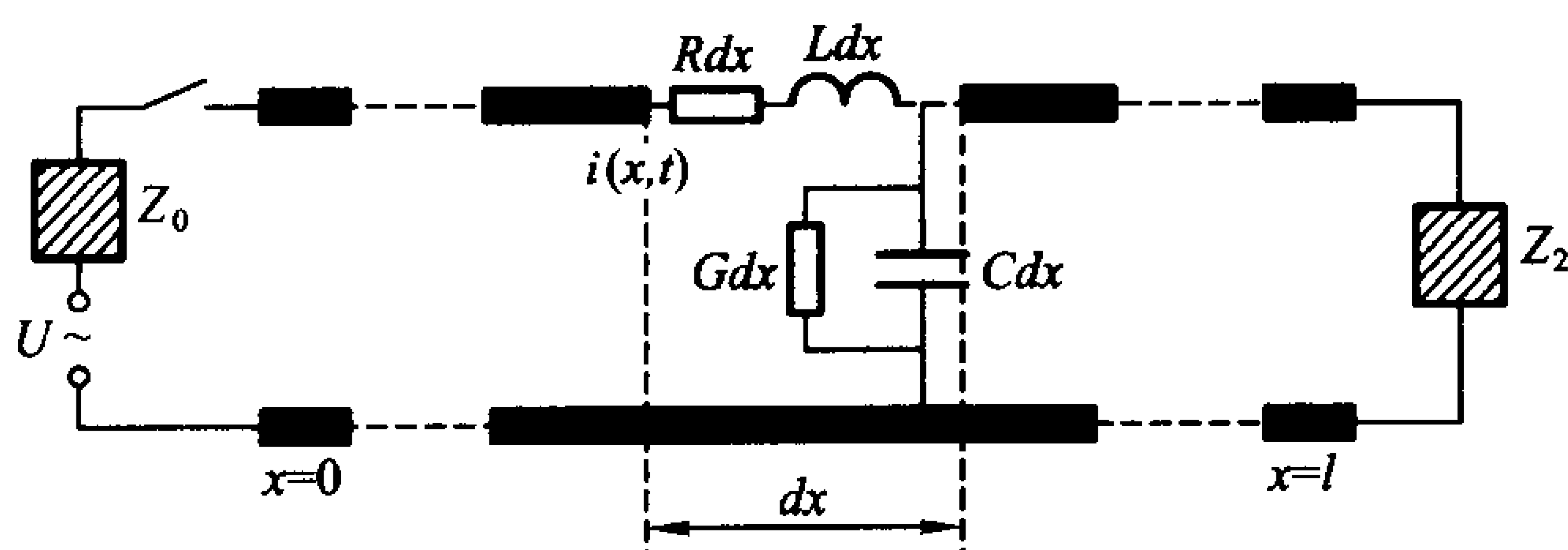


图 191

这个一阶的偏微分方程组,容易化为一个方程;例如,对于电流我们得到

$$LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(CR+GL)\frac{\partial i}{\partial t}+RGi=\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \tag{2}$$

对于电压,有完全同样的方程成立. 由于系数 L 与 C 都是非负的,故方程(2)或者是双曲线型或者是抛物线型的,这视 $LC>0$ 或 $LC=0$ 而定.

分别用 U 与 I 来表示电压与电流的像(对时间),且用 i_0 与 u_0 表示电流与电压在 $t=0$ 时的数值,于是方程组(1)便对应着下列算子方程组

$$(Lp+R)I=-\frac{dU}{dx}+Li_0,\quad (Cp+G)U=-\frac{dI}{dx}+Cu_0. \tag{3}$$

从方程组(3)中消去算子电流,得到关于 U 的方程

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\gamma^2U=L\frac{di_0}{dx}-C(Lp+R)u_0, \tag{4}$$

其中

$$\gamma=\sqrt{(Lp+R)(Cp+G)} \tag{5}$$

表示所谓波的传播系数. 在零的始值条件的情形,方程(4)的右端将等于 0,因而这方程的通解将具有形式

$$U=Ae^{-\gamma x}+Be^{\gamma x}, \tag{6}$$

其中 A 与 B 只可能与 p 有关,而与 x 无关. 这些函数由在传输线的端点处的条件来

确定.

对于算子电流,可得到类似于方程(4)的方程,但是知道了 U 之后,电流可以更简单地从方程组(3)的第一个确定为

$$I=-\frac{1}{Lp+R}\left(\frac{dU}{dx}-Li_0\right). \tag{7}$$

在零的始值条件的情形,利用解(6)得出

$$I=\frac{1}{Z}(Ae^{-\gamma x}-Be^{\gamma x}), \tag{8}$$

其中

$$Z=\sqrt{\frac{Lp+R}{Cp+G}} \tag{9}$$

是所谓传输线的特性阻抗.

在一般的情形,传输线的方程的研究呈现极大的困难,因而通常要作某些简化的假定.这些假定中的一个,是假定传输线的长度是无穷的.通常用自点 $x=0$ 沿正的 x 轴延伸到无穷远来表示这无穷长的电线. U 与 I 在无穷远处是有界的这一条件,这时化为:在方程(6)与(8)中,系数 $B=0$(我们设 $\mathrm{Re}\,\gamma>0$),因此这些方程取下列形式:

$$U=Ae^{-\gamma x},\quad I=\frac{A}{Z}e^{-\gamma x}. \tag{10}$$

在物理上,我们的条件表示:我们略去了在传输线的端点处的波的反射现象.

除此之外,有时还略去了传输线的各种不同参变量,或者设这些参变量是由某些关系联系着的.

我们来看一些例子:

例 1 无穷长的传输线没有电感与漏损(电缆)* 这里, $L=G=0,\gamma=\sqrt{RCp},Z=\sqrt{\frac{R}{Cp}}$,因此方程(10)具有形式

$$U=Ae^{-\sqrt{RCp}x},\quad I=A\sqrt{\frac{Cp}{R}}e^{-\sqrt{RCp}x}. \tag{11}$$

数值 A 由电缆的接电条件来求出.例如,在左端接于常数电动势上时,则从方程组(11)的第一个方程,当 $x=0$ 时得出 $A=\frac{U_0}{p}$,于是按像表中的公式 42 及 6(在其中设 $\alpha=\sqrt{RC}x$),立刻可求得电压与电流为

$$u(x,t)=U_0\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right),\quad i(x,t)=U_0\sqrt{\frac{C}{R\pi t}}e^{-\frac{RCx^2}{4t}}. \tag{12}$$

注意到,确定电压的问题,完全类似于前一目的例 1 中的确定温度的问题 $\left(\text{只需令 } a=\frac{1}{\sqrt{RC}}\right)$.所以按第 86 目的公式(11),当接电缆于任意的电动势上时,得

* 在地下或水下的电缆,由于导线接近的结果,可以略去自感应;而在良好绝缘时,也可以略去漏损.

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}}^{\infty} f\left(t-\frac{x^2RC}{4t\xi^2}\right)e^{-\xi^2}d\xi, \tag{13}$$

这里,电动势的变化规律由函数 $f(t)$ 给出.

例 2 利用在第 78 目末尾所述的路线形变的方法,借助于拉普拉斯反演公式,来直接地求出在电缆中的稳定情况,较为方便.例如,当接电缆在电动势 $u(t)=U_0\sin\omega t$ 上时,我们求稳定电流.

从方程(11)有

$$I=\frac{U_0\omega}{p^2+\omega^2}\sqrt{\frac{Cp}{R}}e^{-\sqrt{RCp}x},$$

因而按反演公式得到

$$i(x,t)=\frac{U_0\omega}{2\pi i}\sqrt{\frac{C}{R}}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{\sqrt{p}}{p^2+\omega^2}e^{-\sqrt{RCp}x+pt}dp. \tag{14}$$

将积分直线形变为图 174 中所示的周线 L,按第 78 目的方法求得

$$i(x,t)=U_0\sqrt{\frac{C\omega}{R}}e^{-x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}-x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right)-\frac{U_0\omega}{2\pi i}\sqrt{\frac{C}{R}}\int_L,$$

其中第一项表示(14)的被积函数在它的奇点 $p=\pm i\omega$ 处($\sqrt{p}$ 表示根式的由条件 $-\pi<\arg p<\pi$ 来确定的那一分支)的留数之和,而在积分号下的就是在(14)中的那个函数.作代换 $pt=q$,我们得到

$$\int_L=\int_{L^*}\frac{\sqrt{q}}{t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{q^2}{t^2}+\omega^2\right)}e^{-x\sqrt{\frac{RCq}{t}}+q}dq,$$

其中 L^* 是形状与 L 相同的周线.由此看出:当 $t\to\infty$ 时,积分趋于 0,因此,稳定电流等于

$$i_{稳}(x,t)=U_0\sqrt{\frac{C\omega}{R}}e^{-x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}-x\frac{RC\omega}{2}\right). \tag{15}$$

就特例说,设 $x=0$,便求得在传输线的起点处的稳定电流为

$$i_{稳}=U_0\sqrt{\frac{C\omega}{R}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right).$$

例 3 **经过阻抗的电缆接电** 假定在电缆的左端经过阻抗 Z_0 接在电动势 $u_0(t)$ 上.众所周知,作用的电动势是由在阻抗上的电压下降以及在传输线起点的电动势相加而成的

$$U_0(p)=Z_0I\Big|_{x=0}+U\Big|_{x=0}. \tag{16}$$

对于电缆来说,从方程组(11)求得 $U\Big|_{x=0}=A, I\Big|_{x=0}=\sqrt{\frac{Cp}{R}}A$,因此条件(16)可写成

$$U_0(p)=A\left(1+Z_0\sqrt{\frac{Cp}{R}}\right), \tag{17}$$

由此便可求得 A.

例如,当经过电阻 R_0 接电缆在常数电动势 U_0 上时,有

$$A=\frac{U_0}{p\left(1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)},$$

其中 $\beta = \frac{R}{CR_0^2}$. 由此按公式(11)，算子电压等于

$$U = \frac{U_0 e^{-a\sqrt{p}}}{p\left(1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)} = \frac{U_0 e^{-a\sqrt{p}}}{p} - \frac{U_0}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\frac{p}{\sqrt{\beta}}+\sqrt{p}},$$

其中 $a = x\sqrt{RC}$. 按像表中公式 42 和上一目公式(21)求出像原函数

$$u(x,t) = U_0 \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right) - U_0 e^{x\frac{R}{R_0}+\beta t} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\beta t}\right). \tag{18}$$

按公式(11)，算子电流是

$$I = \frac{U_0 e^{-a\sqrt{p}}}{p\left(1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)}\sqrt{\frac{Cp}{R}} = U_0\sqrt{\frac{C}{R}}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\frac{p}{\sqrt{\beta}}+\sqrt{p}},$$

因此

$$i(x,t) = \frac{U_0}{R_0} e^{x\frac{R}{R_0}+\beta t} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\beta t}\right). \tag{19}$$

例 4　无穷长的传输线没有耗损($R = G = 0$). 按照公式(5)与(9)，波的传播系数等于 $\gamma = \sqrt{LC}p = \frac{p}{v}$，其中 $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 是波的传播速度，而特性阻抗 $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$，因此

$$U = Ae^{-\frac{px}{v}}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}}Ae^{-\frac{px}{v}}. \tag{20}$$

这里 $A = U\Big|_{x=0}$，如果传输线接在任意的电动势 $f(t)$ 上，则按滞后定理得出

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}f\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{21}$$

这表明：沿着这样的传输线，电压与电流的波以固定的速度来传播，而不改变形状.

例 5　无穷长的传输线没有歪曲　这是指的其参数满足条件 $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \delta$ 的传输线(在 $\delta = 0$ 时我们得到上一例题). 这里，$\gamma = \frac{p+\delta}{v}$，其中 $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$，$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$，因此

$$U = Ae^{-\frac{p+\delta}{v}x}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}}Ae^{-\frac{p+\delta}{v}x}. \tag{22}$$

如果这样的电线接在任意电动势 $f(t)$ 上，则

$$u(x,t) = e^{-\frac{\delta}{v}x}f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}e^{-\frac{\delta}{v}x}f\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{23}$$

这表明：在这样的电线上，电压与电流的波以不变的速度 v 来传播，不改变形状，而且具有常数阻尼.

例 6　无穷长的传输线具有耗损而没有漏损($G = 0$)　在这种情况 $\gamma = \frac{1}{v}\sqrt{p^2 + 2ap}$，其中 $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$，$a = \frac{R}{2L}$ 且 $Z = \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{p}\sqrt{p^2 + 2ap}$，因此

$$U = Ae^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2+2ap}}, I = \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{Ape^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2+2ap}}}{\sqrt{p^2+2ap}}. \tag{24}$$

如果这样的传输线接在常数电动势 U_0 上，则 $Ap=U_0$，因而

$$I=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{e^{-\frac{x}{v}\sqrt{(p+a)^2-a^2}}}{\sqrt{(p+a)^2-a^2}}=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}F(p+a),$$

其中 $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}}e^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2-a^2}}$. 按像表中的公式 35（这公式将在第 99 目中导出*）求得像原函数 $f(t)=\eta\left(t-\frac{x}{v}\right)I_0\left(a\sqrt{t^2-\frac{x^2}{v^2}}\right)$,

其中 I_0 是纯虚变元的零阶圆柱函数，再根据位移定理有

$$i(x,t)=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}e^{-at}I_0\left(a\sqrt{t^2-\frac{x^2}{v^2}}\right)\eta\left(t-\frac{x}{v}\right). \tag{25}$$

例 7 在前一例中的传输线接在电动势 $U_0e^{i\omega t}$ 上时的稳定电流. 我们有 $A=U\Big|_{x=0}=\frac{U_0}{p-i\omega}$,

因而按反演公式从(24)中的第二个公式求得

$$i(x,t)=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{pe^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2+2ap}+pt}}{(p-i\omega)\sqrt{p^2+2ap}}dp.$$

这个积分的渐近表达式已在第 78 目中用积分路线形变的方法求得(参看第 78 目的(16)). 以这表达式代入，得

$$i_{稳}=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{i\omega}{\sqrt{2ai\omega-\omega^2}}e^{i\omega t-\frac{x}{v}\sqrt{2ai\omega-\omega^2}}. \tag{26}$$

例 8 有限长 l 的传输线接在常数电动势 U_0 上，右端切断. 由公式(6)与(8)得出

$$U=Ae^{-\gamma x}+Be^{\gamma x},\quad I=\frac{1}{Z}(Ae^{-\gamma x}-Be^{\gamma x}), \tag{27}$$

我们从在端点处的条件

$$U\Big|_{x=0}=A+B=\frac{U_0}{p},\quad I\Big|_{x=l}=\frac{1}{Z}(Ae^{-\gamma l}-Be^{\gamma l})=0$$

来求出常数 A 与 B，因此

$$U=U_0\frac{\operatorname{ch}\gamma(l-x)}{p\operatorname{ch}\gamma l},\quad I=\frac{U_0}{Z}\frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{p\operatorname{ch}\gamma l}. \tag{28}$$

对于具有耗损而没有漏损的传输线，其中 $\gamma=\frac{1}{v}\sqrt{p^2+2ap}$，算子电压的分母具有由方程 $\operatorname{ch}\gamma l=0$ 所确定的无限多个零点：$\gamma l=(2n+1)\frac{\pi}{2}i\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 在平面 p 上，它们对应着函数 U 的由方程

$$p^2+2ap+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2v^2}{l^2}=0$$

所确定的无穷多个极点，由此

$$p=-a\pm i\omega_n,$$

其中 $\omega_n=\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2v^2}{l^2}-a^2}$.

---

* 见第 99 目公式(19)，在这里，$\tau=\frac{x}{v}$，且以 ia 替代 a.

利用第二展开定理,求得

$$u(x,t)=U_0\left\{1-\frac{\pi e^{-at}v^2}{l^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{\omega_n(\omega_n^2+a^2)}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}(a\sin\omega_n t+\omega_n\cos\omega_n t)\right\}.\tag{29}$$

88. 其他积分变换 拉普拉斯变换,按照公式

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt\tag{1}$$

给每一个像原函数 $f(t)$ 置一个像 $F(p)$ 与其对应,并且按照反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp,\tag{2}$$

给每一个像 $F(p)$ 置一个像原函数 $f(t)$ 与其对应,是形如

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)K(t,p)dt\tag{3}$$

的积分变换的特殊情况,其中 $K(t,p)$——积分变换的核——变量 t 和参数 p 的已知函数.这类变换应用于解微分方程和其他分析问题中.在本章结束时我们将指出这类变换中一些重要的并且举一些它们的应用例子.

(1) 傅里叶变换 因为在拉普拉斯反演公式(2)中积分是沿着直线 $\mathrm{Re}\,p=a$ 进行的,所以在这公式中可以令 $p=a+i\sigma$,它就采用形式

$$f(t)=\frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(a+i\sigma)e^{i\sigma t}d\sigma.$$

再引入新的记号

$$f(t)e^{-at}=g(t),\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(a+i\sigma)=G(\sigma).\tag{4}$$

利用这些记号,最后公式可改写成形状

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\sigma)\cdot e^{i\sigma t}d\sigma.\tag{5}$$

直接经拉普拉斯变换的公式(1)可以写成形状

$$F(a+i\sigma)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-at}e^{-i\sigma t}dt,$$

或者在新记号中写成形状

$$G(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}g(t)e^{-i\sigma t}dt.\tag{6}$$

公式(5)和(6)称做**傅里叶反演公式**,而从函数 $g(t)$ 转变到 $G(\sigma)$ 称做**傅里叶变换**.由此可见,把函数 $f(t)$ 和 $F(p)$ 联系起来的拉普拉斯变换是把函数 $g(t)=f(t)e^{-at}$ 和 $G(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(a+i\sigma)$ 联系起来的傅里叶变换,其中 a 是大于函数 $f(t)$ 的增长指数的任何实数.

傅里叶变换的应用范围比拉普拉斯变换的应用范围狭窄得多.这与下面情况有关,为了反常积分 $G(\sigma)$ 的收敛,函数 $g(t)$ 在无穷远处应当满足充分限制的条件,例

如绝对可积性的条件*，亦即积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt$ 收敛. 拉普拉斯积分(1)中具有附加的因子 e^{-at}，"遏止"大自变量值下 $f(t)$ 的值，把像原函数类扩大到这样的函数，这种函数在无穷远处增长不比某一个指数函数快，而这条件实际上完全不是很苛刻的.

特别，如果函数 $f(t)$ 的增长指数等于0和在拉普拉斯反演公式中可以取 $a=0$，那么拉普拉斯变换(1)—(2)不同于傅里叶变换(6)—(5)只是积分前的非本质因子. 在这意义上可以说，傅里叶变换是拉普拉斯变换的特殊情况**.

从物理学观点，傅里叶变换比拉普拉斯变换更自然. 这可以说明如下，公式(5)—(6)类似于函数 $g(t)$ 展开成傅里叶级数的展开公式

$$g(t)=\sum_{n\to-\infty}^{\infty}G_n e^{in\omega t},\quad G_n=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-in\omega t}dt$$

(T 为函数 $g(t)$ 的周期；见第70目的公式(20)—(21)). 事实上，可以把公式(5)看作函数 $g(t)$ 展开成简单谐波振动 $G(\sigma)e^{i\sigma t}$ 的连续谱，这种振动的频率变化不是像傅里叶级数情形中的跳跃，而是连接不断的形式，公式(6)所确定的函数 $G(\sigma)$ 可以看作傅里叶系数 G_n 的类似物，亦即看作带有频率 σ 的振动的复振幅. 量 $|G(\sigma)|$ 表明，这振动在 $g(t)$ 的振动谱中有多少份额，因此称函数 $G(\sigma)$ 为**谱函数**.

根据所述容易理解，傅里叶变换的应用种种方面都类似于拉普拉斯变换的应用.

例 大体上讨论理想的不可压缩的液体在重力作用下产生的无旋运动问题. 为简单起见我们限于无限深的液体中的平面波情形. 使 x 轴水平且垂直波峰，y 轴垂直向上，并且假设液体自由表面的平衡位置与平面 $y=0$ 重合，而且也假设在初始时刻，自由表面占据着平衡位置.

从流体动力学知识知道***，在这问题中液体运动的速度的势能 $u=u(x,y,t)$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{7}$$

和下列边界条件和始值条件:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 当\ y=0, \tag{8}$$

$$u=\varphi(x),\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad 当\ y=0\ 和\ t=0, \tag{9}$$

((9)的第二个条件由我们的假设确定，这假设就是在 $t=0$ 时自由表面占据 $y=0$ 的位置).

按照傅里叶变换引入速度势能的像****

---

* 为了可用傅里叶变换，除了函数 $g(t)$ 的绝对可积条件外，还需要这函数是逐段连续和在 t 轴的每一个有限区间上有有限的改变就足够了. 证明见，譬如，斯米尔诺夫第二卷.

** 注意，在傅里叶变换理论中通常不假设，对于负的 t，$g(t)=0$，因此在公式(6)中积分的下限取 $-\infty$ 而不是0. 在拉普拉斯变换理论中有时也拒绝这种假设，而此时得出所谓双边拉普拉斯变换. 参阅譬如说 Вандер Поль и Бремер"Операдионное исчисление на основе двухсторонието преобразования Ладласа"(M.;ИЛ.1953).

*** 譬如，可见 Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. розе "Теоретическая тидромеханика"第一卷(M.: физматгиз,1963).

**** 见本页前面的脚注*与**.

$$U(\sigma,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y,t)e^{-i\sigma x}dx,$$

此时，当$|x|\to\infty$时，$\frac{\partial u}{\partial x}$和$u\to 0$的假设下，我们得出，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的像是$-\sigma^2 U$*，因此，代替(8)我们得到方程

$$\frac{d^2 U}{dy^2}-\sigma^2 U=0.$$

这方程的解在$y\to-\infty$时趋向于0，有形状

$$U=C(\sigma,t)e^{|\sigma|y},\tag{10}$$

其中$C(\sigma,t)=U\Big|_{y=0}$. 从另一方面，用$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\sigma x}$乘方程(8)并且对$x$从$-\infty$到$+\infty$积分，我们得到

$$|\sigma|C=-\frac{1}{g}\frac{d^2C}{dt^2},$$

由此，

$$C(\sigma,t)=c_1(\sigma)e^{i\sqrt{g|\sigma|}t}+c_2(\sigma)e^{-i\sqrt{g|\sigma|}t}.\tag{11}$$

可是在$y=0$和$t=0$时我们有

$$\frac{dU}{dt}=\frac{dC}{dt}=i\sqrt{g|\sigma|}\{c_1(\sigma)-c_2(\sigma)\},$$

因此，根据(9)的第二个条件，我们有$c_1(\sigma)=c_2(\sigma)=c(\sigma)$. 可是，此时根据(9)的第一个条件，在$y=0$和$t=0$时

$$U=C(\sigma,0)=2c(\sigma)=\Phi(\sigma),$$

其中$\Phi(\sigma)$是函数$\varphi(x)$按傅里叶变换的像.

因此，由(11)我们得出$C=\Phi(\sigma)\cos\sqrt{g|\sigma|}\,t$和按照(10)最终我们找到解的像

$$U=\Phi(\sigma)\cos\sqrt{g|\sigma|}\,te^{|\sigma|y}.$$

为了求解本身，只要利用傅里叶反演公式(5)

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\sigma)\cos\sqrt{g|\sigma|}\,te^{|\sigma|y+i\sigma x}d\sigma.\tag{12}$$

在一般情况下这种积分的计算是困难的，为了简化起见，我们假设，$\varphi(x)=A\delta(x)$，其中δ脉冲函数(物理上这意味着，波是在加于坐标原点的脉冲作用下发生的). 于是按照脉冲函数的积分的性质，我们求得$\Phi(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A$，并且由公式(12)在$y=0$时我们得到

$$u(x,0,t)=\frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{g|\sigma|}\,te^{i\sigma x}d\sigma=\frac{A}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\sqrt{\sigma g}t\cos\sigma xd\sigma$$

(我们把实部分开，并且利用$\cos\sigma x$的偶性)，在经过某些变换以后(我们不谈这些变换)，这个积分通过菲涅耳积分表出(见第73目例6)

---

* 事实上，用分部积分我们求得，在我们采纳的情况下第一阶导数的像有形状

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\sigma x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ue^{i\sigma x}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{i\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{i\sigma x}dx=i\sigma U,$$

类似地第二阶导数的像有形状$(i\sigma)^2U$.

$$u(x,0,t)=\frac{A}{x}\sqrt{\frac{2\tau}{\pi}}\{\cos\tau C(\tau)+\sin\tau S(\tau)\},\tag{13}$$

其中 $\tau=\frac{gt^2}{(4x)}$.

(2) 梅林变换 在双侧拉普拉斯变换公式*(1)和(2)中用 $-p$ 代替 p 和用 $\tau=e^t$ 代替 t,这些公式采取形式

$$F(-p)=\int_0^\infty f(\ln\tau)e^{p\ln\tau}\frac{d\tau}{\tau};\quad f(\ln\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(-p)e^{-p\ln\tau}dp.$$

如果再令 $f(\ln\tau)=g(\tau)$ 和 $F(-p)=G(p)$,那么我们得到所谓**梅林反演公式****

$$G(p)=\int_0^\infty g(t)t^{p-1}dt;\quad g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\frac{G(p)}{t^p}dp\tag{14}$$

(重新写 t 代替 τ).

用初等方法可以证明,梅林变换具有许多与拉普拉斯变换性质类似的性质,例如

$$\begin{gathered}g(\alpha t)\doteqdot\frac{G(p)}{\alpha^p},\quad t^\alpha g(t)\doteqdot G(p+\alpha),\\ f(t)g(t)\doteqdot\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(q)G(p-q)dq\end{gathered}\tag{15}$$

等等. 特别我们要注意有关导数像的定理:如果在 $t\to0$ 和 $t\to\infty$ 时 $g(t)t^{p-1}$ 的极限等于0,则***

$$g'(t)\doteqdot-(p-1)G(p-1),\tag{16}$$

重复应用这个定理,我们得到高阶导数的像的公式. 乘积 $t^kg^{(k)}(t)$ 有简单的像,用分部积分法我们得出:如果 $g(t)t^p\Big|_{t=0}^{\infty}=0$,那么

$$tg'(t)\doteqdot-pG(p).\tag{17}$$

---

* 双侧拉普拉斯变换与通常的拉普拉斯变换不同之处在于,在公式(1)中积分是从 $-\infty$ 到 ∞ 进行的,而不是从0到 ∞,见第455页脚注.

** 为了这些公式可应用,只要 $G(p)$ 在带形 $s_1<s<s_2$ 中解析. 对这带形中的一切 s,积分 $\int_{-\infty}^{\infty}G(s+i\sigma)d\sigma$ 绝对收敛,且在任何更狭窄的带形 $s_1-\delta\leqslant s\leqslant s_2+\delta(\delta>0)$ 内当 $|\sigma|\to0$ 时 $G(s+i\sigma)$ 一致收敛于0. 在第二个公式中积分的直线应该属于这个带形就足够了(譬如,可见柯朗和希尔伯特[17],第95页)).

也可以用函数 $g(t)$ 的术语来叙述可应用性条件:只要要求这函数是逐段连续函数和在半轴 $t>0$ 的每一个线段上有有限改变,并且存在这样两个常数 s_1 和 s_2,$s_1<s_2$,使得积分 $\int_0 g(t)t^{s_1-1}dt$ 和 $\int^\infty g(t)t^{s_2-1}dt$ 绝对收敛. 在第二个公式中的积分的直线也应当属于带形 $s_1<s<s_2$ (譬如可见 E. Титчмарш[9],第65页). 有时把这些类型条件合并起来,并且譬如说,从上面所写积分中第一个的收敛性条件选 s_1,而 s_2 选作函数 $G(p)$ 的从右边最接近直线 $s=s_1$ 的奇点的横坐标.

*** 证明通过分部积分法立刻得出:

$$g'(t)=\int_0^\infty g'(t)t^{p-1}dt=g(t)t^{p-1}\Big|_0^\infty-(p-1)\int_0^\infty g(t)t^{p-2}dt=-(p-1)G(p-1).$$

除此之外，如果 $g'(t)t^{p+1}\Big|_0^\infty=0$，那么

$$t^2g''(t)\doteqdot(p+1)pG(p) \tag{18}$$

等等. 能够使用最后性质去解含有形如 $t^k\frac{d^kx}{dt^k}$ 的项的微分方程.

例 作为应用梅林变换的例子，我们考虑有关扇形 $|\arg z|<\alpha$ 内的平稳热场问题，在扇形的边上在点 $|z|<a$ 处维持常温 u_0，在 $|z|>a$ 的点处温度等于 0. 问题归于解方程

$$r^2\Delta u=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \tag{19}$$

其中 Δ 表示极坐标 r,φ 中的拉普拉斯算子，满足边界条件

$$u\Big|_{\varphi=\pm\alpha}=\begin{cases}u_0, & 当\ r<a\ 时,\\ 0, & 当\ r>a\ 时.\end{cases} \tag{20}$$

按变量 r 完成梅林变换，根据公式(18)和(17)我们得到，方程(19)转变为常微分方程

$$p^2U+\frac{d^2U}{d\varphi^2}=0,$$

其通解有形状

$$U=A(p)\cos p\varphi+B(p)\sin p\varphi.$$

在过渡到像以后，边界条件(20)给出

$$U\Big|_{\varphi=\pm\alpha}=\int_0^a u_0r^{p-1}dr=u_0\frac{a^p}{p},$$

因此，应当是

$$A(p)\cos p\alpha\pm B(p)\sin p\alpha=u_0\frac{a^p}{p}.$$

由此，我们求出 $A(p)=u_0\frac{a^p}{p\cos p\alpha}$，$B(p)=0$，并且得到解的像 $U=u_0\frac{a^p\cos p\varphi}{p\cos p\alpha}$. 根据梅林反演公式，我们求出解本身

$$u=\frac{u_0}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^p\frac{\cos p\varphi}{\cos p\alpha}\frac{dp}{p}.$$

积分号下的函数在带形 $0<\operatorname{Re}p<1$ 内是解析的，因为积分号下函数的接近于 $p=0$ 的极点位于点 $p=\frac{\pi}{2\alpha}$，如果我们就假设 $\alpha<\frac{\pi}{2}$ 的话，就有 $p=\frac{\pi}{2\alpha}>1$. 因此，在最后的公式中可以取 $0<s<1$ 中任何数作为 s*. 在 $s\to0$ 时取极限，可以沿着带有按逆时针方向绕行点 $p=0$ 的小的半圆周的平面 p 的虚轴取积分. 在这种绕行时积分的增量将等于被积函数在点 $p=0$ 上的留数乘上 πi，亦即等于 πi，我们就得出

$$u=\frac{u_0}{2}+\frac{u_0}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{i\sigma}\frac{\operatorname{ch}\sigma\varphi}{\operatorname{ch}\sigma\alpha}\frac{d\sigma}{\sigma},$$

这里在主值意义下理解积分. 代入 $\left(\frac{a}{r}\right)^{i\sigma}=e^{i\sigma\ln\frac{a}{r}}=\cos\left(\sigma\ln\frac{a}{r}\right)+i\sin\left(\sigma\ln\frac{a}{r}\right)$，并且利用相应的被积函数的偶性和奇性，最终我们求得

---

* 有关 s 的选取可见 457 页上的脚注 **

$$u=\frac{u_0}{2}+\frac{u_0}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(\sigma\ln\frac{a}{r}\right)\frac{\operatorname{ch}\sigma\varphi d\sigma}{\operatorname{ch}\sigma\alpha\ \sigma}. \tag{21}$$

(3) 汉克尔变换 类似于(1)可以写出二维傅里叶变换

$$G(\sigma,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)e^{-i(\sigma x+\tau y)}dxdy,$$

$$g(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(\sigma,\tau)e^{i(\sigma x+\tau y)}d\sigma d\tau.$$

这里过渡到极坐标,令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ 和 $\sigma=\rho\cos\theta, \tau=\rho\sin\theta$,我们有

$$\begin{aligned} G(\rho,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty rdr\int_0^{2\pi}g(r,\varphi)e^{-ir\rho\cos(\varphi-\theta)}d\varphi, \\ g(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \rho d\rho\int_0^{2\pi}G(\rho,\theta)e^{ir\rho\cos(\varphi-\theta)}d\theta. \end{aligned} \tag{22}$$

特别,令 $g(r,\varphi)=e^{-in\varphi}g(r)$,其中 n 为整数,并且在(22)的第一个公式中作代换 $\varphi-\theta=\frac{\pi}{2}+t$,利用已知的周期函数的积分性质,此时,我们得到

$$G(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}e^{-in\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^\infty g(r)rdr\int_0^{2\pi}e^{i(r\rho\sin t-nt)}dt.$$

按照第 70 目的公式(15)内积分等于 $2\pi J_n(r\rho)$,其中 J_n 表示 n 次第一类圆柱函数. 因此,令 $G(\rho,\theta)e^{in\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=G_n(\rho)$,我们能够把最后公式改写成形状

$$G_n(\rho)=\int_0^\infty g(r)J_n(r\rho)rdr. \tag{23}$$

在新的记号下(22)的第二个公式采用形状

$$g(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty G_n(\rho)\rho d\rho\int_0^{2\pi}e^{i\left[n\left(\varphi-\theta-\frac{\pi}{2}\right)+r\rho\cos(\varphi-\theta)\right]}d\theta,$$

在作置换 $\theta-\varphi=t-\frac{\pi}{2}$ 以后,内积分重新导出第 70 目的公式(15),我们就得到

$$g(r)=\int_0^\infty G_n(\rho)J_n(r\rho)\rho d\rho. \tag{24}$$

公式(23)和(24)称为 n **次汉克尔反演公式**(或者换一种方式称为**傅里叶 - 贝塞尔公式**)*.

我们要弄清在所讨论的变换下导数的像的公式形状. 按照 n 次汉克尔变换的定义

$$g'(r)\doteqdot\int_0^\infty \frac{dg}{dr}J_n(r\rho)rdr=rg(r)J_n(r\rho)\Big|_{r=0}^{\infty}-\int_0^\infty g(r)\frac{d}{dr}[rJ_n(r\rho)]dr$$

(我们使用了分部积分公式). 假设积分外一项等于 0,并且利用第 95 目的公式(22),

---

* 为了汉克尔反演公式可用,只要,譬如,函数 $g(r)$ 逐段连续,并且在半轴 $r>0$ 的一切有限区间上有有限改变和积分 $\int_0^\infty g(r)\sqrt{r}dr$ 绝对收敛. (见譬如 Г. Ватсон[16]).

按照该公式 $J'_n(r\rho)=J_{n-1}(r\rho)-\frac{n}{r\rho}J_n(r\rho)$，我们求得

$$\frac{d}{dr}[rJ_n(r\rho)]=J_n(r\rho)+\rho rJ'_n(r\rho)=-(n-1)J_n(r\rho)+\rho rJ_{n-1}(r\rho),$$

$$g'(r)\risingdotseq(n-1)\int_0^\infty g(r)J_n(r\rho)dr-\rho\int_0^\infty g(r)J_{n-1}(r\rho)rdr.$$

第二项中积分等于函数 $g(r)$ 的 $n-1$ 次汉克尔像，我们用 $G_{n-1}(\rho)$ 表示它. 在第一项中的积分等于函数 $\frac{g(r)}{r}$ 的 n 次像，但是对我们来说更方便的是通过本身函数的像来表示它. 为此我们利用第 95 目中的递推公式(23)，按照那个公式

$$\frac{J_n(r\rho)}{r}=\frac{\rho}{2n}[J_{n-1}(r\rho)+J_{n+1}(r\rho)],$$

也就找到最终公式

$$g'(r)\risingdotseq-\rho\left[\frac{n+1}{2n}G_{n-1}(\rho)-\frac{n-1}{2n}G_{n+1}(\rho)\right]. \tag{25}$$

所得到的公式是足够复杂的. $g''(r)$ 和更高阶导数的像的公式有更加复杂得多的形状. 我们在不写出这些公式下，求函数 g,g',g'' 的某个组合的像. 假设 $rg'(r)J_n(r\rho)\Big|_0^\infty=0$，按分部积分法积分，我们得到

$$\int_0^\infty \frac{d^2g}{dr^2}J_n(r\rho)rdr=-\int_0^\infty \frac{dg}{dr}\frac{d}{dr}[rJ_n(r\rho)]dr,$$

从而，

$$\int_0^\infty\left(\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}\right)J_n(r\rho)rdr=-\rho\int_0^\infty\frac{dg}{dr}rJ'_n(r\rho)dr=\rho\int_0^\infty g(r)\frac{d}{dr}[rJ'_n(r\rho)]dr$$

$\left(\text{我们再一次按分部积分法积分，并且利用 } rg(r)J'_n(r\rho)\Big|_0^\infty=0\right)$. 但是根据函数 $J_n(r\rho)$ 所满足的第 95 目中的方程(1)，我们有

$$\rho\frac{d}{dr}[rJ'_n(r\rho)]=-\left(\rho^2-\frac{n^2}{r^2}\right)rJ_n(r\rho),$$

因此，可以把最后公式写成形状

$$\int_0^\infty\left(\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{n^2}{r^2}g\right)J_n(r\rho)rdr=-\rho^2\int_0^\infty g(r)J_n(r\rho)rdr.$$

由此可见，如果 $rg'(r)J_n(r\rho)\Big|_0^\infty=rg(r)J'_n(r\rho)\Big|_0^\infty=0$，则

$$g''(r)+\frac{1}{r}g'(r)-\frac{n^2}{r^2}g(r)\risingdotseq-\rho^2G_n(\rho). \tag{26}$$

特别，对于零次汉克尔变换我们有

$$g''(r)+\frac{1}{r}g'(r)\risingdotseq-\rho^2G(\rho) \tag{27}$$

其中
$$G(\rho)=G_0(\rho). \tag{28}$$

参加到公式(27)左边部分的导数组合在圆柱坐标或者极坐标中拉普拉斯算子的表达式里见到.因此汉克尔变换主要也应用于包含这种表达式的问题中.

例 我们讨论有关充电平板所建立的场势能的经典问题(韦伯).问题化为拉普拉斯方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{29}$$
的求积,其中 z 是沿着垂直于充电平板的轴的坐标,在边值条件
$$\begin{aligned} u\Big|_{z=0}&=u_0, \quad \text{对于 } 0\leqslant r<1,\\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}&=0, \quad \text{对于 } r>1 \end{aligned} \tag{30}$$
下(u_0为常数,第二个条件表示场关于平面 $z=0$ 的对称性).

利用零次汉克尔变换.根据公式(27)算子方程可写成形状
$$-\rho^2 U+\frac{d^2 U}{dz^2}=0,$$
其中 U 为函数 u 的像,而它的通解有形状
$$U=A(\rho)e^{-\rho z}+B(\rho)e^{\rho z}.$$
根据对称性只要考虑 $z>0$ 时的场.因为在 $z\to+\infty$时势能应当趋于 0,所以 $B=0$,根据汉克尔反演公式(24)
$$u(r,z)=\int_0^\infty A(\rho)e^{-\rho z}J_0(r\rho)\rho d\rho.$$
边值条件写成形状
$$\int_0^\infty A(\rho)J_0(r\rho)\rho d\rho=u_0, \text{对于 } 0\leqslant r<1,$$
$$\int_0^\infty A(\rho)J_0(r\rho)\rho^2 d\rho=0, \text{对于 } r>1.$$
把它们与已知关系式*
$$\int_0^\infty J_0(r\rho)\frac{\sin\rho}{\rho}d\rho=\frac{\pi}{2}, \text{对于 } 0\leqslant r<1,$$
$$\int_0^\infty J_0(r\rho)\sin\rho d\rho=0, \text{对于 } r>1,$$
作比较,我们看到函数
$$A(\rho)=\frac{2u_0}{\pi}\frac{\sin\rho}{\rho^2}.$$
满足这两个条件.考虑到问题解的唯一性(它从物理缘由中明白的),我们最终得到
$$u(r,z)=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-\rho z}J_0(r\rho)\frac{\sin\rho}{\rho}d\rho. \tag{31}$$

(4) 一个周线积分的反演 在结束时我们举一个有点不同类型的转换公式的例子.这种类型的公式应用于通过周线积分解微分方程.

---

* 见第 99 目中公式(9)和(10).

假设 $g(z)$ 在含有坐标原点的单连通区域 D 内解析，并且

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\zeta^{N}g(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{N}} \tag{32}$$

其中 C 为区域 D 的边界，N 为正数，并且 $\frac{\zeta^{2}}{(\zeta-z)^{N}}$ 表示在沿着连接点 0 和 z 的路径 γ 有割痕的区域 D 内的单值的解析函数分支. 此时 $g(z)$ 完全由公式

$$g(z)=\int_{0}^{1}(1-\zeta)^{N-1}f'(z\zeta)d\zeta \tag{33}$$

确定.

为了证明它，首先假设点 z 属于泰勒展开式 $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k}z^{k}$ 的收敛圆，并且把周线 C 形变为周线 c，c 也属于这个圆而且把割痕 γ 包围住，把这展开式代入公式(32)和对它逐项积分，我们求得

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k}}{2\pi i}\int_{c}\frac{\zeta^{N+k}d\zeta}{(\zeta-z)^{N}}. \tag{34}$$

被积函数在点 $\zeta=\infty$ 的留数由函数 $\zeta^{k}\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-N}$ 的展开式求出，并且等于

$$-\frac{N(N+1)\cdots(N+k)}{(k+1)!}z^{k+1}=-\frac{\Gamma(N+k+1)}{\Gamma(k+2)\Gamma(N)}z^{k+1}.$$

因为公式(34)的第 k 项中的积分等于这个留数乘上 $-2\pi i$，所以在展开式 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{k}z^{k}$ 中我们有

$$b_{k+1}=\frac{\Gamma(N+k+1)}{\Gamma(k+2)\Gamma(N)}c_{k}\quad(k=0,1,2,\cdots). \tag{35}$$

从另一方面，公式(33)的右边部分中的积分等于

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_{k+1}z^{k}\int_{0}^{1}\zeta^{k}(1-\zeta)^{N-1}d\zeta &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_{k+1}z^{k}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(N)}{\Gamma(N+k+1)}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}b_{k+1}\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(N)}{\Gamma(N+k+1)}z^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k}z^{k}=g(z)\end{aligned}$$

(为了计算积分——所谓欧拉的 B 函数——我们使用第 90 目中的公式(2)，并且按照公式(35)把 b_{k+1} 换成 c_{k})，由此可见，在上面采取的补充假设条件下公式(33)得证. 为了证明它对区域 D 中一切 z 都成立，只要使用解析延拓.

转换公式(32)—(33)被麦基 * 得到，并且把它们用于解欧拉－泊松方程，这方程在气体动力学中有重要的应用.

---

* A. G. Mackey"一类微分方程的周线积分解"(Contour integral solution of a class of differential equations). J. Rational Mech. and Analysis, 1955. Vol 4, N5. 第 733—750 页.

第七章　特殊函数

在这一章中，我们将讨论在实际问题中最经常遇到的几种主要的特殊函数，与它们的最主要的应用. 在这些函数中，有许多种（Γ 函数与圆柱函数，切比雪夫的与勒让德的特殊多项式等等）已在前几章里作为例子来讨论过，在这里，它们的性质将更有系统地加以阐明.

在给出的叙述中，研究特殊函数性质的主要方法，就是在前几章中所讲述的那些方法. 可是，特殊函数有许多重要性质与复变函数论无关，因此有时我们也不得不涉及一些同复变函数论相隔很远的问题.

本章的目的，只是将特殊函数的最重要的性质向读者作一般性的介绍. 当应用到各别实际问题时，有时不得不用到更详细得多的性质. 由于没有可能来讨论到它们，我们介绍读者自己去看文献.

§1　欧拉的 Γ 函数

在分析的许多公式中，含有由欧拉（1729 年）所首先引入的 Γ 函数——在前面的叙述中，我们已不止一次遇到过它了. 即使仅就下面的事实来看，也可见到这种函数的价值：它是当变元的值为分数甚至为复数时，阶乘的自然推广*. 这种考虑我们将取作 Γ 函数的定义的基础.

89. 定义及基本性质　考虑函数方程

* 参看，例如，第 83 目公式(4).

$$f(z+1)=zf(z),\tag{1}$$

对于所有的非负的整数值 $z=n$,函数

$$f(n+1)=n!\tag{2}$$

满足这方程.

我们将求出一个解析函数 $f(z)$,使对于所有的复数 z 它都满足方程(1),并且,为确定起见,当 $z=1$ 时它等于 1(条件Ⅰ).

首先注意,所求的函数对于任何正整数 n 都应当满足方程

$$f(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)f(z+1),\tag{3}$$

这方程是由重复应用公式(1)而得到的.在关系式(3)中令 $z=0$ 便得出:对于所有的正整数 n 来说,$f(n+1)$的值与 $n!$ 一致.在(3)中作代换 $f(z+1)=zf(z)$,且将它写成下面的形式:

$$f(z)=\frac{f(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)\cdots z},\tag{4}$$

我们得出:所求的函数 $f(z)$应当在所有的非正的整数点 $z=-n$ $(n=0,1,2\cdots)$处具有极点.实际上,当 $z\to -n$ 时,表达式(4)的分子趋于 1,而分母趋于 0.

从同一公式(4)看出:

$$\lim_{z\to -n}(z+n)f(z)=\frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-n)}=\frac{(-1)^n}{n!},\tag{5}$$

就是说,$f(z)$的所有极点都是一阶的,并且在极点 $z=-n$ 处的留数等于$\frac{(-1)^n}{n!}$.

我们还假定:$f(z)$除了 $z=0,-1,-2,\cdots$之外,没有其他奇点,且在无论何处它均不为 0(条件Ⅱ).

于是,$f(z+1)$的对数导数

$$\psi(z+1)=\frac{d}{dz}\ln f(z+1)=\frac{f'(z+1)}{f(z+1)}$$

是一个亚纯函数,在点 $z=-1,-2,\cdots$处具有单极点,其留数等于 -1(参看第 23 目).从公式(3)取对数再求导数后,得

$$\psi(z+n+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k}+\psi(z+1).$$

以 $z=0$ 代入且记 $\psi(1)=-C$,有

$$\psi(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-C.$$

由前一个等式减去所得到的这个等式,得

$$\psi(z+1)=-C-\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right\}+\psi(z+n+1)-\psi(n+1).\tag{6}$$

其一般项为

$$u_k(z)=\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}=\frac{1}{k^2}\frac{-z}{1+\frac{z}{k}}$$

的级数,显然,对于任一个 $z\neq -k(k=1,2,\cdots)$ 都收敛,因为它的一般项与收敛级数 $\sum \frac{1}{k^2}$ 的一般项的比值趋于有限极限 $-z$. 此外,在任一有界区域内,从某一 k 开始有 $|u_k(z)|\leqslant\frac{M}{k^2}$,其中 M 是某一个常数,因此这级数一致收敛. 按照第16目的魏尔斯特拉斯定理,级数的和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 代表这样的一个函数:除了在点 $z=-k(k=1,2,\cdots)$ 处它有一个具有留数等于 -1 的一阶极点外,在所有的有限点处它都解析.

在公式(6)中,取 $n\to\infty$ 时的极限. 按照刚才所证明的,$\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z)$ 的极限存在,因此 $\psi(z+n+1)-\psi(n+1)$ 的极限也存在,我们把这极限记作 $\psi_0(z)$. 在极限时将有

$$\psi(z+1)=-C-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right\}+\psi_0(z). \tag{7}$$

由于按照上面所证明的,$f(z+1)$ 在点 $z=-k\ (k=1,2,3,\cdots)$ 处具有一阶极点,故它的对数导数 $\psi(z+1)$ 在这些极点处的主要部分等于 $-\frac{1}{z+k}$(参看第23目). 由此推出:函数 $\psi_0(z)$ 应该是整函数. 显然,反过来说也对,不论 $\psi_0(z)$ 是什么样的整函数,由自己的对数导数 $\psi(z)$ 所确定的函数 $f(z)$,都满足条件Ⅱ.

条件Ⅰ给予函数 $\psi_0(z)$ 以附加的限制. 实际上,从函数方程(1)取对数且求导数后,得关于函数 $\psi(z)$ 的下述方程

$$\psi(z+1)-\psi(z)=\frac{1}{z}. \tag{8}$$

而从等式(7)推出

$$\psi(z+1)-\psi(z)=\frac{1}{z}+\psi_0(z)-\psi_0(z-1)$$

(常数 C,以及除了第一项以外的所有各项,在相减时都被消去了). 所以要满足关系式(8),函数 $\psi_0(z)$ 应当是周期为1的周期函数,就是说,$\psi_0(z)\equiv\psi_0(z-1)$. 反过来说,对于任何一个这样的函数 $\psi_0(z)$,函数 $\psi(z)$ 都满足方程(8),再把(8)求积分和导数,便得出

$$\ln f(z+1)-\ln f(z)=\ln z+A,$$

其中 A 是某一个常数. 如果函数 $f(z)$ 还满足条件 $f(1)=f(2)=1$,则将 $z=1$ 代入最后那个方程,便得 $A=0$,即是说,在取指数后,便得函数方程(1).

这样一来,对于任何一个周期为1的周期整函数 $\psi_0(z)$,其所对应的函数 $f(z)$(如若对于它有 $f(1)=f(2)=1$)都同时满足条件Ⅰ与Ⅱ. 换句话说,条件Ⅰ与Ⅱ为整整一类的亚纯函数所满足. 如果在(7)中令 $\psi_0(z)\equiv 0$,我们得到这类函数中的最简单的一个——它就称做欧拉Γ函数,且用记号 $\Gamma(z)$ 来表示.

因此，Γ 函数的对数导数具有展开式，

$$\psi(z+1)=-C-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right\},\tag{9}$$

其中 C 是一个常数，我们立刻就来确定它. 将展开式(9)沿着某一条连接点 $z=0$ 与任意点 $z\neq k$ $(k=-1,-2,-3,\cdots)$而不包含点 k 的路径来求积分，得 Γ 函数的对数的展开式

$$\ln\Gamma(z+1)=-C_2-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\ln\left(1+\frac{z}{k}\right)-\frac{z}{k}\right\}.\tag{10}$$

常数 C 可用前面加在 Γ 函数上的条件 $\Gamma(2)=1$ 来确定*. 以 $z=1$ 代入(10)中，得

$$C=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right\}.$$

最后的乘积显然等于$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}=n+1$. 在极限记号下的和式中加入一个趋于 0 的项$\frac{1}{n+1}$，且用 n 替代$n+1$，最后得

$$-\psi(1)=C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right).\tag{11}$$

这个常数称为**欧拉常数**，它的近似值等于 0.577 215 7**.

从公式(10)取指数，得函数$\frac{1}{\Gamma(z+1)}$的表为无穷乘积形式的表示式

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}.\tag{12}$$

所得到的无穷乘积对于所有有限的 z 都收敛. 当 $z\neq-k$ $(k=1,2,3,\cdots)$时，这可从已被证明的级数(9)的收敛性以及第 72 目的定理 1 而得出；当 $z=-k$ 时可以直接看出它收敛到 0.

我们来列举在 Γ 函数的定义下所已得到的它的一些基本性质：

1) $\Gamma(z)$除了在负整数的点与点 $z=0$ 处之外，处处都是解析的.

2) $\Gamma(z)$满足函数方程

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\tag{13}$$

或者说，满足更一般的函数方程

$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)\Gamma(z+1).\tag{14}$$

3) 对于一切正整数 $z=n$，$\Gamma(n+1)$的值与 $n!$ 相同：

$$\Gamma(n+1)=n!.\tag{15}$$

4) Γ 函数的所有的极点都是一阶的，且 $\Gamma(z)$在极点 $z=-n$ 处的留数等于

---

* 由于我们的积分路径的起点的选定，第二个条件 $\Gamma(1)=1$ 对于任何 C 均成立(参看展开式(10)).

** 欧拉常数 C 也在其他问题中遇到.

$\frac{(-1)^n}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$.

从乘积(12)的收敛性得出结论：

5) 函数$\frac{1}{\Gamma(z)}$是整函数，因此，$\Gamma(z)$不取0值.

性质3)—5)说明实变数x的函数$\Gamma(x)$的图像的一般性征. 这图像表示在图192中*，在这同一个图中的虚线，表示$\frac{1}{\Gamma(x)}$的图像. 在图193中还表出Γ函数的地形面，即是，具有方程$u=|\Gamma(z)|$的曲面. 在点$z=0,-1,-2,\cdots$上突出地表出的山峰对应于极点. 曲面上的两族曲线代表等模的与等辐角的曲线族，在它们上面标出的数字表示模与辐角的数值(后者用度数).

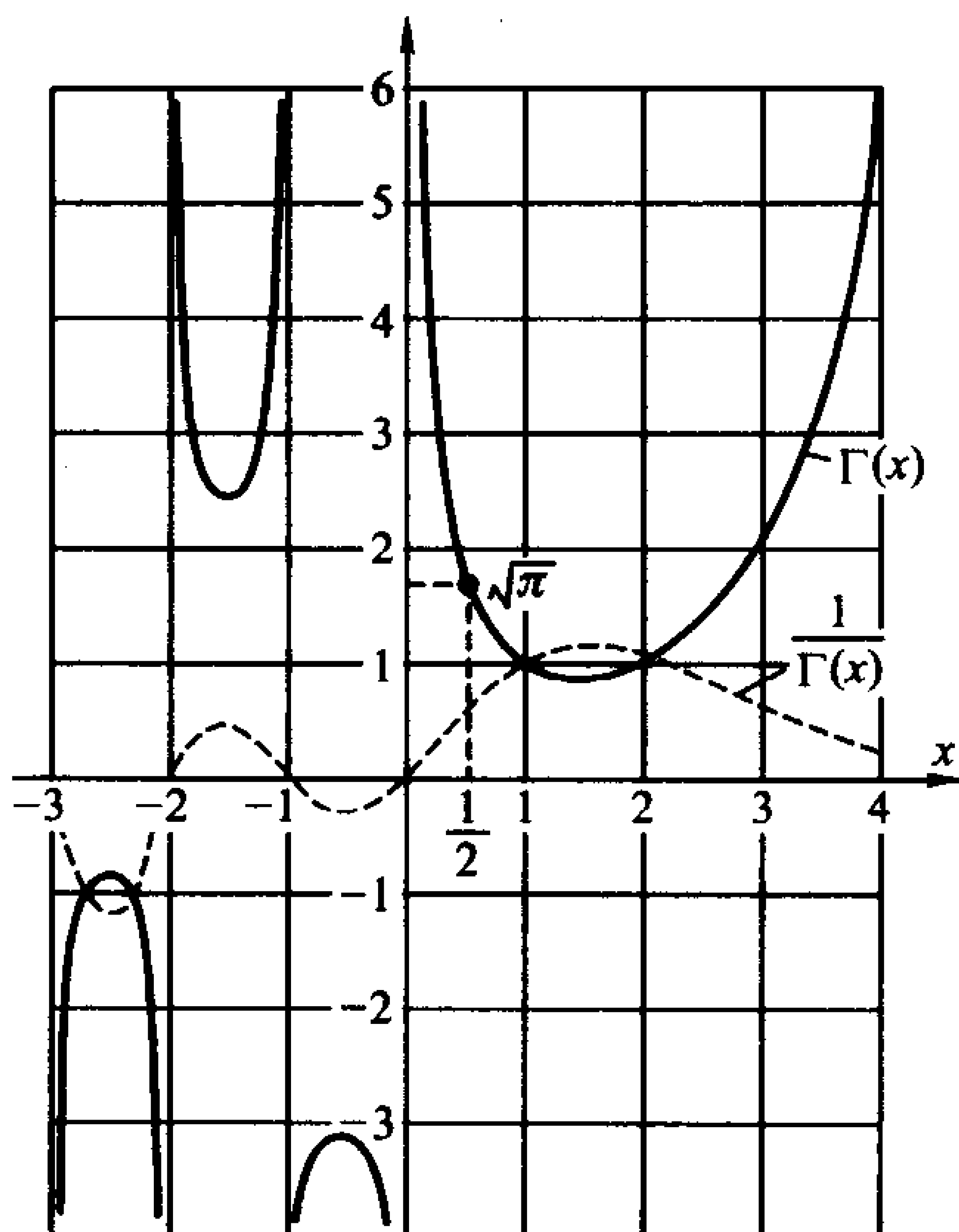


图 192

我们还要举出Γ函数的一些性质. 除了关系式(13)之外，对于Γ函数还有第二个函数方程，这方程在许多问题上有用.

6) 对于所有的复数z，

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{16}$$

(当$z=n$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$时，这等式的两边都变为无穷大).

为了要推得这个关系式，首先以$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$代入公式(12)，得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{z}{\Gamma(z+1)}=ze^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}, \tag{17}$$

然后，在这同一公式(12)中用$-z$替代z，得

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)}=e^{-Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}}.$$

把所得到的这两个乘积相乘(由于它们的绝对收敛性，这样互乘是合法的，参看第72目)，求得

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right).$$

只需再利用$\sin \pi z$的无穷乘积的展开式(参看第72目)，即得出所求的公式(16).

---

* 对于负的x值，$\Gamma(x)$的极小值和极大值当$x\to-\infty$时趋近于0. 这同下述事实有关：按性质4)，在点$x=-n$处的留数，亦即$\Gamma(z)$在点$x=-n$的邻域内的展开式的主要部分的系数，当n增大时剧烈地减小：

$$\Gamma(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}+C_0+C_1(x+n)+\cdots.$$

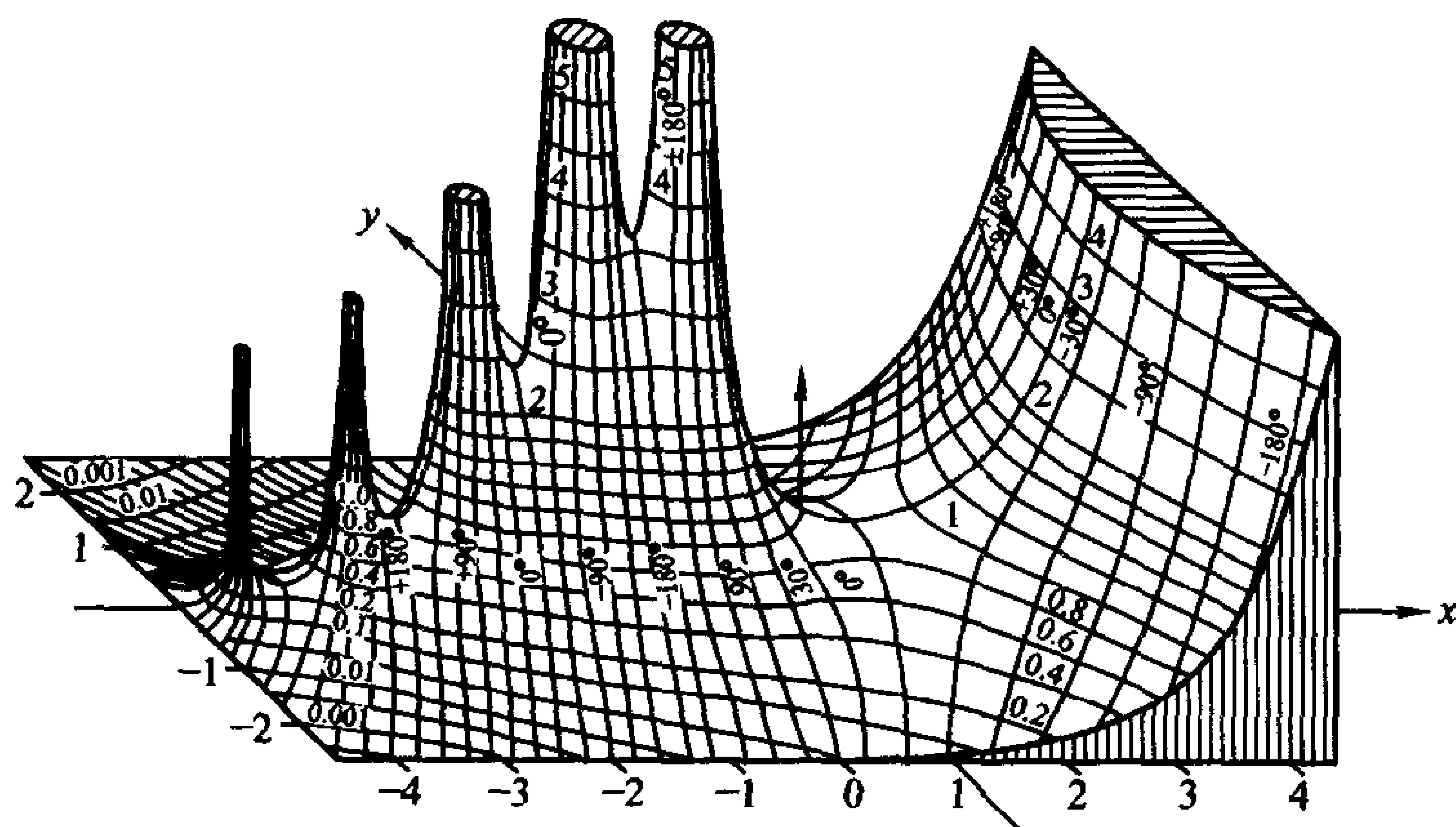


图 193

我们将指出所得到的那些公式的某些推论. 在公式(16)中令 $z=\frac{1}{2}$，得 $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi$，由此有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

现在应用公式(14)，在其中令 $z=-\frac{1}{2}$，求得

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!\ \sqrt{\pi}}{4^n n!}.\end{aligned}\tag{18}$$

在(16)中令 $z=n+\frac{1}{2}$，就有

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}=(-1)^n\pi,$$

由此按(18)便得出我们已在第 83 目中利用过的公式

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)&=(-1)^n\frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\sqrt{\pi}\\&=(-1)^n\frac{4^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}\end{aligned}\tag{19}$$

我们还将讲到 Γ 函数的积分表示式，这种表示式也在前几章里利用过.

7) 对于所有在右半平面上的 z，

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt,\tag{20}$$

其中积分沿着正半 t 轴进行(欧拉).

为了证明,首先注意:积分(20)对于所有满足 $x=\operatorname{Re} z>0$ 的 z 都收敛.实际上,$|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t+(x-1)\ln t}=e^{-t}t^{x-1}$,我们也看到:当 $t\to\infty$ 时,积分的收敛性(对于任意的 x)由因子 e^{-t} 来保证.而当 $t\to 0$ 时,被积函数与 t^{x-1} 同阶,由此当 $x>0$ 时积分收敛.

其次,我们还考虑函数

$$f_n(z)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt,$$

在这里引入新的积分变量 $\tau=\frac{t}{n}$,再应用分部积分法的公式,得

$$f_n(z)=n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau=\frac{n^z}{z}n\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau$$

(积出的部分等于0).重复这方法直至因子 $(1-\tau)$ 消失为止,得

$$\begin{aligned}f_n(z)&=\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1\tau^{z+n-1}d\tau\\&=\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}=\frac{e^{z\ln n}}{z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)}.\end{aligned}$$

把所得到的表达式的分子与分母同乘以

$$e^{-z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{z}{k}},$$

于是求得

$$f_n(z)=\frac{e^{z\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}}{z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}.$$

取 $n\to\infty$ 时的极限,根据公式(11),(12)与(13)得到

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=\frac{1}{ze^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\Gamma(z).$$

在另一方面,由于当 $n\to\infty$ 时,$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\to e^{-t}$,故自然地可期望有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \tag{21}$$

而那时公式(20)便证明了.为了证明最后的关系式,我们利用不等式*

---

* 公式

$$1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\int_0^t e^\tau\left(1-\frac{\tau}{n}\right)^{n-1}\frac{\tau}{n}d\tau$$

可由直接对 t 求导数来验证.其中,右边的积分包含在0与 $\int_0^t e^t\frac{\tau}{n}d\tau=e^t\frac{t^2}{2n}$ 之间,由此便可推得不等式(22).

$$\text{当 } 0<t<n \text{ 时}, 0<e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n<\frac{t^2}{2n}. \tag{22}$$

我们来估计所假定的极限与 $f_n(z)$之间的差数

$$\Delta=\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

由于积分(20)是收敛的,对于任一固定的 $\varepsilon>0$,可找到这样的正整数 n_0,使得当 $n>n_0$时

$$\left|\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\right|\leqslant\int_n^\infty e^{-t}t^{x-1}dt<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{23}$$

固定这个正整数 n_0,而对于任一 $n>n_0$,把 Δ 表示为形式

$$\Delta=\int_0^{n_0}\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt$$

$$+\int_{n_0}^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

为了估计第一项的值,利用不等式(22)得

$$\left|\int_0^{n_0}\right|<\frac{1}{2n}\int_0^{n_0}t^{x+1}dt,$$

由此可见:对于充分大的 n(以及固定的 n_0)这第一项的模不超过$\frac{\varepsilon}{3}$.对于第二项有

$$\left|\int_{n_0}^n\right|\leqslant\int_{n_0}^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{x-1}dt<\int_{n_0}^\infty e^{-t}t^{x-1}dt<\frac{\varepsilon}{3}$$

(我们略去减去的项,和增大积分的区间,然后利用不等式(23)).第三项的模对于任何 $n\geqslant n_0$都不超过$\frac{\varepsilon}{3}$,因此$|\Delta|<\varepsilon$.关系式(21)得证,也就是公式(20)得证.

从上面的欧拉的积分表示式* 可得到下面的两个性质:

8) **在整个平面上 Γ 函数的积分表示式为(汉克尔):**

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta, \tag{24}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}e^{\zeta}\zeta^{-z}d\zeta. \tag{25}$$

这里的 C 与C^* 是在图 165 与图 166 中所画出的周线.公式(24)将亚纯函数 $\Gamma(z)$表为两个整函数的比(参看第 72 目),公式(25)表示整函数$\frac{1}{\Gamma(z)}$.

最后,我们将举出在第 77 目中所得到的关于 Γ 函数的渐近公式(斯特林):

9) **对于大的正值 x,有**

---

* 参看第 74 目公式(12)与(15).

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\left\{1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}. \tag{26}$$

90. 例.补充 作为 Γ 函数的应用的第一个例子,我们引用所谓**欧拉第一类积分***,或 B 函数的计算,这个函数对于 $\operatorname{Re} z>0,\operatorname{Re} w>0$ 由下述关系式来定义

$$B(z,w)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau. \tag{1}$$

(积分(1)在我们的假定下显然是收敛的).为了计算积分(1),我们将利用算子法.

考虑更为一般的积分

$$\int_0^t \tau^{z-1}(t-\tau)^{w-1}d\tau=(t^{z-1}*t^{w-1}),$$

这是函数 t^{z-1} 与 t^{w-1} 的卷积(参看第 81 目),且当 $t=1$ 时给出 $B(z,w)$.按乘积定理(第 81 目),这卷积的像是 t^{z-1} 与 t^{w-1} 的像的乘积,即按第 83 目的公式(6),

$$(t^{z-1}*t^{w-1})\div\frac{\Gamma(z)}{p^z}\cdot\frac{\Gamma(w)}{p^w}=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{p^{z+w}}.$$

从另一方面,由于 $\Gamma(z)\Gamma(w)$ 是常数,故右边的像原函数可按第 83 目的同一公式(6)求得

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{p^{z+w}}\div\Gamma(z)\Gamma(w)\frac{t^{z+w-1}}{\Gamma(z+w)}.$$

因此按像的唯一性定理,我们得到

$$(t^{z-1}*t^{w-1})=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1}.$$

在其中令 $t=1$,就得出所求的用 Γ 函数来表示的 $B(z,w)$ 的表达式

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{2}$$

顺便指出,我们要注意,前面的 B 函数原先仅是对于满足 $\operatorname{Re} z>0,\operatorname{Re} w>0$ 的 z 与 w 的值由积分(1)来定义的;公式(2)给出把它延拓到 z 与 w 的值的整个复平面上的解析延拓.

有很多在分析中时常遇到的各种积分,可以化为欧拉积分.我们来举一些例子.

例 1 积分

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p(1+x)^q dx \quad (p>-1,q>-1),$$

经代换 $x=2t-1$ 后,它化为 $2^{p+q+1}B(p+1,q+1)$ 的形式,因而按公式(2)它等于

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p(1+x)^q dx=2^{p+q+1}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}. \tag{3}$$

例 2 积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx \quad (p,q,m>0).$$

---

* 由欧拉于 1772 年发表在"Комментариях Петербургской академии наук"上的文章中引人的.

经代换 $x^m=t$ 后化为$\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{p}{m},q\right)$. 因此按公式(2)它等于

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}. \tag{4}$$

例 3 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}\varphi\cos^{q-1}\varphi d\varphi$$

经代换 $\sin\varphi=x$ 后化为在例 2 中算出过的积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}\varphi\cos^{q-1}\varphi d\varphi=\int_0^1 x^{p-1}(1-x^2)^{\frac{q}{2}-1}dx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}. \tag{5}$$

例 4 特别,在前一例子中令 $p-1=r,q-1=-r\quad(-1<r<1)$,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^r\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right).$$

但按关于 Γ 函数的第二个函数方程(第 89 目的公式(16)). 有

$$\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1+r}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi r}{2}},$$

即,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^r\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi r}{2}}. \tag{6}$$

例 5 下面的积分经代换 $\ln\frac{1}{x}=t$ 后便变为 Γ 函数:

$$\int_0^1\ln^p\frac{1}{x}dx=\int_0^\infty e^{-t}t^p dt=\Gamma(p+1). \tag{7}$$

例 6 当模的值为 $k=k'=\frac{1}{\sqrt{2}}$时的**完全椭圆积分**(参看第 39 目)

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}};\quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}d\varphi$$

可化为欧拉积分.

实际上,令 $\cos\varphi=t$,然后令 $t^4=\tau$,这些积分中第一个变成如下形式:

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right), \tag{8}$$

类似地,

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}+\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^4}}\right\}=\frac{\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)}{4\sqrt{2}}. \tag{9}$$

例 7 对于 $0<\mathrm{Re}\,z<1$,

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-it}dt=\Gamma(z)e^{-\frac{\pi i z}{2}}. \tag{10}$$

实际上,考虑沿着图 194 中所示的闭周线的积分:

$$\int_C \zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta=\int_{C_r}+\int_r^R+\int_{C_R}+\int_{Ri}^{ri}=0$$

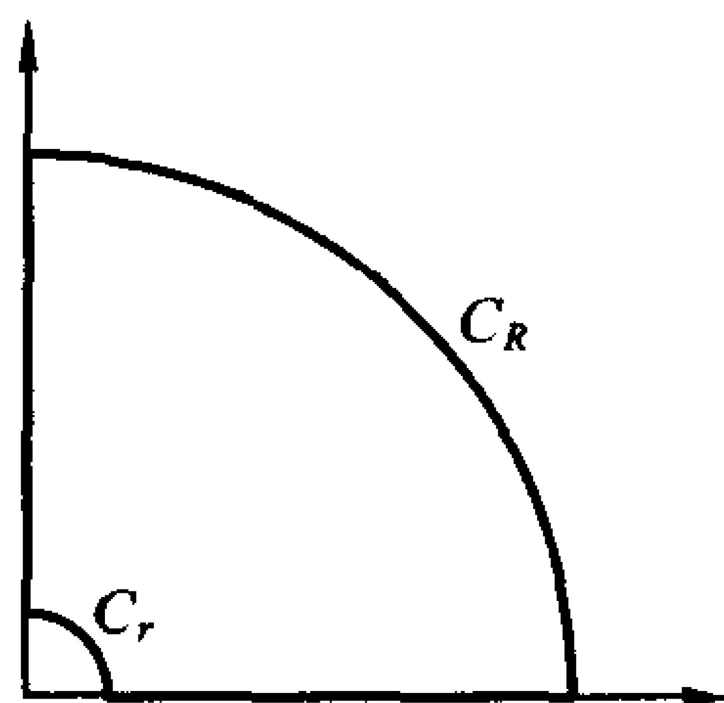


图 194

(按柯西定理它等于 0). 由于当 $\mathrm{Re}\ z=x<1$ 时,量 $|\zeta^{z-1}|=R^{x-1}$,当 $R\to\infty$ 时它趋于 0,故按若尔当引理(第 73 目公式(2))沿 C_R 的积分当 $R\to\infty$ 时也趋于 0. 另一方面,当 $x>0$ 时,沿 C_r 的积分当 $r\to0$ 时趋于 0,因为按照关于积分估计定理,它的模不超过 $r^{x-1}\frac{\pi r}{2}=\frac{\pi}{2}r^x$.

因此,当取 $r\to0$, $R\to\infty$ 的极限时,我们得出

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty(it)^{z-1}e^{-it}idt=e^{i\frac{\pi z}{2}}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-it}dt,$$

由此便可推得所求的公式. 特别,在其中令 $z=\frac{1}{n}$, $n>1$,然后作代换 $t^{\frac{1}{n}}=x$,求得

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{n}-1}e^{-it}dt=n\int_0^\infty e^{-ix^n}dx=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{\pi i}{2n}},$$

由此,把实数部分与虚数部分分开,便得积分

$$\int_0^\infty\cos x^ndx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n},\int_0^\infty\sin x^ndx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n} \tag{11}$$

(当 $n=2$ 时,得到我们所熟知的结果,参看第 73 目例 6).

最后我们还要举出几个包含有Γ函数的关系式.

(1) 拉勃积分 我们来计算积分

$$R_0=\int_0^1\ln\Gamma(t)dt.$$

以 $1-t$ 替代 t,可写为

$$R_0=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)dt,$$

于是,将这表达式与前一个相加,再利用关于Γ函数的第二个函数方程,得

$$2R_0=\int_0^1\ln\Gamma(t)\Gamma(1-t)dt=\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin t\pi}dt=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\ln\sin xdx.$$

最后的积分可用简单的变量代换 $x=2u$ 算出(欧拉)

$$I=\int_0^\pi\ln\sin xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2udu$$

$$=\pi\ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin udu+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos udu.$$

右端积分中的第二个经代换 $u=v-\frac{\pi}{2}$ 后变至 $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\ln\sin vdv$,再将它与第一个积分结合,求得 $I=\pi\ln2+2I$,由此 $I=-\pi\ln2$. 这样一来,

$$R_0=\int_0^1\ln\Gamma(t)dt=\frac{1}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\ln2=\ln\sqrt{2\pi}.$$

拉勒讨论了更为一般化的积分($a\geqslant 0$)

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(t)dt=\int_0^{a+1}-\int_0^a.$$

由于 $R'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln a$,故通过积分求得 $R(a)=a(\ln a-1)+C$.在此令 $a=0$ 且注意到 $R(0)=R_0=\ln\sqrt{2\pi}$,最后求得

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(t)dt=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi}.\tag{12}$$

(2) 勒让德公式　考虑积分

$$\mathrm{B}(z,z)=\int_0^1\tau^{z-1}(1-\tau)^{z-1}d\tau=\int_0^1\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2\right\}^{z-1}d\tau.$$

由于抛物线 $\sigma=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2$ 对于直线 $\tau=\frac{1}{2}$ 对称,故可写成

$$\mathrm{B}(z,z)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2\right\}^{z-1}d\tau,$$

由此经代换 $\frac{1}{2}-\tau=\frac{1}{2}\sqrt{t}$ 后,得

$$\mathrm{B}(z,z)=\frac{2}{4^z}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{z-1}dt=\frac{1}{2^{2z-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},z\right).$$

在此,B 函数代以它的表达式(2),并且记住 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$,便求得所谓关于 Γ 函数的第三个函数方程(勒让德)

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z).\tag{13}$$

(3) 欧拉公式　我们来计算乘积

$$E=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

的数值,其中 n 是任何一个正整数.为此,我们把这乘积写成相反的顺序

$$E=\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

且将这两个表达式相乘.利用第二个函数方程来结合每对因子,得

$$E^2=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\sin 2\frac{\pi}{n}}\cdots\frac{\pi}{\sin(n-1)\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin k\frac{\pi}{n}}.\tag{14}$$

为了计算这些正弦的乘积,考虑恒等式

$$z^n-1=(z-1)(z-e^{i\frac{2\pi}{n}})\cdots(z-e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}})$$

(与 1 的 n 次根比较),于是有

$$\frac{zn-1}{z-1}=\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{ik\frac{2\pi}{n}}),$$

再取 $z\to 1$ 时的极限,求得

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{ik\frac{2\pi}{n}})$$

(与 z^n 在点 $z=1$ 处的导数比较).在右端取绝对值,且注意到

$$|1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}|=|e^{i\frac{k\pi}{n}}|\times\left|2i\sin\frac{k\pi}{n}\right|=2\sin\frac{k\pi}{n},$$

使有

$$n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\frac{\pi}{n}.$$

将这代入关系式(14)中,得出公式(欧拉)

$$E=\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{15}$$

§2 正交多项式

91. 正交函数系 在许多数学物理问题中,会遇到将函数展开成所谓**广义的傅里叶级数**.我们将提醒一下与这种展开式相联系的一些基本概念.

考虑给定在一个固定的区间(a,b)上的实变量x的一族实函数,这里的区间(a,b)可以是无界的.我们假定,这些函数是逐段光滑的,并且只具有第一类间断点.按照向量代数类推,我们引入族中函数的标量积的概念.

在向量代数中,两个向量$\boldsymbol{a}=\{a_1,\cdots,a_n\}$与$\boldsymbol{b}=\{b_1,\cdots,b_n\}$的相同坐标的乘积之和,称做这两个向量的标量积:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

与此相应,将函数$f(x)$与$g(x)$看作具有无穷多的"坐标"(这些函数在区间(a,b)上各个个别的点处的值)的向量,它们的"相同坐标的乘积的连续和",即,

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx, \tag{1}$$

称做它们的**标量积**.同样,按照向量代数类推,也引进其他的概念.函数$f(x)$的自乘的标量积的平方根称做它的**范数**("长度"):

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}. \tag{2}$$

所引入的这些概念也具有类似于普通的向量代数中的某些性质.例如,显然,在我们的假设下,$\|f\|=0$当且仅当$f(x)\equiv 0$时方成立(我们不考虑在间断点处的函数值,这种值在$\|f\|$上不发生影响).在分析上周知的**布涅可夫斯基-施瓦茨不等式**

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

可解释为标量积的性质

$$|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|, \tag{3}$$

等等.

函数系中的函数$f(x)$与$g(x)$,若它们的标量积等于0:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=0, \tag{4}$$

就称做**正交的**.与此相应,若函数系$\{\varphi_n(x)\}$中的任何两个函数都是互相正交的:

$$(\varphi_m,\varphi_n)=0,\text{若 } m\neq n.$$

这函数系就称做**正交的**.再者,若系中所有的函数的范数都等于1,这函数系就称为**规范的**.

我们所引进的定义也可推广到实变量x的取复数值的函数上去,只需把这些函数的标量积理解为用积分

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \tag{5}$$

来替代积分(1),其中$\overline{g(x)}$表示取$g(x)$的共轭复数值的函数.的确,这时已失去了标量积的对称性质:显然有

$$(f,g)=\overline{(g,f)}.$$

函数自乘的标量积仍然是非负的

$$(f,f)=\int_a^b |f(x)|^2dx\geqslant 0,$$

因此可以毫无改变地引进范数的概念.同样,可以毫无改变地引进正交函数系及规范函数系的概念.

正交系的最简单的例子是由函数

$$\varphi_n(x)=e^{in\omega x}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

所构成的系,这函数系在长度为$T=\frac{2\pi}{\omega}$的任意区间上是正交的.实际上,当$m\neq n$时有(a是任一实数)

$$(\varphi_m,\varphi_n)=\int_a^{a+T}e^{i(m-n)\omega x}dx=\frac{e^{i(m-n)\omega a}}{i(m-n)\omega}(e^{i(m-n)2\pi}-1)=0.$$

这函数系不是规范的,因为

$$\|\varphi_n\|=\sqrt{\int_a^{a+T}|e^{in\omega x}|^2dx}=\sqrt{T},$$

但它是容易规范的,只要除所有的函数以$\sqrt{T}$便是了.

应用正交函数系来展开其他的函数是特别方便的.实际上,设函数$f(x)$可表为一个正交函数系$\{\varphi_n(x)\}(n=0,1,2,\cdots)$的一致收敛的级数:

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots. \tag{6}$$

利用这函数系的正交性,容易确定这级数的所有的系数.为了要确定系数c_n,我们以$\overline{\varphi_n(x)}$*乘表示式(6)的两端(因此级数仍是一致收敛的),然后沿基本区间(a,b)来求积分:

---

* 如若系$\{\varphi_n(x)\}$由实函数组成,则$\overline{\varphi_n(x)}=\varphi_n(x)$.

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi_n(x)}dx.$$

由于这函数系的正交性，所有在右端的积分，除了当 $k=n$ 时的那一个之外都等于0，因而得

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx = c_n \|\varphi_n\|^2,$$

由此得出

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx \tag{7}$$

(我们假定：函数组 $\{\varphi_k(x)\}$ 中不含有恒等于0的函数).

形如(6)的级数称做函数 $f(x)$ 依正交系 $\{\varphi_n(x)\}$ 展开的**广义傅里叶级数**，而确定它的系数的公式(7)，称做**广义傅里叶公式**. 对于前面所讨论过的函数系 $\varphi_n(x)=e^{in\omega x}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的例子而言，级数(6)同写成复数形式的普通的傅里叶级数相同

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x},$$

(参看第70目)，而公式(7)则与通常的傅里叶公式相同.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx$$

函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 中的函数可用它们的线性组合 $\psi_n(x)$ 来代换，使新得到的函数系 $\{\psi_n(x)\}$ 构成正交系，这种代换称做函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的**正交化**. 对于往后的叙述，函数系的正交化起很重要的作用. 在证明正交化的可能性时，我们将假定：系 $\{\varphi_n(x)\}$ 是**线性无关的**. 如同在向量代数中一样，这意味着，这函数系中没有一个函数可以表为系中其他函数的线性组合.

正交化定理 从任何一个线性无关的函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，恒可构成一些函数 $\psi_n^0(x)$，它们是 $\varphi_k(x)$ 的线性组合，且构成一个正交规范函数系.

作为函数 $\psi_0^0(x)$，我们取

$$\psi_0^0(x) = \frac{1}{\|\varphi_0\|}\varphi_0(x),$$

由于系 $\{\varphi_n(x)\}$ 是线性无关的，故它不可能含有恒等于0的函数，因此 $\|\varphi_0\|\neq0$*. 现在选取常数 α_{10} 使函数

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) - \alpha_{10}\psi_0^0(x)$$

与 ψ_0^0 正交，我们有 $(\psi_1,\psi_0^0)=(\varphi_1,\psi_0^0)-\alpha_{10}$，因此只需取 $\alpha_{10}=(\varphi_1,\psi_0^0)$. 函数 $\psi_1(x)$ 不可能恒等于0，因为否则 $\varphi_1(x)$ 将可由 $\varphi_0(x)$ 线性地表出，而这与定理的条件相

* 函数 $\varphi(x)\equiv0$ 恒可表为其他函数的线性组合：$\varphi(x)\equiv0\cdot\psi(x)$.

背.因此,作为 $\psi_1^0(x)$ 可取

$$\psi_1^0(x)=\frac{1}{\|\psi_1\|}\psi_1(x).$$

然后,取函数

$$\psi_2(x)=\varphi_2(x)-\alpha_{20}\psi_0^0(x)-\alpha_{21}\psi_1^0(x),$$

且选择常数 α_{20} 与 α_{21} 使 $\psi_2(x)$ 与 ψ_0^0 及与 ψ_1^0 都正交.由于 $(\psi_2,\psi_0^0)=(\varphi_2,\psi_0^0)-\alpha_{20}$ 及 $(\psi_2,\psi_1^0)=(\varphi_2,\psi_1^0)-\alpha_{21}$,故为此只需选取 $\alpha_{20}=(\varphi_2,\psi_0^0)$,$\alpha_{21}=(\varphi_2,\psi_1^0)$.函数 $\psi_2(x)$ 不可能恒等于 0,因为否则 $\varphi_2(x)$ 将是 φ_0 与 φ_1 的线性组合了,因此可取

$$\psi_2^0(x)=\frac{1}{\|\psi_2\|}\psi_2(x).$$

我们的构造法可以无限地继续下去.如若函数 $\psi_0^0(x),\psi_1^0(x),\cdots,\psi_{n-1}^0(x)$ 已经构造好,我们取

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{nk}\psi_k^0(x),\tag{8}$$

其中 $\alpha_{nk}=(\varphi_n,\psi_k^0)$,然后取

$$\psi_n^0(x)=\frac{1}{\|\psi_n\|}\psi_n(x).$$

函数组 $\{\psi_n^0(x)\}$ 就是所要找的.

注 1 从我们的构造法看出:不仅所有的 $\psi_n^0(x)$ 都是 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合,反之,$\varphi_n(x)$ 也都是 $\psi_0^0,\psi_1^0,\cdots,\psi_n^0$ 的线性组合.由此推得:任一函数 $\varphi_k(x)$ 都正交于所有的函数 $\psi_{k+1}^0,\psi_{k+2}^0,\cdots$,或即,任一函数 $\psi_n^0(x)$ 都正交于 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)$.

注 2 在某种意义下,正交系的唯一性成立:如果函数 $\psi(x)$ 是 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合,且正交于 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$,则它与 $\psi_n^0(x)$ 只可能相差一常数因子.

事实上,设

$$\psi_n^0(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x),\psi(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k\varphi_k(x)\tag{9}$$

(在此,按照前面所叙述的 $\alpha_n\neq0$).考虑函数

$$\Psi(x)=\psi(x)-\frac{\beta_n}{\alpha_n}\psi_n^0(x),$$

它显然可用函数 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$ 线性地表出(因为它的依 φ_k 的展开式已经不含有 φ_n),且正交于所有这些函数.由此推得:$\Psi(x)\equiv0$,即是说,$\psi(x)=\frac{\beta_n}{\alpha_n}\psi_n^0(x)$.

最后,我们将指出正交性概念的拓广,这个我们将于后面用到(我们限制于实函数的情形).函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 称为在区间 (a,b) 上**带权 $\rho(x)$ 的正交系**,如若对于系中任何两个函数都有

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx = 0(m \neq n). \tag{10}$$

这里，$\rho(x)$——“权”——是一个在区间(a,b)上连续的固定的非负函数．当$\rho(x)\equiv 1$时，便得出通常的正交性．

关于正交化的定理容易推广到带权$\rho(x)$的正交性的情形上来．为了要函数系$\{\varphi_n(x)\}$带权$\rho(x)$正交化，只要在普通的意义下把函数组$\{\sqrt{\rho(x)}\varphi_n(x)\}$正交化好了．这时，由正交化的结果所得到的那些函数，将是函数$\varphi_k(x)$的线性组合与$\sqrt{\rho(x)}$的乘积．这些线性组合

$$\psi_n^0(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk}\varphi_k(x) \tag{11}$$

所成的函数系是带权$\rho(x)$正交的．

设某一函数$f(x)$可以按照一个带权$\rho(x)$的正交系$\{\varphi_n(x)\}$中的函数来展开成一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n\varphi_n(x). \tag{12}$$

要确定这展开式的系数，替代(7)我们有公式

$$c_n = \frac{1}{d_n^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx, \tag{13}$$

其中d_n是函数$\varphi_n(x)$的“带权范数”：

$$d_n = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\rho(x)dx}. \tag{14}$$

要推得公式(13)，只需以$\varphi_n(x)\rho(x)$乘展开式(12)，然后逐项地求积分，再利用系$\{\varphi_n(x)\}$的带权的正交性．

92. 正交多项式 选取某一区间(a,b)，且应用在前一目中所讲的带权$\rho(x)$的正交化步骤于由x的乘幂所成的函数系：$\varphi_n(x)=x^n(n=0,1,2,\cdots)$，众所周知，这函数系是线性无关的．对于每一个固定的区间(a,b)，与一个固定的权函数$\rho(x)$，结果我们得到一个完全确定的多项式系$\{q_n^0(x)\}$，它是在(a,b)上带权$\rho(x)$正交规范化了的．从公式(11)推知，每一个多项式$q_n^0(x)$具有幂次n．

最通常使用的是下列的那些正交多项式系*：

* 多项式$p_n(x)$由勒让德于1785年引入．多项式$t_n(x)$，$h_n(x)$与$l_n(x)=l_n^0(x)$由切比雪夫于1859年引入(在发表于彼得堡科学院备忘录中的论文“Вопросы о наименъших величинах, связанных с дриближенным представлением функций”里)；此外，多项式$h_n(x)$由埃尔米特在1864年的工作中研究过．而$l_n(x)$由拉盖尔在1879年的工作中研究过．勒让德多项式与切比雪夫多项式都是雅可比多项式(1859年)的特殊情形——当$\lambda=\mu=0$时得前一种，当$\lambda=\mu=-\frac{1}{2}$时得后一种．

区　间	权	记　号	创立者
$(-1,1)$	1	$p_n(x)$	勒让德
$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$t_n(x)$	切比雪夫
$(-1,1)$	$(1-x)^\lambda(1+x)^\mu,\lambda,\mu>-1$	$p_n^{(\lambda,\mu)}(x)$	雅可比
$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	$h_n(x)$	切比雪夫-埃尔米特
$(0,\infty)$	$x^\lambda e^{-x},\lambda>-1$	$l_n^{(\lambda)}(x)$	切比雪夫-拉盖尔

注意多项式的正交系的某些性质. 我们将用 $q_n^0(x)$来表示属于任意一个固定的规范化了的正交系中的多项式,用 $Q_n(x)$来表示与 $q_n^0(x)$相差一个任意常数因子的多项式

$$Q_n(x)=d_nq_n^0(x),$$

其中 d_n是 $Q_n(x)$的带权的范. 所谓"任意的多项式"是指具有任意系数的多项式,一般地说不属于所讨论的正交系.

从前一目中的注 1 直接可推得下面的两个定理:

定理 1　任意的 n 次多项式可以表为多项式 $Q_0(x),Q_1(x),\cdots,Q_n(x)$的线性组合.

定理 2　多项式 $Q_n(x)$带权 $\rho(x)$地正交于任意的次数低于 n 的多项式.

还有下述的普遍事实成立:

定理 3　多项式 $Q_n(x)$在区间(a,b)上恰有 n 个不同的根.

为了证明,我们考虑积分

$$\int_a^b Q_n(x)\rho(x)dx=0, \tag{1}$$

它等于 0,因为按定理 2,$Q_n(x)$带权 $\rho(x)$地正交于零次多项式 $x^0=1$. 由于按照上面所采用的条件,权 $\rho(x)$是非负的函数,故从等式(1)推知:$Q_n(x)$在整个区间(a,b)内不能保持同一符号.

假设 $Q_n(x)$在区间(a,b)内改变符号 $m\geqslant1$ 次,是在点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$处改变的. 考虑 m 次多项式

$$R_m(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m);$$

显然,乘积 $Q_n(x)R_m(x)$在(a,b)上应保持同一符号,因此

$$\int_a^b Q_n(x)R_m(x)\rho(x)dx\neq0. \tag{2}$$

在另一方面,如果 $m<n$,则按定理 2,多项式 $Q_n(x)$ 应当带权 ρ 地正交于多项式 $R_m(x)$,因而积分(2)应当等于 0. 由此推知 $m=n$,于是定理得证.

对于任何正交的多项式系,可以得到联系三个相继的多项式 Q_{n-1},Q_n 及 Q_{n+1} 的递推公式. 首先假定:这多项式系是规范化了的. 按定理 1,乘积 $xq_n^0(x)$ 是一个次数为 $n+1$ 的多项式,可以表为 $q_0^0,q_1^0,\cdots,q_{n+1}^0$ 的线性组合

$$xq_n^0(x)=\sum_{k=0}^{n+1}c_{nk}q_k^0(x). \tag{3}$$

按前一目的公式(13),关于这个展开式的系数有

$$c_{nk}=\int_a^b xq_n^0(x)q_k^0(x)\rho(x)dx. \tag{4}$$

而如果 $k<n-1$,则 $xq_k^0(x)$ 是次数低于 n 的多项式,因而按定理 2,便有 $c_{nk}=0$. 因此,在关系式(3)中只可能有三个相继的系数 $c_{n,n-1}$,$c_{n,n}$ 与 $c_{n,n+1}$ 异于 0.

用 $a_{n,n}^0=a_n^0$ 来表示在表达式 $q_n^0(x)$ 中 x 的最高次幂的系数. 在恒等式(3)中比较 x^{n+1} 的系数,给出 $a_n^0=c_{n,n+1}a_{n+1}^0$,由此

$$c_{n,n+1}=\frac{a_n^0}{a_{n+1}^0}.$$

但从公式(4)看出:对于任何的 n 与 k,都有 $c_{nk}=c_{kn}$,因此 $c_{n,n-1}=c_{n-1,n}=\dfrac{a_{n-1}^0}{a_n^0}$,因而我们得到所求的递推公式

$$xq_n^0(x)=\frac{a_n^0}{a_{n+1}^0}q_{n+1}^0(x)+c_{nn}q_n^0(x)+\frac{a_{n-1}^0}{a_n^0}q_{n-1}^0(x). \tag{5}$$

系数 c_{nn} 容易用表达式 $q_n^0(x)$ 中 x^{n-1} 的系数 b_n^0 来表出. 在(5)中比较 x^n 的系数,得 $b_n^0=\dfrac{a_n^0}{a_{n+1}^0}b_{n+1}^0+c_{nn}a_n^0$,由此

$$c_{nn}=\frac{b_n^0}{a_n^0}-\frac{b_{n+1}^0}{a_{n+1}^0}. \tag{6}$$

要过渡到任意的、不一定是规范化了的正交的多项式系的情形,只需注意

$$a_n=d_na_n^0,\ b_n=d_nb_n^0,$$

其中 d_n 是多项式 $Q_n(x)$ 的带权范数.

利用这些表达式,在将公式(5)与(6)作简单变换后,我们得出下列定理:

定理 4 正交的多项式系中,任何三个相继的多项式由下面的递推关系式联系的:

$$xQ_n(x)=\frac{a_n}{a_{n+1}}Q_{n+1}(x)+\left(\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)Q_n(x)+\frac{a_{n-1}}{a_n}\left(\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)^2Q_{n-1}(x). \tag{7}$$

这样一来,知道了 $Q_n(x)$ 的两个最高次幂的系数 a_n 与 b_n 之后,我们就可逐步地来确定这些多项式. 对于具体的多项式系的系数的计算,我们将在第 93 目里引入,在

那里我们将得出最后的关系式.

为了得到正交多项式的更进一层的性质,我们将假定:权 $\rho(x)$满足微分方程

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{\alpha_0+\alpha_1 x}{\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2}=\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \tag{8}$$

其中 $\beta(x)$有两个根是区间端点 a 与 b,所讨论的多项式系在这区间上(带权地)正交,且在这区间的端点处满足下述条件:

$$\rho(x)\beta(x)\Big|_{x=a,b}=0. \tag{9}$$

我们注意,所有前面所列举的那些特殊的正交多项式系,都满足这些条件.

1) 勒让德多项式:$\rho'=0$,因此当 $\alpha(x)\equiv 0$ 时方程(8)被满足;要满足(9)只需取 $\beta(x)=1-x^2$. 因此,对于勒让德多项式有

$$\alpha=0,\beta=1-x^2. \tag{10}$$

2) 切比雪夫多项式:$\rho'=\dfrac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}=\dfrac{x\rho}{1-x^2}$,因此

$$\alpha=x,\beta=1-x^2. \tag{11}$$

条件(9)满足.

3) 雅可比多项式:$\dfrac{\rho'}{\rho}=\dfrac{\mu}{1+x}-\dfrac{\lambda}{1-x}=\dfrac{\mu-\lambda-(\mu+\lambda)x}{1-x^2}$,因此

$$\alpha=(\mu-\lambda)-(\mu+\lambda)x,\beta=1-x^2, \tag{12}$$

当 $\lambda>-1,\mu>-1$ 时,条件(9)满足.

4) 切比雪夫-埃尔米特多项式:$\dfrac{\rho'}{\rho}=-2x$,因此

$$\alpha=-2x,\beta=1. \tag{13}$$

因为当 $x\to\pm\infty$时 $\rho=e^{-x^2}\to 0$,所以条件(9)满足.

5) 切比雪夫-拉盖尔多项式:$\dfrac{\rho'}{\rho}=\dfrac{\lambda-x}{x}$,因此

$$\alpha=\lambda-x,\beta=x. \tag{14}$$

当 $\lambda>-1$ 时,条件(9)满足.

原来,正交多项式满足具有变系数的二阶线性微分方程,各种各样的物理学上的问题常常可化到这种方程*. 我们来得出关于满足条件(8)与(9)的任意的正交多项式系的微分方程.

设 $Q_n(x)$是在区间(a,b)上带权 $\rho(x)$的正交多项式系中的任意一个多项式,且设这多项式系不一定是规范化了的. 对下面的这个积分使用分部积分法,得到

$$I=\int_a^b[\beta(x)\rho(x)Q'_n(x)]'x^k dx=x^k[\beta\rho Q'_n]_a^b-k\int_a^b x^{k-1}\beta\rho Q'_n dx,$$

* 这种情况使正交多项式系在应用上的意义十分明显.

按照条件(9),右端的第一项等于0,再次使用分部积分法(设 $x^{k-1}\beta\rho=u$, $Q'_n dx=dv$),得

$$I=-k[x^{k-1}\beta\rho Q_n]_a^b+k\int_a^b Q_n[(k-1)x^{k-2}\beta\rho+x^{k-1}\beta'\rho+x^{k-1}\beta\rho']dx.$$

再利用条件(9),且根据(8)作代换 $\beta\rho'=\alpha\rho$,便有

$$I=k\int_a^b Q_n\rho[(k-1)x^{k-2}\beta+x^{k-1}(\beta'+\alpha)]dx.$$

因为 β 是二次多项式,而 $\beta'+\alpha$ 是一次的,故在积分号下的方括弧内是某一个次数为 k 的多项式.按定理2,我们由此可推得:当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时,这积分都等于0.回忆到起初的表达式 I,我们得到:当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时,

$$I=\int_a^b(\beta'\rho Q'_n+\beta\rho'Q'_n+\beta\rho Q''_n)x^k dx=\int_a^b[(\alpha+\beta')Q'_n+\beta Q''_n]x^k\rho dx=0$$

(我们重新利用了方程(8)).最后的等式表明:位于方括弧内的那个 n 次多项式带权 ρ 地正交于所有的乘幂 x^k, $k=0,1,\cdots,n-1$,而这个多项式按定理1是 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_n$ 的线性组合.由于多项式系 $\{Q_n\}$ 是由幂 $\{x^n\}$ 经带权 ρ 的正交化而得到的,故按上一目的注2,我们可推得:这个多项式与 $Q_n(x)$ 至多相差一个常数因子

$$(\alpha+\beta')Q'_n(x)+\beta Q''_n(x)=\gamma_n Q_n(x). \tag{15}$$

要确定因子 γ_n,只要在(15)中比较 x^n 项的系数.用 a_n 表示 $Q_n(x)$ 的最高次幂的系数,并记住在条件(8)中引入的记号,就有

$$(\alpha_1+2\beta_2)na_n+\beta_2 n(n-1)a_n=\gamma_n a_n,$$

由此便得出

$$\gamma_n=n[\alpha_1+(n+1)\beta_2]. \tag{16}$$

这样一来,就证明了

定理5 对于任何一个满足条件(8)与(9)的带权 $\rho(x)$ 的正交多项式系 $\{Q_n(x)\}$,多项式 $Q_n(x)$ 是具有变系数的二阶线性微分方程

$$\beta y''+(\alpha+\beta')y'-\gamma_n y=0 \tag{17}$$

的解,其中 γ_n 由公式(16)确定.

作为例子,我们举出为特殊的多项式所满足的那些微分方程.由公式(10)—(14)及方程(17)有:

a. 勒让德多项式

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0. \tag{18}$$

b. 切比雪夫多项式

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0. \tag{19}$$

c. 雅可比多项式

$$(1-x^2)y''+\{\mu-\lambda-(\mu+\lambda+2)x\}y'+n(\mu+\lambda+n+1)y=0. \tag{20}$$

d. 切比雪夫-埃尔米特多项式

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \tag{21}$$

e. 切比雪夫-拉盖尔多项式

$$xy'' + (\lambda - 1 - x)y' + ny = 0. \tag{22}$$

93. 用权的表达式.母函数 我们将仍旧讨论如下的任意的多项式系$\{Q_n(x)\}$:它在区间(a,b)上是带权$\rho(x)$正交的,权$\rho(x)$满足条件

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}; \quad \rho(x)\beta(x)\Big|_{x=a,b} = 0; \tag{1}$$

而这多项式系不一定是规范化了的.对于这样的多项式系,可以给出用权$\rho(x)$与函数$\beta(x)$来直接表达多项式$Q_n(x)$的公式.我们有

定理 1 对于任何一个满足条件(1)的带权$\rho(x)$正交的多项式系$\{Q_n(x)\}$,多项式$Q_n(x)$可表示成

$$Q_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\{\rho(x)\beta^n(x)\} \tag{2}$$

的形式,其中A_n是一个与多项式的标准形式有关的常系数.

关于勒让德多项式的这公式,已由罗德里格证出(1814 年).对于其他的特殊多项式也可得到类似的公式.我们引入的这个公式的推导是由 И.Г.阿拉曼诺维奇告知的.

首先证明:表达式

$$\widetilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\{\rho(x)\beta^n(x)\} \tag{3}$$

是一个n次多项式.我们有

$$(\rho\beta^n)' = \rho'\beta^n + \rho\beta^{n-1} n\beta' = \rho\beta^{n-1}\widetilde{Q}_{n,1},$$

其中$\widetilde{Q}_{n,1} = \alpha + n\beta'$是个一次多项式(我们利用了微分方程(1)).类似地,

$$(\rho\beta^n)'' = (\rho\beta^{n-1}\widetilde{Q}_{n,1})' = \rho\beta^{n-2}\widetilde{Q}_{n,2},$$

其中$\widetilde{Q}_{n,2} = [\alpha + (n-1)\beta']\widetilde{Q}_{n,1} + \beta\widetilde{Q}'_{n,1}$是个二次多项式.

考虑到应用数学归纳法,假定公式

$$(\rho\beta^n)^{(k)} = (\rho\beta^{n-k+1}\widetilde{Q}_{n,k-1})' = \rho\beta^{n-k}\widetilde{Q}_{n,k} \tag{4}$$

成立,其中

$$\widetilde{Q}_{n,k} = [\alpha + (n-k+1)\beta']\widetilde{Q}_{n,k-1} + \beta\widetilde{Q}'_{n,k-1} \tag{5}$$

是个k次多项式.于是再应用方程(1),得

$$(\rho\beta^n)^{(k+1)} = (\rho\beta^{n-k}\widetilde{Q}_{n,k})' = \rho\beta^{n-k-1}\{[\alpha + (n-k)\beta']\widetilde{Q}_{n,k} + \beta\widetilde{Q}'_{n,k}\}.$$

我们看出:这公式包含了对于$k+1$而写的公式(4)与(5).这样一来,按数学归纳法原则就可推断:(4)与(5)对于所有的$k = 1, 2, \cdots, n$都成立.我们注意,只需设$\widetilde{Q}_{n,0} \equiv 1$,公式(4)对于$k=1$也仍有效.

公式(4)与(5)在$k=n$时给出

$$(\rho\beta^n)^{(n)} = (\rho\beta\widetilde{Q}_{n,n-1})' = \rho\widetilde{Q}_n,$$

其中
$$\widetilde{Q}_n = \widetilde{Q}_{n,n} = (\alpha+\beta')\widetilde{Q}_{n,n-1} + \beta\widetilde{Q}'_{n,n-1}$$
是个 n 次多项式.由此便推得了关于表达式(3)的论断.

现在证明:多项式 $\widetilde{Q}_n$ 带权 ρ 正交于任一个乘幂 $x^k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.为此,我们将逐次应用分部积分法于积分

$$I_k = \int_a^b x^k\widetilde{Q}_n\rho dx = \int_a^b x^k d(\rho\beta\widetilde{Q}_{n,n-1}),$$

每次都利用公式(4)以及关于 $\rho\beta$ 的条件(1).在第 $k-1$ 步得到

$$I_k = (-1)^{k-1}k!\int_a^b x d(\rho\beta^k\widetilde{Q}_{n,n-k}), \tag{6}$$

而在第 k 步有

$$I_k = (-1)^k k!\int_a^b d(\rho\beta^{k+1}\widetilde{Q}_{n,n-k-1}) = 0.$$

最后这个式子对于 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时均成立(当 $k=n-1$ 时,我们设 $\widetilde{Q}_{n,0}=1$),因而正交性得证.

按第91目的注2,现在我们可以断言:多项式 $\widetilde{Q}_n$ 与正交多项式 Q_n 只相差一个常数因子:$Q_n = A_n\widetilde{Q}_n$,这也就给出了所求的公式(2).

如已经指出过的,系数 A_n 的数值与多项式的标准形式有关.特别,例如,多项式 $\widetilde{Q}_n$ 是取为标准形式,使得 $A_n=1$ 的.我们来求出这多项式中最高次的 x 幂的系数 $\tilde{a}_n$.为此,在公式(5)中比较最高次的 x 幂的系数

$$\tilde{a}_{n,k} = [\alpha_1 + (2n-k+1)\beta_2]\tilde{a}_{n,k-1}.$$

由此得

$$\tilde{a}_n = \tilde{a}_{n,n} = [\alpha_1+(n+1)\beta_2][\alpha_1+(n+2)\beta_2]\cdots[\alpha_1+2n\beta_2]\tilde{a}_{n,0},$$

其中 $\tilde{a}_{n,0}=1$,或简写为

$$\tilde{a}_n = \prod_{k=n+1}^{2n}(\alpha_1+k\beta_2). \tag{7}$$

用完全类似的方法,还可求得多项式 $\widetilde{Q}_n$ 的表达式中 x^{n-1} 的系数:

$$\tilde{b}_n = n(\alpha_0+n\beta_1)\prod_{k=n+1}^{2n-1}(\alpha_1+k\beta_2) = \frac{\alpha_0+n\beta_1}{\alpha_1+2n\beta_2}n\tilde{a}_n{}^{*} \tag{8}$$

作为例子,我们来指出特殊多项式的 $\tilde{a}_n$ 与 $\tilde{b}_n$ 的数值,并设这些多项式已经这样地标准化,使在公式(2)中的系数 $A_n=1$.

---

* 为了要得到公式(8),必须比较在公式(5)中 x^{k-1} 的系数,这给出

$$\tilde{b}_{n,k} = [\alpha_1+(2n-k)\beta_2]\tilde{b}_{n,k-1} + (\alpha_0+n\beta_1)\tilde{a}_{n,k-1}$$

(记号与以前类似),然后逐次应用这公式,自 $\tilde{b}_{n,1}=\alpha_0+n\beta_1$ 开始,直到得出 $\tilde{b}_{n,n}=\tilde{b}_n$ 为止.同时应当利用前面得到的关于 $\tilde{a}_{n,k}$ 的表达式.

关于雅可比多项式，$\alpha=(\mu-\lambda)-(\mu+\lambda)x,\beta=1-x^2$，因此

$$\tilde{a}_n=(-1)^n\prod_{k=n+1}^{2n}(\lambda+\mu+k)=(-1)^n\frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)},\tag{9}$$

因为，由于关于 Γ 函数的函数方程(参看第 89 目公式(14))，

$$\Gamma(z+2n+1)=(z+2n)(z+2n-1)\cdots(z+n+1)\Gamma(z+n+1),$$

又

$$\tilde{b}_n=n\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+2n}\tilde{a}_n=(-1)^n(\lambda-\mu)n\frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)}.\tag{10}$$

特别，从公式(9)与(10)对于勒让德多项式($\lambda=\mu=0$)得出：

$$\tilde{a}_n=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!},\tilde{b}_n=0.\tag{11}$$

对于切比雪夫多项式$\left(\lambda=\mu=-\frac{1}{2}\right)$为

$$\tilde{a}_n=(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(n-1)!},\tilde{b}_n=0.\tag{12}$$

关于切比雪夫－埃尔米特多项式($\alpha=-2x,\beta=1$)，我们有

$$\tilde{a}_n=(-1)^n2^n,\tilde{b}_n=0.\tag{13}$$

而对于切比雪夫－拉盖尔多项式($\alpha=\lambda-x,\beta=x$)有

$$\tilde{a}_n=(-1)^n,\tilde{b}_n=(-1)^{n+1}(\lambda+n)n.\tag{14}$$

现在我们来求多项式 $\widetilde{Q}_n$ 的范数 $\tilde{d}_n$．我们有

$$\tilde{d}_n^2=\int_a^b\widetilde{Q}_n^2\rho dx=\int_a^b(\tilde{a}_nx^n+\cdots)\widetilde{Q}_n\rho dx=\tilde{a}_n\int_a^bx^n\widetilde{Q}_n\rho dx,$$

因为，按前一目的定理 2，$\widetilde{Q}_n$ 带权 ρ 正交于任一个次数低于 n 的多项式．现在再应用当 $k=n$ 时的公式(6)，并且按分部积分法求积分，便求得

$$\tilde{d}_n^2=(-1)^nn!\ \tilde{a}_n\int_a^b\rho\beta^ndx,$$

或最后

$$\tilde{d}_n=\sqrt{(-1)^nn!\ \tilde{a}_n\delta_n},\tag{15}$$

其中

$$\delta_n=\int_a^b\rho\beta^ndx\tag{16}$$

是由权 ρ 与函数 β 所确定的量．

知道了 $\tilde{d}_n$ 与 $\tilde{a}_n$ 后，不难确定规范化了的多项式 $q_n^0(x)=\frac{1}{\tilde{d}_n}Q_n(x)$ 的最高次的系数 a_n^0．

$$a_n^0=\frac{\tilde{a}_n}{\tilde{d}_n}=\sqrt{\frac{(-1)^n\tilde{a}_n}{n!\ \delta_n}}.\tag{17}$$

对于雅可比多项式，公式(16)给出

$$\delta_n=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\lambda+n}(1+x)^{\mu+n}dx=2^{\lambda+\mu+2n+1}\frac{\Gamma(\lambda+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2n+2)}$$

(我们利用了第 90 目公式(3)).根据(9)与(17)得到.

$$(a_n^0)^2=\frac{1}{2^{\lambda+\mu+2n+1}}\frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+2)}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}\frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)}. \tag{18}$$

特别,对于勒让德多项式与切比雪夫多项式分别有

$$a_n^0=\frac{(2n)!}{2^{n+\frac{1}{2}}(n!)^2}\sqrt{2n+1},a_n^0=\frac{(2n)!}{2^{n+\frac{1}{2}}n!}\frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{n-\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

对于切比雪夫-埃尔米特多项式与切比雪夫-拉盖尔多项式分别有

$$\delta_n=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},\delta_n=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\lambda+n}dx=\Gamma(\lambda+n+1),$$

因而根据(13)与(14)得

$$(a_n^0)^2=\frac{2^n}{\sqrt{\pi}n!},(a_n^0)^2=\frac{1}{n!\ \Gamma(\lambda+n+1)}. \tag{20}$$

在文献中,一般地是讨论没有规范化的正交多项式 $Q_n(x)$.要唯一地确定这些多项式,显然,只要除了给出权与区间之外,还给出它们的最高次项的系数 a_n 的数值.仍旧采用前面的记号,有

$$Q_n(x)=A_n\widetilde{Q}_n(x)=d_nq_n^0(x),$$

由此比较最高次的系数,求出

$$a_n=A_n\tilde{a}_n=d_na_n^0,b_n=A_n\tilde{b}_n=d_nb_n^0. \tag{21}$$

由于系数 $\tilde{a}_n$ 与 a_n^0 我们已经在前面求出,故只需知道了 a_n,我们就可以由此确定 A_n 与 d_n.对于特殊多项式,我们将这些数量列表如下:

多项式	记号	a_n	d_n^2	A_n
勒让德	$P_n(x)$	$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$	$\frac{2}{2n+1}$	$(-1)^n\frac{1}{2^nn!}$
切比雪夫	$T_n(x)$	1	$\frac{\pi}{2^{2n-1}}$	$(-1)^n\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}$
雅可比	$P_n^{(\lambda,\mu)}(x)$	$\frac{1}{2^nn!}\frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)}$	$\frac{2^{\lambda+\mu+1}\Gamma(\lambda+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}{n!\ \Gamma(\lambda+\mu+n+1)\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}$	$(-1)^n\frac{1}{2^nn!}$
切比雪夫-埃尔米特	$H_n(x)$	2^n	$2^nn!\ \sqrt{\pi}$	$(-1)^n$
切比雪夫-拉盖尔	$L_n^{(\lambda)}(x)$	$(-1)^n$	$n!\ \Gamma(\lambda+n+1)$	1

知道了 A_n,我们可对所有这些多项式写出公式(2).作为例子,对于勒让德多项式它可写成

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \tag{22}$$

(它与著名的罗德里格斯公式一致).对于切比雪夫-拉盖尔多项式它可写成

$$L_n^{(\lambda)}(x)=x^{-\lambda}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{\lambda+n}) \tag{23}$$

(它时常被取为 $L_n^{(\lambda)}(x)$的定义).

再者,知道了系数 a_n,d_n与b_n(b_n可从(21)式由 A_n与以前求得的$\bar{b}_n$来确定),我们可把关于这些多项式的递推关系式写成最后的形式(参看前一目的公式(7)):

a) 勒让德多项式

$$xP_n(x)=\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x), n\geqslant 1. \tag{24}$$

b) 切比雪夫多项式

$$xT_n(x)=T_{n+1}(x)+\frac{1}{4}T_{n-1}(x), n\geqslant 2^*. \tag{25}$$

c) 雅可比多项式

$$\begin{aligned}&(\nu+2n)(\nu+2n+1)(\nu+2n+2)xP_n^{(\lambda,\mu)}(x)\\&=2(n+1)(\nu+n+1)(\nu+2n)P_{n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)+(\mu^2-\lambda^2)(\nu+2n+1)P_n^{(\lambda,\mu)}(x)\\&\quad+2(\lambda+n)(\mu+n)(\nu+2n+2)P_{n-1}^{(\lambda,\mu)}(x),\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\nu=\lambda+\mu$.

d) 切比雪夫-埃尔米特多项式

$$xH_n(x)=\frac{1}{2}H_{n+1}(x)+nH_{n-1}(x), n\geqslant 1. \tag{27}$$

e) 切比雪夫-拉盖尔多项式

$$\begin{aligned}xL_n^{(\lambda)}(x)=&-L_{n+1}^{(\lambda)}(x)+(\lambda+2n+1)L_n^{(\lambda)}(x)\\&-n(\lambda+n)L_{n-1}^{(\lambda)}(x), n>1.\end{aligned} \tag{28}$$

最后我们将证明:正交系中的多项式可视为某个解析函数的泰勒展开式中的系数,这个解析函数称做这正交系中的多项式的母函数**.

И.Г.阿拉曼诺维奇和И.И.科瑞夫尼可夫曾经告诉我们,对于带权 ρ 正交的且满足条件(1)的任一多项式系,都可以得到母函数.在此,我们将遵循他们的叙述.

为简单起见,我们视多项式 $\widetilde{Q}_n(x)$已被这样地规范化了的,使得在公式(2)中的所有的系数 $A_n=1$.由关系式***

---

* 当 $n<2$ 时,公式有稍为不同的形式:

$$xT_1=T_2+\frac{1}{4}T_0+\frac{1}{4}, xT_0=T_1.$$

** 在第 70 目中,我们已举出过利用母函数来定义多项式的例子.

*** 依 w 的幂来排列的级数(29)的收敛半径,当然依赖于 z 的值.在以前的叙述中,$\widetilde{Q}_n$是对于变元的实数值来定义的,但由于 $\widetilde{Q}_n$是多项式,我们可以认为它是定义在全部复平面上.

$$\Psi(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{Q}_n(z)}{n!}w^n \tag{29}$$

来定义的含两个复变数 z 与 w 的函数，称做函数族 $\{\widetilde{Q}_n\}$ 的**母函数**.

利用公式(2)及关于高阶导数的柯西公式，将表达式(29)加以变换，我们有

$$\Psi(z,w)=\frac{1}{\rho(z)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^n(\rho\beta^n)}{dz^n}=\frac{1}{\rho(z)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\rho(\zeta)\beta^n(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,$$

其中 C 是一条包围点 $\zeta=z$ 且位于函数 $\rho(\zeta)\beta^n(\zeta)$ 的解析区域内的闭周线. 在最后的公式中，交换求和与求积分的顺序，并且把所得到的几何级数求和，得出

$$\Psi(z,w)=\frac{1}{\rho(z)}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w\beta(\zeta)}{\zeta-z}\right)^n d\zeta$$

$$=\frac{1}{\rho(z)}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\rho(\zeta)d\zeta}{\zeta-z-w\beta(\zeta)}.$$

我们的变换是合法的，只需对于在曲线 C 上的所有的 ζ，几何级数的公比 $\frac{w\beta(\zeta)}{\zeta-z}$ 的模小于 1，而这对于适当小的 $|w|$ 总是满足的. 被积函数的分母是 ζ 的二次多项式，且对于很小的 $|w|$，这多项式的一个根——我们用 ζ_w 来表示——接近于 $\zeta=z$，而另一个根的绝对值则较大. 在必要时缩小闭周线 C，我们可认为第二个根位于这闭周线之外. 于是被积函数在闭周线 C 内只有一个一阶极点 $\zeta=\zeta_w$，其留数是

$$c_{-1}=\frac{\rho(\zeta_w)}{1-w\beta'(\zeta_w)}.$$

应用柯西留数定理，最后得到：

定理 2 对于任一个带权 $\rho(x)$ 正交的且满足条件(1)的多项式系 $\{\widetilde{Q}_n(x)\}$，有母函数 $\Psi(z,w)$ 存在，使

$$\Psi(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{Q}_n(z)}{n!}w^n. \tag{29}$$

这函数由公式

$$\Psi(z,w)=\frac{1}{\rho(z)}\frac{\rho(\zeta_w)}{1-w\beta'(\zeta_w)} \tag{30}$$

来确定，其中 ζ_w 是二次方程

$$\zeta-z-w\beta(\zeta)=0 \tag{31}$$

的那个在 w 很小时接近于 $\zeta=z$ 的根.

我们来举出一些例子.

例 1 勒让德多项式 方程(31)具有形式 $w\zeta^2+\zeta-(z+w)=0$，由此

$$\zeta_w=\frac{1}{2w}\left(-1+\sqrt{1+4wz+4w^2}\right)$$

(在根号前面的符号应选得使对于很小的 $|w|$ 有 $\zeta_w\approx z$)，因而按公式(30)得

$$\Psi(z,w)=\frac{1}{\sqrt{1+4wz+4w^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{P}_n(z)}{n!}w^n.$$

作代换 $\widetilde{P}_n=\frac{1}{A_n}P_n=2^n n!\ (-1)^n P_n$，并且以 $-\frac{w}{2}$ 代 w，最后得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-2wz+w^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)w^n, \tag{32}$$

这与第 70 目中的公式(8)一致.

例 2 切比雪夫－埃尔米特多项式 方程(31)具有形式 $\zeta-z-w=0$，因而按公式(30)有

$$\Psi(z,w)=\frac{\rho(\zeta_w)}{\rho(z)}=e^{-(w^2+2wz)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{H}_n(z)}{n!}w^n.$$

作代换 $\widetilde{H}_n=(-1)^n H_n$，并且以 $-w$ 代 w，得

$$e^{2wz-w^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{n!}w^n. \tag{33}$$

例 3 切比雪夫－拉盖尔多项式 方程(31)具有形式 $\zeta-w-w\zeta=0$，因而按公式(30)得到

$$\Psi(z,w)=\frac{z^{-\lambda}}{(1-w)^{\lambda+1}}e^{-\frac{zw}{1-w}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(z)}{n!}w^n. \tag{34}$$

94. 例.应用 (1) 勒让德多项式在势能的理论中起着重要的作用.考虑在空间中一个质量为 1 的吸引点 P，它与坐标原点的距离为 a. 设点 M 与坐标原点的距离为 r，则在点 M 处所算出的这个质点的势能具有形式

$$V(M)=\frac{1}{MP}=\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}},$$

其中 φ 为 OP 与 OM 间的角度. 令 $t=\frac{a}{r}$，$x=\cos\varphi$，于是

$$V(M)=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{a}{r}\cos\varphi+\frac{a^2}{r^2}}}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

因而，如果将右端按照变量 t 的乘幂展为级数，则按前一目的公式(32)，这级数的系数将是勒让德多项式

$$V(M)=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n. \tag{1}$$

对于实数的 x，$-1\leqslant x\leqslant 1$，这展开式当 $|t|<1$ 时，即当 $r>a$ 时，是收敛的. 事实上，如果把 V 视为 t 的函数，则对于这样的 x，二次方程 $t^2-2xt+1=0$ 的两个根 $t_{1,2}=e^{\pm i\varphi}(x=\cos\varphi)$ 是 V 的两个奇点，并且位于单位圆周上.

(2) 关于勒让德多项式的递推公式 除了基本的递推公式

$$xP_n(x)=\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)+\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) \tag{2}$$

外，对于勒让德多项式可得出另外一些与不同次数的 $P_n(x)$ 有关系的公式. 首先，将

展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \tag{3}$$

对 x 求导数,求得

$$\frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)t^n,$$

由此,再利用展开式(3),且比较 t 的同次幂的系数,得第二个递推公式

$$P_n(x)=P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x). \tag{4}$$

将(2)对 x 求导数,且从所得到的关系式及公式(4)中消去导数 $P'_n(x)$,便得第三个递推公式

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x). \tag{5}$$

(3) 勒让德多项式的积分表示 按前一目的罗德里格斯公式(22)有

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}.$$

利用第 17 目中关于高阶导数的柯西公式,由此得第一积分表示

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-x)^{n+1}}d\zeta, \tag{6}$$

其中 C 是包围点 x 的一条闭周线. 特别,设 x 是实数,$|x|<1$,而 C 是以点 x 为中心,$\sqrt{1-x^2}$ 为半径的圆周,于是令 $\zeta-x=\sqrt{1-x^2}\,e^{it}$,得 $\zeta^2-1=2\sqrt{1-x^2}\,e^{it}\cdot(x+i\sin t\sqrt{1-x^2})$,而因此,

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+i\sin t\sqrt{1-x^2})^n dt.$$

由于在这式子中左端与右端都是 x 的解析函数,故我们对于实值的 $x(|x|<1)$ 所得到的最后这个等式,对于 x 的所有的复数值也成立. 此外,容易看出:在公式中的 $\sin t$ 可用 $\cos t$ 替代,而自 0 到 2π 的积分可代以自 0 到 π 的积分的二倍. 我们得到勒让德多项式的第二个积分表示式(拉普拉斯)

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos t)^n dt. \tag{7}$$

我们在这里作代换 $x+i\sqrt{1-x^2}\cos t=\zeta$,那时 $dt=\dfrac{id\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}}$,于是在平面 ζ 中的积分路线便成为连接点 $x+i\sqrt{1-x^2}=e^{i\varphi}$ 与 $x-i\sqrt{1-x^2}=e^{-i\varphi}$ 的垂直线段,因此

$$P_n(x)=-\frac{i}{\pi}\int_{e^{-i\varphi}}^{e^{i\varphi}}\frac{\zeta^n d\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}}.$$

按柯西定理,这线段可代以圆 $|\zeta|=1$ 上满足 $\zeta=e^{i\theta}$, $-\varphi\leqslant\theta\leqslant\varphi$ 的圆弧,于是我们得出

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{e^{i(n+1)\theta}d\theta}{\sqrt{1-2xe^{i\theta}+e^{2i\theta}}}=\frac{1}{x\sqrt{2}}\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}d\theta}{\sqrt{\cos\theta-x}}. \tag{8}$$

在此作代换 $x=\cos\varphi$，再分出右端的实数部分，得到勒让德多项式的第三个积分表示式(狄利克雷)

$$P_n(\cos\varphi)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}. \tag{9}$$

(4) 关于勒让德多项式的渐近公式　在积分(8)中，我们考虑用复变量 $\zeta=s+i\sigma$ 替代 θ，且按柯西定理，用由三条线段所组成的折线 Ⅰ + Ⅱ + Ⅲ(图 195)来替代积分线段 $(-\varphi,\varphi)$，我们得到

$$\pi\sqrt{2}P_n(\cos\varphi)=\int_{\mathrm{I}}+\int_{\mathrm{II}}+\int_{\mathrm{III}}. \tag{10}$$

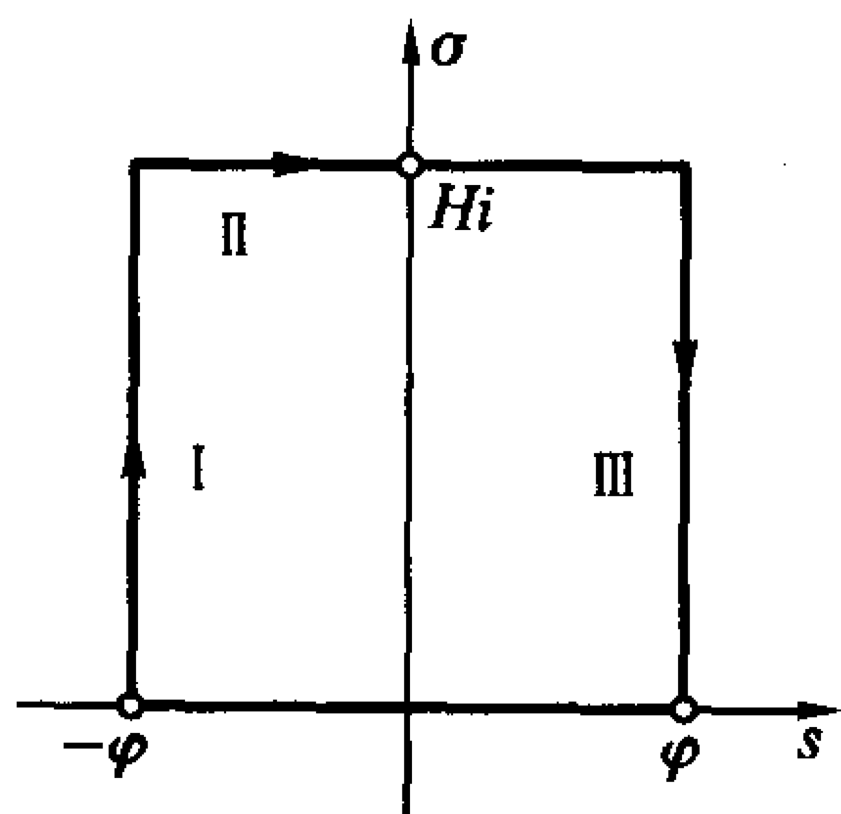


图 195

在线段Ⅱ上，$\zeta=s+iH$，被积函数的模

$$\left|\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\zeta}}{\sqrt{\cos\zeta-\cos\varphi}}\right|\leqslant\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)H}}{\sqrt{|\cos\zeta|-|\cos\varphi|}}$$

当 $H\to\infty$ 时趋于0，因此，当 $H\to\infty$ 时 $\int_{\mathrm{II}}\to 0$；在线段Ⅰ及Ⅲ上，有 $\zeta=\mp\varphi+i\sigma, d\zeta=id\sigma$. 取 $H\to\infty$ 时的极限，由(10)得出

$$\pi\sqrt{2}P_n(\cos\varphi)=ie^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}d\sigma}{\sqrt{\cos(\varphi-i\sigma)-\cos\varphi}}$$
$$-ie^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}d\sigma}{\sqrt{\cos(\varphi+i\sigma)-\cos\varphi}}. \tag{11}$$

为了要得到在 n 的数值很大时积分的近似估计，我们利用第 77 目的越过法. 对于大的 n，函数 $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}$ 在点 $\sigma=0$ 处有十分陡峭的尖峰，且最陡峭的是当 σ 取实数值时的下坡，因此积分路线不需要形变. 在 $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}$ 前面的因子 $\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi\pm i\sigma)-\cos\varphi}}$ 的存在，只加剧在点 $\sigma=0$ 处的尖峰. 实际上，

$$\cos(\varphi\pm i\sigma)-\cos\varphi=\mp 2\sin\left(\varphi\pm\frac{i\sigma}{2}\right)\sin\frac{i\sigma}{2},$$

因而这因子的模

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi\pm i\sigma)-\cos\varphi}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{sh}\frac{\sigma}{2}\left|\sin\left(\varphi\pm i\frac{\sigma}{2}\right)\right|}}$$

当 $\sigma\to 0$ 时趋于无穷大，且当 $\sigma\to\infty$ 时，以指数函数的速度来减小.

这样一来，对于很大的 n，只需限制在一个很小的积分区间 $0<\sigma<h$ 上，积分(11)的主要部分就可算出，在这区间上有

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi \pm i\sigma) - \cos\varphi}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mp 2\sin\varphi \cdot \frac{i\sigma}{2}}} = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\varphi}}\sigma^{-\frac{1}{2}}.$$

我们也可以保留积分区间的其余的部分(h,∞)，而仍具有同一精确度，因为，当 n 很大时，函数 $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}$在$(h,\infty)$上总是取极小的数值. 于是对于公式(11)中的第一个积分，我们得到

$$\int_0^{\infty} \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\varphi}}\int_0^{\infty} \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma} d\sigma = \frac{1-i}{\sqrt{2\sin\varphi}} \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1-i}{\sqrt{2\sin\varphi}}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}.$$

类似地估计第二个积分

$$\int_0^{\infty} \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\varphi}}\int_0^{\infty} \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma} d\sigma = \frac{1+i}{\sqrt{2\sin\varphi}}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}},$$

于是

$$P_n(\cos\varphi) \approx \frac{i}{2\pi\sqrt{\sin\varphi}}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}\left\{(1-i)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi} - (1+i)e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi}\right\},$$

或者，在经过简单的变换后，

$$P_n(\cos\varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\varphi}}.$$

不改变其精确度，我们可在分母中用 n 来替代 $n+\frac{1}{2}$，于是，最后得到关于勒让德多项式的渐近公式(拉普拉斯)：

$$P_n(\cos\varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\varphi}}. \tag{12}$$

我们将不去讲在所得到的公式中的误差的估计.

从渐近公式看出：当 n 无限制增大时，P_n 同$\frac{1}{\sqrt{n}}$一样地趋于 0. 从这一公式可以得到关于函数 $P_n(\cos\varphi)$的零点的近似公式

$$\varphi_k \approx \frac{4k-1}{2}\frac{\pi}{2n+1} \quad (k=1,2,\cdots,n), \tag{13}$$

当 n 愈大时愈精确.

(5) 勒让德函数 设关于勒让德多项式的微分方程(第 92 目公式(18))

$$L[w]=(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0 \tag{14}$$

中的 n 不是整数,我们试图仍用积分(6)来满足它.当 n 为正整数时,积分(6)代表多项式 $P_n(x)$

$$w(z)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

将它代入方程(14)中得

$$L[w]=\frac{n+1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+3}}[2(n+1)\zeta(\zeta-z)-(n+2)(\zeta^2-1)]d\zeta$$

$$=\frac{n+1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{(\zeta^2-1)^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+2}}\right\}d\zeta.$$

因此,如果当沿着闭周线 C 绕行一周后函数

$$f(\zeta)=\frac{(\zeta^2-1)^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+2}}$$

仍回到出发时的数值,则 $L[w]=0$.将平面 ζ 沿负轴上从点 -1 到 $-\infty$ 的射线割开,且取包围点 $\zeta=1$ 与 $\zeta=z$ 而不触及割开线的任一条闭周线作为 C (图 196).当点 ζ 绕行这闭周线完整一周时,

$$\arg f(\zeta)=(n+1)\{\arg(\zeta-1)+\arg(\zeta+1)\}-(n+2)\arg(\zeta-z)$$

得到增量 $(n+1)2\pi-(n+2)2\pi=-2\pi$,因为这时 $\arg(\zeta-1)$ 与 $\arg(\zeta-z)$ 都得到增量 2π,而 $\arg(\zeta+1)$ 回归到出发时的数值.由此推出,当沿闭周线 C 绕行一周后,函数 $f(\zeta)$ 回归到出发时的数值,也就是,对于任何一个 n,积分

$$P_n(z)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \tag{15}$$

都是方程(14)的解,这里 C 是前面所描述的那种周线.这个积分称做**第一类勒让德函数**.对于正整数 n,点 $\zeta=\pm1$ 不再是奇点了,因而 C 可形变为任何一条包围点 $\zeta=z$ 的周线.因此,对于这样的 n,勒让德函数变为通常的勒让德多项式.

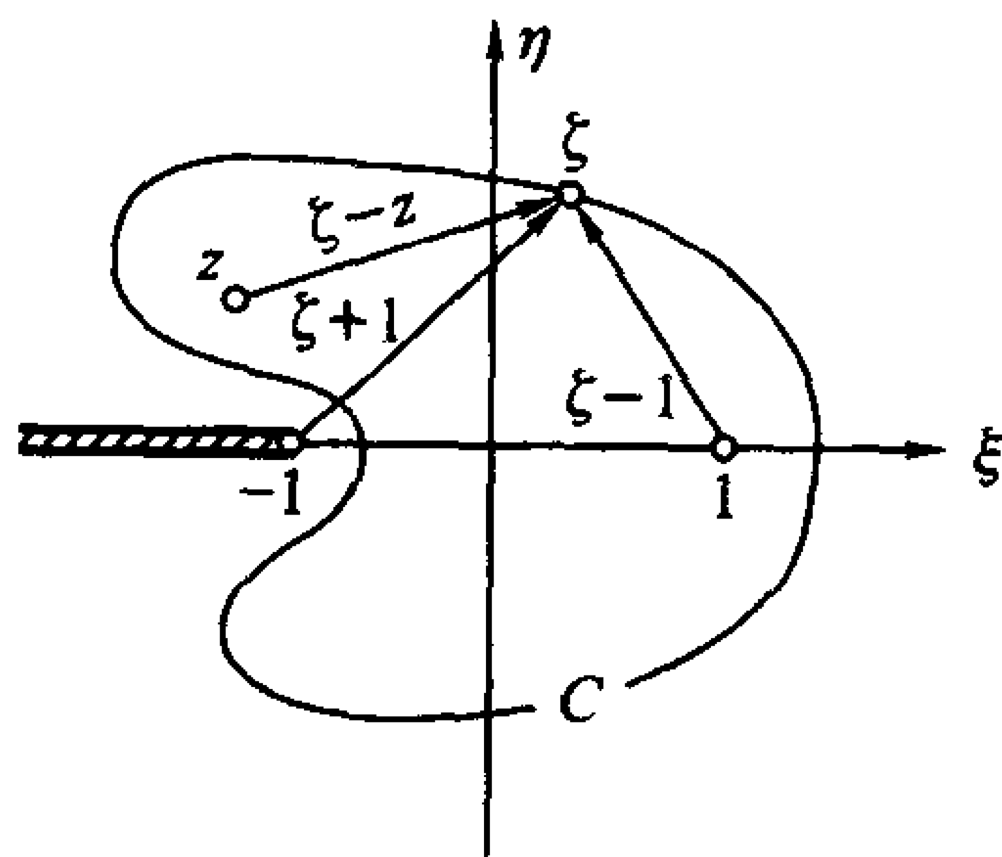


图 196

由于勒让德的微分方程(14)是二阶的,故除了 $P_n(z)$ 之外,它应当还具有一个与 $P_n(z)$ 线性无关的解.这个解可由 $P_n(z)$ 借助于一次求积分而得到

$$w=P_n(z)\int^z\frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)P_n^2(\zeta)}. \tag{16}$$

实际上,勒让德方程可写成

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dw}{dz}\right]+n(n+1)w=0$$

的形式.由于 $P_n(z)$ 满足这方程,故

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right]+n(n+1)P_n=0.$$

把这两个方程中第一个方程乘以 P_n，第二个乘以 w，再进行相减，我们得到

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\left(P_n\frac{dw}{dz}-w\frac{dP_n}{dz}\right)\right]=0,$$

由此在积分后便得出

$$(1-z^2)\left(P_n\frac{dw}{dz}-w\frac{dP_n}{dz}\right)=C$$

或

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w}{P_n}\right)=\frac{C}{(1-z^2)P_n^2(z)},$$

于是

$$w=P_n(z)C\int\frac{dz}{(1-z^2)P_n^2(z)},$$

除了常数因子 C 之外，它与积分(16)重合.将积分(16)规范化，使在无穷远处它等于0，即

$$Q_n(z)=P_n(z)\int_\infty^z\frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)P_n^2(\zeta)},\tag{17}$$

这通常称做**第二类勒让德积分**.

函数 $P_n(z)$ 同 $Q_n(z)$ 线性无关，因为，当 $z\to\infty$ 时 $P_n(z)\to\infty$，而 $Q_n(z)\to0$（在关系式 $\alpha P_n(z)+\beta Q_n(z)\equiv0$ 中，命 $z\to\infty$，先得出 $\alpha=0$，然后代入任何一个 z，便得出 $\beta=0$）.

从公式(17)看出：点 $\zeta=\pm1$ 是勒让德函数 $Q_n(z)$ 的对数性的奇点，所以对于整数的 n，函数 $Q_n(z)$ 不是多项式.

(6) 球面函数　考虑齐次的调和多项式 $U_n(x,y,z)$：

$$U_n(x,y,z)=\sum_{k+l+m=n}a_{klm}x^ky^lz^m,\tag{18}$$

其中的求和式是对于所有的其和数等于 n 的非负指标 k,l,m 来取的.多项式 U_n 满足三维的拉普拉斯方程

$$\Delta U_n=\frac{\partial^2U_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U_n}{\partial z^2}=0.\tag{19}$$

当使用球面坐标 $x=r\sin\theta\cos\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\theta$ 时，调和多项式可表示成

$$U_n(x,y,z)=r^nY_n(\theta,\varphi)\tag{20}$$

的形式，其中 Y_n 是关于 $\cos\theta,\cos\varphi,\sin\theta,\sin\varphi$ 的多项式.函数 $Y_n(\theta,\varphi)$ 称做 **n 阶球面函数**.

利用在积分号下直接对 x,y,z 求导数，我们可以确认，下列的 $2n+1$ 个 n 次多项式

$$\left.\begin{array}{l}\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n\cos mtdt\quad(m=0,1,2,\cdots,n),\\ \int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n\sin mtdt\quad(m=1,2,\cdots,n)\end{array}\right\}\tag{21}$$

(当 $m>n$ 时,由于三角函数的正交性,积分等于 0)都是调和多项式.可以证明:它们构成 n 次多项式的最大的*线性无关系.

引入球面坐标,且利用表示式(20),我们从(21)得到$(2n+1)$个球面函数的系

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n\cos mtdt,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n\sin mtdt.$$

在这些积分中作代换 $t-\varphi=\tau$,我们可将它们表为

$$\int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\tau]^n\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}m(\varphi+\tau)d\tau.$$

现在利用周期函数的已知的性质:沿着长度等于周期的线段的积分,与线段的位置无关.我们以线段$[-\pi,\pi]$替代积分线段$[-\pi-\varphi,\pi-\varphi]$.最后,按照熟知的公式展开 $\cos m(\varphi+\tau)$,且利用函数 $\sin m\tau$ 是奇函数这个性质,我们得到这$(2n+1)$个 n 阶球面函数的最后的表达式:

$$\cos m\varphi\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\tau)^n\cos m\tau d\tau\quad(m=0,1,2,\cdots,n),\tag{22}$$

$$\sin m\varphi\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\tau)^n\cos m\tau d\tau\quad(m=1,2,\cdots,n).$$

在表达式(22)中,$\cos m\varphi$ 与 $\sin m\varphi$ 的系数相等.与它们只相差一个常数因子的函数

$$P_{n,m}(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\tau)^n\cos m\tau d\tau,\tag{23}$$

称做**勒让德的联合函数**.特别,

$$P_{n,0}(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\tau)^n d\tau=P_n(\cos\theta)$$

与勒让德多项式相一致(我们利用了拉普拉斯的积分表示式(7)).

这样一来,$(2n+1)$个 n 阶球面函数系便可表为

$$P_n(\cos\theta);P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi,P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi\tag{24}$$

的形式,其中 $m=1,2,\cdots,n$ 且 $P_{n,m}$是勒让德联合函数.

(7) 切比雪夫多项式的极值性质 切比雪夫多项式是在区间$(-1,1)$上与零相差最少的多项式.这意味着:在所有的最高系数为 1 的 n 次多项式中,在区间$(-1,1)$上 $T_n(x)$的模的最大值达到最小值.实际上,令 $x=\cos\varphi$ 及 $x_k=\cos\dfrac{k\pi}{n}$

* 这表示,任一个 n 次调和多项式 $U_n(x,y,z)$都可以表成多项式(21)的线性组合.

$(k=0,1,\cdots,n)$,于是从公式

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\ \arccos x)=\frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}$$

(参看第70目公式(11))得出

$$T_n(x_k)=\frac{\cos k\pi}{2^{n-1}}=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}},$$

即,在这些点处 $T_n(x)$的模达到它的最大值.

设 $R_n(x)$是一个最高系数为1的 n 次多项式.假定在区间$(-1,1)$上,$R_n(x)$与零的偏差不高于 $T_n(x)$,则显然

$$T_n(x_0)\geqslant R_n(x_0),T_n(x_1)\leqslant R_n(x_1),T_n(x_2)\geqslant R_n(x_2),\cdots.$$

由此推知:差数 $R_{n-1}(x)=R_n(x)-T_n(x)$在区间$(-1,1)$上改变符号不少于 n 次,即在这区间上它至少有 n 个根.但 $R_{n-1}(x)$的次数不高于 $n-1$,故这是不可能的.这个矛盾就证明了:$T_n(x)$是与零相差最小的多项式.

(8) 雅可比多项式与超几何级数 微分方程

$$z(z-1)w''+[-\gamma+(1+\alpha+\beta)z]w'+\alpha\beta w=0 \tag{25}$$

称做**超几何方程**(高斯).幂级数

$$\begin{aligned}w&=F(\alpha,\beta,\gamma;z)\\&=1+\frac{\alpha\beta}{1!\ \gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\ \gamma(\gamma+1)}z^2+\cdots\\&\quad+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\ \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n+\cdots\end{aligned} \tag{26}$$

是它的解,这级数称做**超几何级数***.当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,它变为通常的几何级数(具有公比 z 的几何级数).

要使级数(26)变为 n 次多项式,显然,必须使 α 或β等于$-n$.例如,设 $\beta=-n$,且记

$$\gamma-1=\lambda,\alpha+\beta-\gamma=\mu,$$

所得到的多项式乘以系数 C_n后,我们用

$$Q_n^{(\lambda,\mu)}(z)=C_nF(\lambda+\mu+n+1,-n,\lambda+1;z)$$

来表示它.可以证明:如果按照等式

$$z=\frac{1-x}{2}$$

来引入变数 x 以替代z,且令

$$C_n=\frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{n!\ \Gamma(\lambda+1)},$$

---

* 级数(26)的系数可用通常的待定系数法来求得.

则 $Q_n^{(\lambda,\mu)}(z)$变为雅可比多项式 $P_n^{(\lambda,\mu)}(x)$.

(9) 波动方程与切比雪夫－埃尔米特函数　在一个力场中的质点的波动方程(薛定谔)具有如下形式

$$\frac{h^2}{2m}\Delta\psi+(E-V)\psi=\frac{\partial\psi}{\partial t},\tag{27}$$

其中 Δ 为拉普拉斯算子,ψ 是质点的几何坐标及时间的函数,h 是普莱克常数,m 是质点的质量,V 是势能,E 是参数.我们假定,ψ 只依赖坐标 x 及 $V=\frac{k}{2}x^2$,这对应于线性振动子的情形.引入两个新的常数 $\alpha^2=\frac{mk}{h^2}$,$\lambda=\frac{2mE}{h^2}$,其中第一个是给定了的,第二个代替 E 起参数的作用.我们把方程(27)写成为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+(\lambda-\alpha^2x^2)\psi=0\tag{28}$$

的形式.方程(28)可化为切比雪夫－埃尔米特多项式的微分方程.要证明这个,我们考虑在区间$(-\infty,\infty)$上带权 1 的正交函数系

$$\psi_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)\tag{29}$$

($\psi_n(t)$称做**切比雪夫－埃尔米特函数**).将 $H_n(t)=e^{\frac{t^2}{2}}\psi_n(t)$代入切比雪夫－埃尔米特多项式的微分方程,在约去 $e^{\frac{t^2}{2}}$后求得

$$\psi''_n(t)+(1+2n-t^2)\psi_n(t)=0.\tag{30}$$

使用简单的自变量代换,便可把这方程化成方程(28).实际上,令 $t=ax$,其中 a 是某一个常数,且令 $\psi_n(ax)=\psi(x)$,由此 $\psi''(x)=a^2\psi''_n(t)$(导数是按位于括弧内的变元来取的).将这代入方程(30),我们便把它化成如

$$\psi''(x)+[(1+2n)a^2-a^4x^2]\psi(x)=0$$

的形式.将所得到的方程与(28)比较,便可看出:假若取 $a=\sqrt{\alpha}$,则当

$$\lambda=\lambda_n=(1+2n)\alpha\tag{31}$$

时,它就同方程(28)一致.这样一来,如果方程(28)的参数 λ 满足条件(31),则函数

$$\psi=\psi_n(\sqrt{\alpha}x)=e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}H_n(\sqrt{\alpha}x)\tag{32}$$

是它的解,其中 H_n是切比雪夫－埃尔米特多项式,ψ_n是切比雪夫－埃尔米特函数.

(10) 切比雪夫－埃尔米特函数与抛物坐标　考虑如下形式的二维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\mu^2u=0,\tag{33}$$

其中 μ^2是某一个常数.在这方程中令 $\zeta=\xi+i\eta$,及

$$z=x+iy=f(\zeta),$$

其中 $f(\zeta)$是个解析函数,我们变到新的自变量 ξ,η.直接应用复合函数的微分法则

及柯西－黎曼方程，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=|f'(\zeta)|^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

因此，在新的变量中方程(33)取形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\mu^2|f'(\zeta)|^2 u=0, \tag{34}$$

特别，令 $f(\zeta)=\frac{1}{2}\zeta^2$，于是

$$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2),\ y=\xi\eta.$$

在平面 $z=x+iy$ 上坐标曲线 $\xi=\text{const}$，$\eta=\text{const}$ 是抛物线，所以坐标 ξ 与 η 称做**抛物坐标**.

对于抛物坐标来说，方程(34)具有形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\mu^2(\xi^2+\eta^2)u=0.$$

我们用分离变量法来求它的解. 令 $u=U(\xi)V(\eta)$. 于是最后的方程具有(在简单的变换后)形式

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}+\mu^2\xi^2=-\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}-\mu^2\eta^2. \tag{35}$$

由于等式的左端仅是一个变量 ξ 的函数，而右端是一个变量 η 的函数，故两端应等于同一个常数，这个常数我们将用 $-\beta^2$ 来代表. 替代一个方程(35)我们有两个方程

$$U''(\xi)+(\mu^2\xi^2+\beta^2)U(\xi)=0,\ V''(\eta)+(\mu^2\eta^2-\beta^2)V(\eta)=0.$$

如果在这些方程内，变换到新的自变数 $t=\sqrt{i\mu}\,\xi$，$\tau=i\sqrt{i\mu}\,\eta$，且令 $\beta=\beta_n=\sqrt{(2n+1)i\mu}$，则这两个方程便可化为关于切比雪夫－埃尔米特函数的方程(30)(参看这一目的方程(31)). 这样一来，我们得出了波动方程(33)的无穷多个解

$$u=u_n=A_n\psi_n(\sqrt{i\mu}\xi)\psi_n(i\sqrt{i\mu}\eta),$$

其中 ψ_n 是切比雪夫－埃尔米特函数，A_n 是常数.

所构造的解使我们能解决，例如，关于抛物柱面的衍射问题.

§3 圆柱函数

圆柱函数，或普通称做贝塞尔函数，在应用上起着特殊重要的作用，主要的是在与圆形或圆柱形的物体有关的问题上. 这是由于：当利用古典的分离变量法，来解含有用圆柱坐标的拉普拉斯算子的数学物理方程时(参看第 99 目，例 6—例 8)，便导向用来定义圆柱函数的方程

$$x^2\frac{d^2 y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\lambda^2)y=0. \tag{1}$$

圆柱函数 $J_0(x)$ 首先由丹尼尔·伯努利在专门对重链摆动的研究工作中讨论过(彼得堡,1732 年).D.伯努利得到了在 $\lambda=0$ 时的特殊情形下的方程(1),并且解出了它,求得了 $J_0(x)$ 的用幂级数形式的表达式.此外,他指出了下述事实而未加证明:方程 $J_0(x)=0$ 具有无穷多个实根(参看第 99 目例 6).

在后来的工作中,出现有圆柱函数的是 L.欧拉的著作(彼得堡,1738 年).在那篇著作中,欧拉讨论了关于圆膜振动的问题,得到了具有整数值 $\lambda=n$ 的方程(1)(参看第 99 目例 7).解这方程,他得到了当 n 为整数时的 $J_n(x)$ 的展成 x 的幂级数的表达式,而在后来的工作中,他把这表达式推广到指标 λ 为任意数值时的情形.此外,欧拉还证明了:当 λ 等于一个整数带一半时,函数 $J_\lambda(x)$ 可用初等函数表出(参看第 95 目).指出了下述事实而未加以证明:对于实数值的 λ,函数 $J_\lambda(x)$ 具有无穷多个实的零点(参看第 98 目),并且给出了关于 $J_\lambda(x)$ 的积分表示式.

最后,对于 $\lambda=0$ 与 $\lambda=1$ 的情形,欧拉在 1769 年(彼得堡)的工作中给出了关于方程(1)的与 $J_\lambda(x)$ 线性无关的第二个解的级数表达式[(参看第 96 目(4))].

由此可见,欧拉已得到了关于圆柱函数与它在数学物理中的应用的基本结果.

名字常与圆柱函数连在一起的德国天文学家 F.W.贝塞尔在 1824 年的工作中,由于研究行星环绕太阳的运动,给出了关于函数 $J_\lambda(x)$ 的递推关系式,这些关系式,虽然是很重要的,却依然带有初等性质(第 95 目),他还得到了当 n 为整数时 $J_n(x)$ 的新的积分表示式(参看以前第 70 目),证明了 $J_0(x)$ 具有无穷多个零点,且编出了关于 $J_0(x)$,$J_1(x)$ 及 $J_2(x)$ 的第一批表.

95. 第一类圆柱函数 (1) H.Я.索宁的积分表示式 考虑圆柱函数的微分方程

$$t^2x''+tx'+(t^2-\lambda^2)x=0, \tag{1}$$

其中 t 是独立变量,x 是所求的函数,λ 是个参数,称为方程(1)的**指标**.为简单起见,我们将设 λ 是实数.我们将按照第 84 目中所指出的算子法来解这方程.

如若用 $X(p)$ 表示所求的函数的像,则按照第 80 目中关于像与像原函数的微分定理Ⅲ及Ⅳ,有

$$t^2x''\doteqdot(p^2X-px_0-x_1)''=p^2X''+4pX'+2pX,$$

$$tx'\doteqdot-(pX-x_0)'=-pX'-X,\quad t^2x\doteqdot X'',$$

其中 $x_0=x(0)$,$x_1=x'(0)$ 是给定的始值条件*.这样一来,对应于方程(1)的算子方程具有形式

$$(p^2+1)X''+3pX'+(1-\lambda^2)X=0. \tag{2}$$

为了要解这方程,作自变量的以及所求的函数的代换,令

* 初始条件没有参加到算子方程(2)中,因为 $t=0$ 是方程(1)的奇点.

$$p=\operatorname{sh} q, X(p)=\frac{1}{\operatorname{ch} q}Y(q),$$

于是就有

$$X'=\frac{\dfrac{dX}{dq}}{\dfrac{dp}{dq}}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 q}Y'-\frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^3 q}Y,$$

$$X''=\frac{\dfrac{dX'}{dq}}{\dfrac{dp}{dq}}=\frac{1}{\operatorname{ch}^3 q}Y''-3\frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^4 q}Y'+\frac{3\operatorname{sh}^2 q-\operatorname{ch}^2 q}{\operatorname{ch}^5 q}Y,$$

再把这代入(2)中,我们得到了一个简单的方程

$$Y''-\lambda^2 Y=0.$$

从这个方程的特解 $Y=e^{-\lambda q}$ 回转到原来的变量 p 与 X,便得出方程(2)的特解

$$X=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}e^{-\lambda \operatorname{arsh} p}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{\lambda}}. \tag{3}$$

在已割去了射线 $s=0,|\sigma|>1$ 的平面 $p=s+i\sigma$ 上,函数 $\sqrt{p^2+1}$ 可以分出单值的分支.取 $\lambda>0$ 且约定仅考虑 $\sqrt{p^2+1}$ 在 s 轴上取正值的这一分支.于是当 p 趋于 ∞, $\operatorname{Re} p>0$ 时,函数 $X(p)\to 0$ 对于 $\arg p$ 是一致的,因此,它是一个像(参看第 79 目的定理 4,我们不讲其他条件的验证). $X(p)$ 的像原函数——方程(1)的特解——我们将称它为**第一类圆柱函数**或 **λ 阶贝塞尔函数**,并且用记号 $J_\lambda(t)$ 来表示(对于整数的 $\lambda=n$,参看第 82 目的公式(7)).函数 $J_\lambda(t)$ 按第 79 目的反演公式可求得为

$$J_\lambda(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{e^{pt}dp}{\sqrt{p^2+1}\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{\lambda}}, \tag{4}$$

其中 L 是任意一条直线 $\operatorname{Re} p=a>0$.

在(4)中,变换到新变量

$$\omega=p+\sqrt{p^2+1}, \tag{5}$$

于是 $p=\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right),\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{d\omega}{\omega}$,且积分路线是平面 $\omega=\xi+i\eta$ 中的一条曲线 C——直线 L 在映射(5)下的像.由于在映射(5)下,轴 σ 变到射线 $\xi=0,|\eta|>1$ 与半圆周 $|\omega|=1,\xi>0$ 的总和(参看在第 7 目中的茹科夫斯基映射的性质,映射(5)同它没有本质上的不同),而数值 a 可以任意小,故 C 具有在图 197 中用虚线所表出的形状.这时,积分(4)变为下面形状的积分(Н.Я.索宁,1870 年)

$$J_\lambda(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{\frac{t}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}}{\omega^{\lambda+1}}d\omega. \tag{6}$$

显然,曲线 C 可用任何一条铅直线 $\operatorname{Re}\omega=a>0$ 来替代,而不改变积分的数值.

由于在圆周$|\omega|=R$上函数$\frac{e^{-\frac{t}{2\omega}}}{\omega^{\lambda+1}}$当$R\to\infty$时趋于0,故当$t>0$时,按若尔当引理,积分(6)沿弧$C_R$(见图197)趋于0.因此,在公式(6)中的周线$C$可由表示在图197中的周线$C^*$替代,这周线从点$-\infty$沿负半轴($\xi$)的下岸前进,沿圆周绕坐标原点,再沿同一半轴的上岸回归到$-\infty$.这样一来,我们再得到圆柱函数的一个积分表示式,它也是属于H.Я.索宁的(我们写z代t)

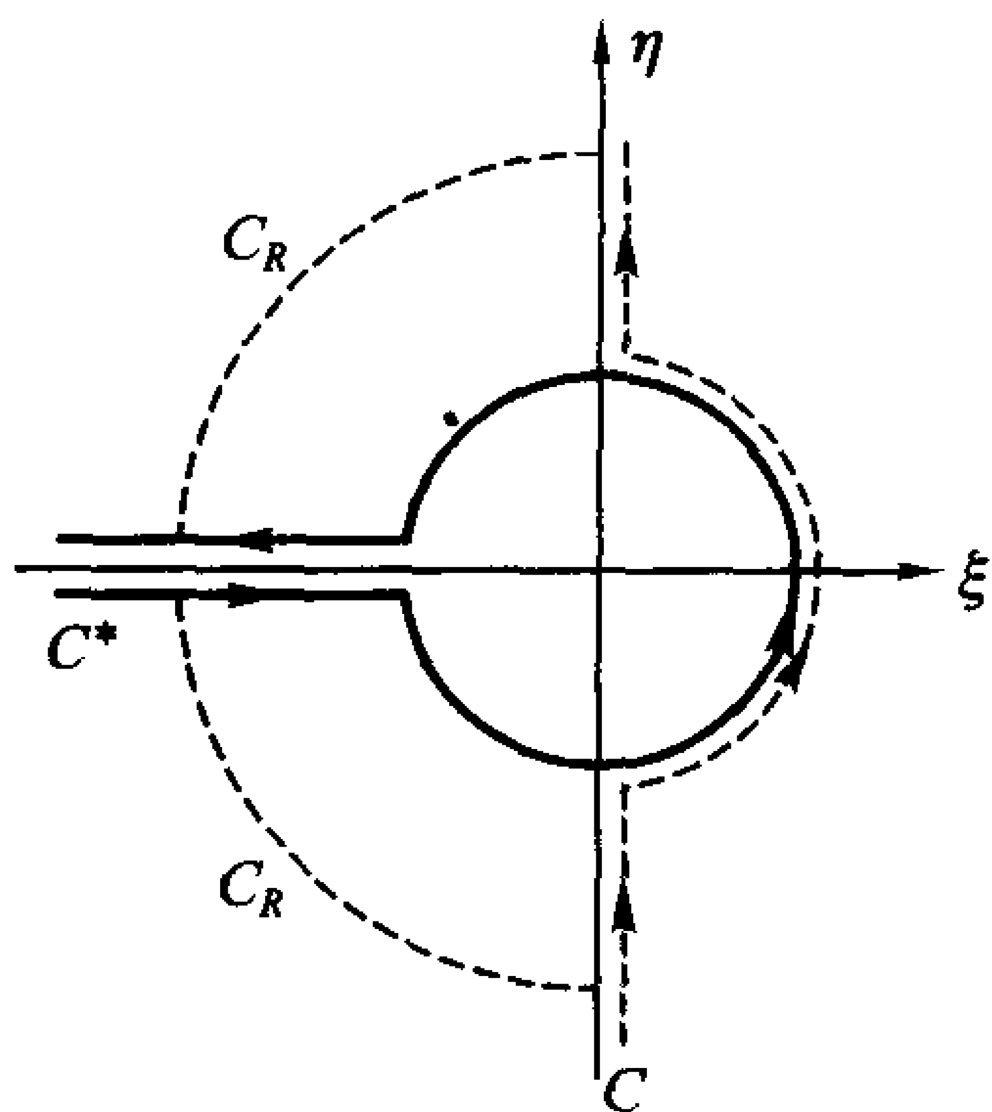


图197

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\frac{e^{\frac{z}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}}{\omega^{\lambda+1}}d\omega. \tag{7}$$

索宁积分(7)是对于正值的z得到的,可是它的右端部分代表一个在z的右半平面内解析的函数,因为,当$\operatorname{Re} z>0$时,积分(7)对于z来说是一致收敛的.因此,索宁积分给出了$J_\lambda(z)$在右半平面上的解析延拓.

再者,当$\operatorname{Re} z>0$时,索宁积分不仅对于正值的λ收敛,而且对于任何复数值的λ也都收敛,因为,在周线C^*的水平部分,指数因子趋于0的速度,较快于$|\omega^{\lambda+1}|$的可能增大的速度.所以,*索宁积分在右半平面上定义了任意复数阶的圆柱(贝塞尔)函数*.

(2) 解析性质 对于整数值的参数$\lambda=n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,索宁积分(7)的被积函数是单值的,因此沿周线$C^*$的水平线部分的积分等于0,因而积分(7)具有在前面遇到过的形式(见第70目)

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1}\frac{e^{\frac{z}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}}{\omega^{n+1}}d\omega \tag{8}$$

(我们取周线C^*中的圆周的半径为1).由于(8)的右端的积分对于任何的z都收敛,而且是一致收敛的,故我们可以推断出:*对于整数值的参数$\lambda=n$,函数$J_n(z)$是整函数*.

再设z是正的,而λ是任意复数.在索宁积分(7)中作变量代换$\omega=\frac{2\zeta}{z}$,我们得到**索宁-施拉夫利积分**:

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{C^*}e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}\zeta^{-\lambda-1}d\zeta \tag{9}$$

(在作这样的代换时,周线C^*变为相似于它的周线,因此与C^*有相同的形状).

对于任一复数λ,在z值的任一有界区域内,索宁-施拉夫利积分都收敛且一致收敛,因此,*它给出圆柱函数$J_\lambda(z)$到全部复数平面z上与参数λ的所有复数值上的解析延拓*.在积分前面那个因子z^λ的存在表明:一般地说,这个函数是无穷多值的,

有支点 $z=0$,但对于任何复数 λ,比值 $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ 是个整函数.

(3) 其他积分表示式　设 $\operatorname{Re} z>0$,我们在索宁积分中作代换 $\omega=e^{i\zeta}$,于是周线 C^* 变为表示在图 198 中的周线 Π(我们取周线 C^* 中的圆周的半径为 1).索宁积分变为施拉夫利积分

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Pi e^{iz\sin\zeta-i\lambda\zeta}d\zeta, \tag{10}$$

这积分在右半平面中表示圆柱函数.

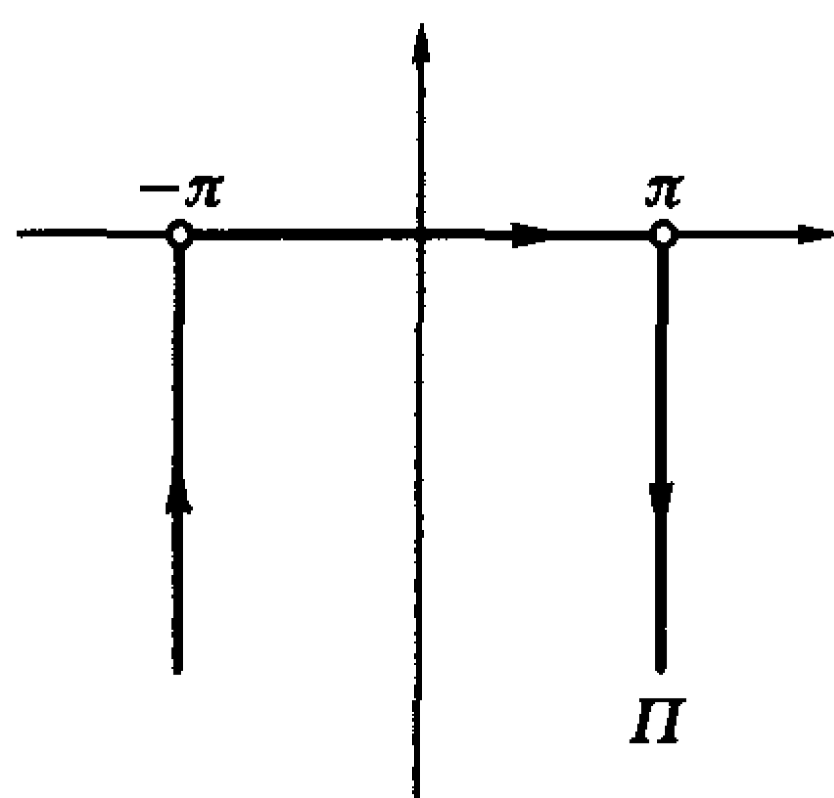


图 198

对于整数值的参数 $\lambda=n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,由于函数 $e^{in\zeta}$ 与 $\sin\zeta$ 都是周期函数,沿路线 Π 的铅直线部分的积分彼此相抵消,因而有

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\zeta-in\zeta}d\zeta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\zeta-n\zeta)d\zeta \tag{11}$$

(我们按欧拉公式来展开函数 $e^{i(z\sin\zeta-n\zeta)}$,且利用 cos 是偶函数与 sin 是奇函数的性质).这是我们已经在第 70 目中引入过的贝塞尔积分.

(4) 级数表示　在索宁－施拉夫利积分(9)中,展开因子 $e^{-\frac{1}{\zeta}\left(\frac{z}{2}\right)^2}$ 为 $\frac{1}{\zeta}$ 的幂级数,且交换求和与求积分的顺序(由于所得级数的一致收敛性,这交换是合法的):

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{C^*} e^\zeta\zeta^{-\lambda-1}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\ \zeta^k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}d\zeta$$

$$=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} e^\zeta\zeta^{-\lambda-1-k}d\zeta.$$

利用关于 Γ 函数的汉克尔积分表示(参看第 89 目公式(24)),便得出所求的圆柱函数的级数展开式

$$J_\lambda(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k}. \tag{12}$$

从公式(12)看出:对于实数值的 λ 与 $z=x$,函数 $J_\lambda(x)$ 取实数值.

特别,对于非负的整数值 $\lambda=n$,得展开式

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\ (n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \tag{13}$$

这是我们已经遇到过的(例如参看第 70 目与第 82 目).对于负的整数值 $\lambda=-n$,和式(12)中的前面 n 项都等于 0,因为当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时,$\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)}=0$,因而公式(12)具有形式

$$J_{-n}(z)=\sum_{k=n}^\infty\frac{(-1)^k}{k!(-n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}=\sum_{\nu=0}^\infty\frac{(-1)^{n+\nu}}{(n+\nu)!\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu}$$

(我们替代求和的指标 k 以指标 $\nu=k-n$),或者

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z). \tag{14}$$

(5) 母函数 对于整数值的 $\lambda = n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，索宁积分(8)同函数 $e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}$ 的依 w 幂排列的洛朗展开式的系数公式相一致. 因此，

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n. \tag{15}$$

函数 $e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}$ 称做 $J_n(z)$ 的**母函数**. 在第 70 目中我们已会利用它来定义整数阶的圆柱函数.

在(15)式中作代换 $w = e^{i\theta}$，我们得下述函数的傅里叶级数的展开式

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}. \tag{16}$$

在(16)式中分开(对于实数值的 z 及 θ)实数部分与虚数部分，得

$$\cos(z\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\cos n\theta, \sin(z\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\sin n\theta,$$

或，利用关系式(14)，得到实数形式的傅里叶级数

$$\begin{aligned} \cos(z\sin\theta) &= J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\theta, \\ \sin(z\sin\theta) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\theta. \end{aligned} \tag{17}$$

特别是，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，就有

$$\cos z = J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - \cdots,$$
$$\sin z = 2J_1(z) - 2J_3(z) + \cdots.$$

(6) 递推关系 从级数展开式(12)求得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} &= \frac{1}{z^\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\ \Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1} \\ &= -\frac{1}{z^\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(\lambda+k+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k+1} \end{aligned}$$

(我们以 $k-1$ 替代求和的指标 k)，或最后得

$$\frac{d}{dz}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}. \tag{18}$$

公式(18)可写成

$$\frac{d}{zdz}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^{\lambda+1}}$$

的形式，由此看出：应用运算 $\frac{d}{zdz}$ 于 $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$，可归结为改变符号和以 $\lambda+1$ 替代指标 λ. 逐次应用这个运算，且引入简约的记号

$$\underbrace{\frac{d}{zdz}\cdot\frac{d}{zdz}\cdots\frac{d}{zdz}}_{n次}=\frac{d^n}{(zdz)^n},$$

我们得到

$$\frac{d^n}{(zdz)^n}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}=(-1)^n\frac{J_{\lambda+n}(z)}{z^{\lambda+n}}. \tag{19}$$

同样地,可得

$$\frac{d}{dz}(z^\lambda J_\lambda(z))=z^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda+k)}{k!\ \Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+2k-1}$$

$$=z^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(\lambda+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k-1}$$

(我们利用了关于 Γ 函数的递推关系式),或

$$\frac{d}{dz}(z^\lambda J_\lambda(z))=z^\lambda J_{\lambda-1}(z). \tag{20}$$

以 z 除这方程的两端,我们看出:应用运算$\frac{d}{zdz}$于$z^\lambda J_\lambda(z)$,可归结于以 $\lambda-1$ 替代指标 λ.逐次应用这个运算,得

$$\frac{d^n}{(zdz)^n}\{z^\lambda J_\lambda(z)\}=z^{\lambda-n}J_{\lambda-n}(z). \tag{21}$$

公式(18)与(20)可重写成

$$J'_\lambda(z)=\frac{\lambda}{z}J_\lambda(z)-J_{\lambda+1}(z),J'_\lambda(z)=J_{\lambda-1}(z)-\frac{\lambda}{z}J_\lambda(z) \tag{22}$$

的形式.从(22)中的一个方程减去另一个,便得到一个不含有导数的递推关系式

$$J_{\lambda-1}(z)+J_{\lambda+1}(z)=\frac{2\lambda}{z}J_\lambda(z). \tag{23}$$

同样,将(22)中的那两个方程相加,得第二个递推关系式

$$J_{\lambda-1}(z)-J_{\lambda+1}(z)=2J'_\lambda(z). \tag{24}$$

还要注意,当 $\lambda=0$ 时,从(22)得到

$$J'_0(z)=-J_1(z). \tag{25}$$

(7) 阶数等于整数加$\frac{1}{2}$的圆柱函数 欧拉已经证明了,这些函数可用初等函数表出.实际上,按公式(11)且注意到$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2k+2)!\ \sqrt{\pi}}{4^{k+1}(k+1)!}$(参看第 89 目公式(18)),首先得到

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k4^{k+1}(k+1)!}{k!\ (2k+2)!\ \sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \tag{26}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k4^kk!}{k!\ (2k)!\ \sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z. \tag{27}$$

然后利用关系式(19)与(21),求得

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(zdz)^n}\frac{\sin z}{z},$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(zdz)^n}\frac{\cos z}{z}, \tag{28}$$

由此便可看出:$J_{\pm n+\frac{1}{2}}(z)$可用初等函数表出.

在作简单的变换后,这两个公式具有形式

$$\begin{aligned}J_{n+\frac{1}{2}}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{S_1\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)+S_2\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\right\},\\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{S_1\cos\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)-S_2\sin\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)\right\},\end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}S_1&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!\ (n-2k)!\ (2z)^{2k}},\\ S_2&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k+1)!}{(2k+1)!\ (n-2k-1)!\ (2z)^{2k+1}}\end{aligned} \tag{30}$$

($[a]$表示正数 a 的整数部分,例如$\left[\frac{7}{2}\right]=3$).

(8) 正交性 按定义,圆柱函数 $y=J_\lambda(z)$满足微分方程

$$x^2J''_\lambda(x)+xJ'_\lambda(x)+(x^2-\lambda^2)J_\lambda(x)=0. \tag{31}$$

令 $x=\alpha t$,其中 α 是常数,且考虑函数 $y=J_\lambda(\alpha t)=y(t)$.我们有

$$J'_\lambda(x)=\frac{1}{\alpha}\frac{dy}{dt},J''_\lambda(x)=\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2y}{dt^2},$$

代入(31)式,求得函数 $y=J_\lambda(\alpha t)$所满足的微分方程

$$y''+\frac{1}{t}y'+\left(\alpha^2-\frac{\lambda^2}{t^2}\right)y=0. \tag{32}$$

现在考虑两个函数 $y_1=J_\lambda(\alpha t)$与 $y_2=J_\lambda(\beta t)$,其中 α 与β 都是常数.按刚才所证明的,它们分别满足方程

$$y''_1+\frac{1}{t}y'_1+\left(\alpha^2-\frac{\lambda^2}{t^2}\right)y_1=0,y''_2+\frac{1}{t}y'_2+\left(\beta^2-\frac{\lambda^2}{t^2}\right)y_2=0.$$

以 y_2乘第一个方程,以 y_1乘第二个方程,再从第一个减去第二个.如果再引用记号

$u = y'_1 y_2 - y_1 y'_2$，则显然 $u' = y''_1 y_2 - y_1 y''_2$，于是我们得

$$u' + \frac{1}{t}u = (\beta^2 - \alpha^2) y_1 y_2.$$

在乘以 t 后，左端就等于$\frac{d}{dt}(ut)$，所以对 t 自 0 到 l 求积分后，得

$$ut \Big|_{t=0}^{l} = (\beta^2 - \alpha^2) \int_0^l y_1 y_2 t dt$$

(为了对于非整数的 λ 要积分收敛，我们应当假定 $\lambda > -1$. 于是，如果被积函数 $J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t) t$ 当 $t \to 0$ 时变为无穷大，则无穷大的阶数低于一次). 代替 y_1 与 y_2 以它们用 J_λ 的表达式，便有

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^l J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t) t dt = l \{ \alpha J'_\lambda(\alpha l) J_\lambda(\beta l) - \beta J_\lambda(\alpha l) J'_\lambda(\beta l) \}. \quad (33)$$

现在假设 α 与 β 是方程

$$J_\lambda(xl) = 0 \quad (34)$$

或方程

$$J'_\lambda(xl) = 0 \quad (35)$$

的不同的根. 于是(33)式的右端就等于 0，因而得

$$\int_0^l J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t) t dt = 0. \quad (36)$$

我们将在第 98 目中证明，对于实数的 λ，方程(34)与(35)中每一个都有无穷多个实数根. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots$是这些方程之一的根，于是根据公式(36)可以断定：函数 $J_\lambda(\alpha_1 t), J_\lambda(\alpha_2 t), \cdots, J_\lambda(\alpha_k t), \cdots$ 构成一个在区间$(0, l)$上带权 t 的正交组*.

这个事实指出了圆柱函数 $J_\lambda(\alpha t)$ (满足微分方程 $y'' + \frac{1}{t}y' + \left(\alpha^2 - \frac{\lambda^2}{t^2}\right)y = 0$ 的)与三角函数 $\sin \alpha t, \cos \alpha t$ (满足微分方程 $y'' + \alpha^2 y = 0$ 的)之间的类似. 事实上，三角函数 $\sin k\alpha t, \cos k\alpha t$ 也构成在某一区间上的正交组. 以后我们将不止一次指出这种类似.

(9) 按圆柱函数来展开的级数　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots$是方程(34)或(35)的正根，且 $f(t)$是在区间$(0, l)$上逐段光滑的函数. 假定在这区间上 $f(t)$可表为一致收敛的级数

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_\lambda(\alpha_k t). \quad (37)$$

由于按照在(8)中所证明了的，函数 $J_\lambda(\alpha_k t)$构成一个在区间$(0, l)$上带权 t 的正交组，故级数(37)的系数可按第 91 目的一般公式(7)来确定：

* 对于非整数的 λ，我们假定 $\lambda > -1$.

$$c_k = \frac{1}{d_k^2}\int_0^l f(t)J_\lambda(\alpha_k t)tdt, \tag{38}$$

其中

$$d_k^2 = \int_0^l J_\lambda^2(\alpha_k t)tdt.$$

我们来计算最后这个积分. 为此,将利用公式(33),我们假定在(33)中,α_k 是方程(34)或(35)的一个根,而 β 连续地趋近于这个根. 在方程(34)的场合下,公式(33)具有形式

$$\int_0^l J_\lambda(\alpha_k t)J_\lambda(\beta t)tdt = \frac{\alpha_k l J'_\lambda(\alpha_k l)J_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2},$$

由此可看出:当 $\beta \to \alpha_k$ 时,右端重新有不定形式$\frac{0}{0}$. 按洛必达法则来揭开这不定式,求得

$$d_k^2 = \int_0^l J_\lambda^2(\alpha_k t)tdt = \lim_{\beta \to \alpha_k}\frac{\alpha_k l J'_\lambda(\alpha_k l)J_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2} = \frac{l^2}{2}J'^2_\lambda(\alpha_k l).$$

根据公式(22)的第一个式子,在其中令 $z = \alpha_k l$,得 $J'_\lambda(\alpha_k l) = -J_{\lambda+1}(\alpha_k l)$,因而上面这个式子可重写成

$$d_k^2 = \frac{l^2}{2}J_{\lambda+1}^2(\alpha_k l) \tag{39}$$

的形状. 类似地,在方程(35)的场合下,就有

$$d_k^2 = -\lim_{\beta \to \alpha_k}\frac{\beta l J_\lambda(\alpha_k l)J'_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2} = -\frac{l^2}{2}J_\lambda(\alpha_k l)J''_\lambda(\alpha_k l).$$

但从微分方程(31),在其中令 $x = \alpha_k l$,并且利用公式(35),可求得 $J''_\lambda(\alpha_k l) = -\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2 l^2}\right)J_\lambda(\alpha_k l)$,因此最后这个式子可再写成

$$d_k^2 = \frac{1}{2}\left(l^2 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2}\right)J_\lambda^2(\alpha_k l) \tag{40}$$

的形状. 级数(37)的系数可按公式(38)来求得,这级数是一个广义的傅里叶级数. 它也称为傅里叶-贝塞尔级数. 可以证明:对于在区间$(0,l)$上逐段平滑的任一函数,它收敛于$\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]$.

96. 其他圆柱函数 (1) 汉克尔函数 重新考虑具有指标 λ 的圆柱函数的微分方程

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \lambda^2)w = 0 \tag{1}$$

(z 是自变量,w 是所求的函数,λ 是参数,所有的数值在这里都假定是复数). 我们试图利用积分变换的方法,来求方程(1)的解(见第 88 目),即是,我们将寻求如下列形式的解

$$w=\int_C K(z,\zeta)W(\zeta)d\zeta, \tag{2}$$

其中 W 是新的想找的函数,函数 $K(z,\zeta)$ 与积分路线 C 依照下面所说的取法来选取.将(2)式代入方程(1),我们有(假定交换求导数与求积分的顺序是合法的):

$$\int_C\left\{z^2\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}+z\frac{\partial K}{\partial z}+(z^2-\lambda^2)K\right\}W(\zeta)d\zeta=0.$$

现在设 K 满足微分方程

$$z^2\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}+z\frac{\partial K}{\partial z}+z^2K+\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2}=0, \tag{3}$$

于是前述的关系式具有形式:

$$\int_C\left\{\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2}+\lambda^2 K\right\}W(\zeta)d\zeta=0.$$

将第一项 $\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2}W(\zeta)$ 用分部积分法求积分两次,我们便把最后这个方程变为

$$\int_C\{W''+\lambda^2 W\}Kd\zeta+\left[W\frac{\partial K}{\partial \zeta}-KW'\right]_a^b=0$$

的形式,其中 a 与 b 表示曲线 C 的端点.由此看出:如果令

$$W=e^{\pm i\lambda\zeta}$$

且选取积分路径使在它的端点处表达式 $W\frac{\partial K}{\partial \zeta}-KW'$ 为 0,则积分(2)就给出方程(1)的解.容易验证:如果令 $K=e^{iz\sin\zeta}$,则方程(3)便被满足.取图 199 中的 C_1 与 C_2 来作为积分路径,由于在虚轴上 $\sin\zeta=\sin i\eta=i\,\mathrm{sh}\,\eta$,而在直线 $\pm\pi+i\eta$ 上,$\sin\zeta=-\sin i\eta=-i\,\mathrm{sh}\,\eta$,故在 C_1 与 C_2 的铅直部分上,

$$|K|=\begin{cases}e^{-x\,\mathrm{sh}\,\eta}, & \text{当 } \eta>0,\\ e^{x\,\mathrm{sh}\,\eta}, & \text{当 } \eta<0.\end{cases}$$

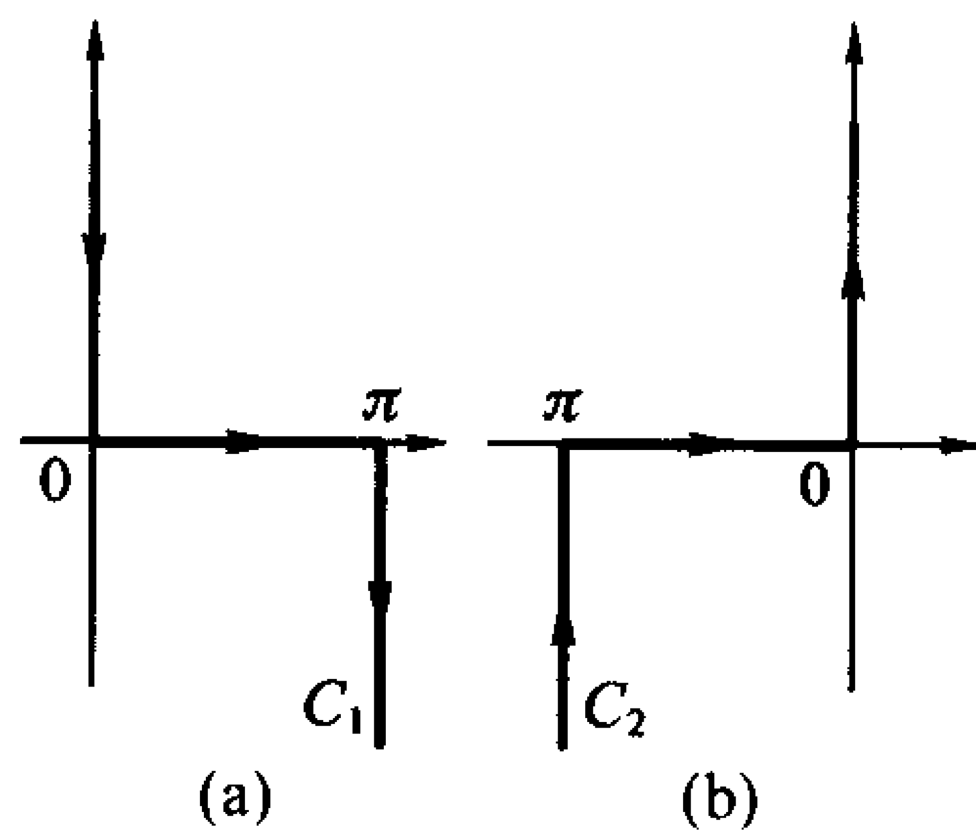


图 199

由此可看出:如果我们设 $x=\mathrm{Re}\,z>0$,则当 $\eta\to+\infty$ 时,$|K|$ 以与 $e^{-\frac{x}{2}e^{\eta}}$ 相同的速度趋于 0;当 $\eta\to-\infty$ 时,$|K|$ 以与 $e^{-\frac{x}{2}e^{-\eta}}$ 相同的速度趋于 0.而这时 $W\frac{\partial K}{\partial \zeta}=e^{\pm i\lambda\zeta}iz\cos\zeta\cdot K$ 与 $KW'=\pm i\lambda e^{\pm i\lambda\zeta}K$,当 ζ 接近于路线 C_1 与 C_2 的端点时,都趋于 0,因为,K 趋于 0,使在 K 前面的因子的可能增大都抵消了.

这样一来,我们便得出了在右半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$ 上的微分方程(1)的解:

$$H_\lambda^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{iz\sin\zeta-i\lambda\zeta}d\zeta;$$

$$H_\lambda^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{C_2}e^{iz\sin\zeta-i\lambda\zeta}d\zeta, \tag{4}$$

它们称做第三类圆柱函数,或汉克尔函数*.

(2) 第一类与第三类圆柱函数间的关系　如果将(4)的两个积分相加,则沿虚半轴的积分彼此抵消,再回忆起施拉夫利积分(参看前一目的公式(10)),便得

$$H_\lambda^{(1)}(z)+H_\lambda^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\Pi} e^{iz\sin\zeta-i\lambda\zeta}d\zeta=2J_\lambda(z)$$

(Π 是图 198 中的周线).这样一来,对于所有复数值的 λ,在右半平面 $\mathrm{Re}\, z>0$ 上,贝塞尔圆柱函数

$$J_\lambda(z)=\frac{H_\lambda^{(1)}(z)+H_\lambda^{(2)}(z)}{2}. \tag{5}$$

为了要求得汉克尔函数用贝塞尔函数来表达的公式,首先来求阶数只相差一个符号的汉克尔函数间的关系.我们有,例如,

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta,$$

再引入新的积分变量 $\omega=-\zeta+\pi$,从而路线 C_1 变为重合于 C_1 而沿相反的方向行进的路线 C_1^-,我们得出

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z)=-\frac{e^{i\lambda\pi}}{\pi}\int_{C_1^-} e^{iz\sin\omega-i\lambda\omega}d\omega=e^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z).$$

类似地,引入 $\omega=-\zeta-\pi$,便得出关于 $H_\lambda^{(2)}(z)$的公式.因此,

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z)=e^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z),\quad H_{-\lambda}^{(2)}(z)=e^{-i\lambda\pi}H_\lambda^{(2)}(z). \tag{6}$$

现在,如果除了关系式(5)之外,再考虑公式

$$J_{-\lambda}(z)=\frac{H_{-\lambda}^{(1)}(z)+H_{-\lambda}^{(2)}(z)}{2}=\frac{e^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z)+e^{-i\lambda\pi}H_\lambda^{(2)}(z)}{2}$$

(我们利用了公式(6)),则从这两个公式便可求得汉克尔函数用贝塞尔函数来表达的公式

$$H_\lambda^{(1)}(z)=i\frac{e^{-i\lambda\pi}J_\lambda(z)-J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi},\quad H_\lambda^{(2)}(z)=-i\frac{e^{i\lambda\pi}J_\lambda(z)-J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi}. \tag{7}$$

严格地说,只有对于异于整数的 λ 值方能得到公式(7),可是,在整数的 λ 值的场合下,如果在其右端按洛必达法则来确定形如$\frac{0}{0}$的不定式,则公式(7)依然保持有效.于是我们可以断定说:公式(7)给出了 $H_\lambda^{(1)}(z)$与 $H_\lambda^{(2)}(z)$的到复变量 z 的整个平面上的解析延拓.如同贝塞尔函数 $J_\lambda(z)$一样,一般地说,$H_\lambda^{(1,2)}(z)$是一个具有支点 $z=0$ 的多值函数.

从公式(7),可得到汉克尔函数间的一些关系式,它们类似于贝塞尔函数间的关

---

* 第二类圆柱函数将于后面引入.函数 $H_\lambda^{(1,2)}(z)$于 1902 年由尼尔森引入,他将它们取名为汉克尔函数来对汉克尔表示敬意,在汉克尔的工作中(1869 年)建立了导致这些函数的研究的基础.积分表示式(4)由佐梅尔费尔特(A. Зоммерфельдом, 1896)得出.

系式.例如,利用前一目的递推公式(23),得出递推公式

$$H_{\lambda-1}(z)+H_{\lambda+1}(z)=\frac{2\lambda}{z}H_\lambda(z),H_{\lambda-1}(z)-H_{\lambda+1}(z)=2H'_\lambda(z) \tag{8}$$

(这里,H_λ 可以指 $H_\lambda^{(1)}$ 也可以指 $H_\lambda^{(2)}$).利用前一目的公式(24)及(25),得出

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz},H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz}. \tag{9}$$

以前我们曾指出过贝塞尔圆柱函数与三角函数之间的类似,公式(5)及(9)指明了函数 $H_\lambda(z)$ 同 $e^{\pm iz}$ 之间的类似。

(3) 韦伯函数 公式(5)表明:函数 J_λ 由函数 H_λ 构成,如同余弦函数由函数 $e^{\pm iz}$ 构成一样.我们也来考虑由 H_λ 照正弦函数一样来构成的函数:

$$Y_\lambda(z)=\frac{H_\lambda^{(1)}(z)-H_\lambda^{(2)}(z)}{2i}. \tag{10}$$

这些函数称做第二类圆柱函数,或韦伯函数,它们也称做诺伊曼函数那时用 $N_\lambda(z)$ 表示*.

由于对于实值的 z 与 λ,函数 $J_\lambda(z)$ 是实的,故从公式(7)推知:对于实值的 z 及 λ,有

$$\overline{H_\lambda^{(1)}(z)}=H_\lambda^{(2)}(z).$$

于是从(10)可看出:对于实值的 z 与 λ,韦伯函数取实数值.

利用公式(7),从公式(10)我们得出了韦伯函数通过贝塞尔函数来表达的公式:

$$Y_\lambda(z)=\frac{\cos\lambda\pi J_\lambda(z)-J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi}. \tag{11}$$

公式(11)对于非整数的 λ 成立.当 λ 趋于整数 n 时,我们得到不定式 $\frac{0}{0}$.按洛必达法则定出这不定式的值,对于整数的 $\lambda=n$ 我们得到

$$\begin{aligned}Y_n(z)&=\left.\frac{\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}\cos\lambda\pi-\pi\sin\lambda\pi J_\lambda(z)-\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}}{\pi\cos\lambda\pi}\right|_{\lambda=n}\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=n}.\end{aligned} \tag{12}$$

对于韦伯函数,下列的递推公式仍然成立:

$$Y_{\lambda-1}(z)+Y_{\lambda+1}(z)=\frac{2\lambda}{z}Y_\lambda(z),Y_{\lambda-1}(z)-Y_{\lambda+1}(z)=2Y'_\lambda(z). \tag{13}$$

为了对它们进行验证,只需将 $Y_\lambda(z)$ 的用 $H_\lambda(z)$ 来表达的式子(公式(10))代入,并

---

* 函数 $Y_\lambda(z)$ 由韦伯在1873年引入.在1867年诺伊曼引入了同 $Y_\lambda(z)$ 略有不同的函数;即是,它们等于

$$\frac{\pi}{2}Y_\lambda(z)+(\ln 2-C)J_\lambda(z).$$

其中 C 是欧拉常数.

利用关系式(8)便够了.

如果韦伯函数的阶数等于整数加$\frac{1}{2}$,则它们也可用初等函数来表出,因为从公式(11)推知:当$\lambda=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$时,

$$\left.\begin{aligned}&Y_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(z);\\&Y_{-n-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n}J_{n+\frac{1}{2}}(z).\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

我们来求出整数阶的韦伯函数的表示成幂级数的表达式.为此,可利用公式(12)及级数展开式

$$J_{\lambda}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{1}{\Gamma(\lambda+k+1)}.\tag{15}$$

我们首先从Γ函数的理论中得出一些辅助公式.在第89目中关于Γ函数的对数导数的公式(9)中,令$z=n-1$ $(n=1,2,3,\cdots)$,得

$$\begin{aligned}\psi(n)=\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}&=-C-\left(\frac{1}{n}-1\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{3}\right)-\cdots\\&=-C+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\end{aligned}\tag{16}$$

(其余的项彼此消去了).由此对于$n=1,2,3,\cdots$我们有

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\bigg|_{t=n}=-\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma^{2}(n)}=\frac{1}{(n-1)!}\left(C-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n-1}\right)$$

(我们已代换了$\Gamma(n)=(n-1)!$).在点$t=-n$ $(n=0,1,2,\cdots)$处,Γ函数具有一阶极点,其留数是$(-1)^{n}\frac{1}{n!}$ (参看第89目),因此在点$t=-n$的邻域内有下述展开式成立

$$\frac{1}{\Gamma(t)}=(-1)^{n}n!\ (t+n)\{1+C_{1}(t+n)+\cdots\}.$$

由此可以看出:当$n=0,1,2,\cdots$时,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=-n}=(-1)^{n}n!.$$

现在,将(15)式对λ来求导数,得到

$$\frac{\partial J_{\lambda}(z)}{\partial\lambda}=\ln\frac{z}{2}J_{\lambda}(z)+\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\bigg|_{t=\lambda+k+1}$$

与

$$\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}=-\ln\frac{z}{2}J_{-\lambda}(z)-\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\bigg|_{t=-\lambda+k+1}.$$

由此,根据公式(12)及已经算出的$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}$的值,对于正整数的$\lambda=n$,我们得到

$$Y_{n}(z)=\frac{2}{\pi}J_{n}(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ (n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+k}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right\}^{*} \tag{17}$$

而当 $n=0$ 时,

$$Y_0(z)=\frac{2}{\pi}J_0(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right). \tag{18}$$

我们看出:那时整数指标的贝塞尔函数是整函数,而在 $Y_n(z)$ 的展开式中,则除了 z 的乘幂之外还有 $\ln z$.

(4) 圆柱函数的微分方程的通解　按照汉克尔函数的构造法,$H_\lambda^{(1)}(z)$ 与 $H_\lambda^{(2)}(z)$ 都是方程

$$z^2w''+zw'+(z^2-\lambda^2)w=0 \tag{1}$$

的解.在下一目中我们将看出:这两个解是线性无关的,因此按线性微分方程的众所周知的性质,方程(1)的通解可表为形式

$$w=C_1H_\lambda^{(1)}(z)+C_2H_\lambda^{(2)}(z), \tag{19}$$

其中 C_1 与 C_2 是任意常数.

由于函数 $J_\lambda(z)$ 与 $Y_\lambda(z)$ 可通过 $H_\lambda^{(1)}(z)$ 与 $H_\lambda^{(2)}(z)$ 线性表出,且具有异于0的行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}\end{vmatrix}=\frac{i}{2}$$

((参看公式(5)及(10)),故函数 $J_\lambda(z)$ 与 $Y_\lambda(z)$ 也是方程(1)的线性无关的解.因此,对于任何 λ,这方程的通解也可表为形式

$$w=C_1J_\lambda(z)+C_2Y_\lambda(z), \tag{20}$$

其中 C_1 与 C_2 是任意常数.此外,由于 $H_\lambda^{(1)}(z)$ 与 $H_\lambda^{(2)}(z)$ 可通过 J_λ 与 $J_{-\lambda}$ 线性地表出,且具有异于0的行列式

$$\begin{vmatrix}i\frac{e^{-i\lambda\pi}}{\sin\lambda\pi} & -\frac{i}{\sin\lambda\pi}\\ -i\frac{e^{i\lambda\pi}}{\sin\lambda\pi} & \frac{i}{\sin\lambda\pi}\end{vmatrix}=\frac{2i}{\sin\lambda\pi},$$

而且这行列式对于任何非整数的 λ 都是有限的,故对于非整数的 λ,方程(1)的通解也可表为形式

$$w=C_1J_\lambda(z)+C_2J_{-\lambda}(z). \tag{21}$$

当 $\lambda=n$ 为整数时,函数 J_n 与 J_{-n} 变为线性相关,$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$,因而通解应该取(19)或(20)的形状,而不取(21)的形状.

* 对于第一项($k=0$),在大括弧内的式子等于 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

(5) 虚变元的圆柱函数 在某些应用中,会遇到纯虚变元 $z=ix$ 的圆柱函数.从前一目的公式(28)推知:函数 $y=J_\lambda(ix)$满足微分方程

$$y''+\frac{1}{x}y'-\left(1+\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y=0. \tag{22}$$

从 $J_\lambda(z)$的级数展开式求得

$$\begin{aligned} J_\lambda(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k i^\lambda i^{2k}}{k!\ \Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k} \\ &= i^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\ \Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}. \end{aligned}$$

由此看出:如果我们要得到当 λ 与 x 为实数时取实数值的函数,应当乘 $J_\lambda(ix)$以常数因子 $i^{-\lambda}=e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}}$.这样的乘积用下面的记号来表示:

$$I_\lambda(x)=e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}}J_\lambda(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\ \Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}. \tag{23}$$

函数 $I_{-\lambda}(z)$也是方程(22)的解,而且如果 λ 不等于整数,则 $I_\lambda(x)$与 $I_{-\lambda}(x)$线性无关.如果 $\lambda=n$ 是整数,则从(23)及关系式 $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$可得出:

$$I_{-n}(z)=I_n(z). \tag{24}$$

这时要得到方程(23)与 I_n线性无关的第二个解,应当利用得自其他的圆柱函数的那些函数.它们之中,最通用的是从虚变元的第一汉克尔函数乘以某一常数因子而得到的函数(麦克唐纳,1899 年)

$$K_\lambda(x)=\frac{\pi i}{2}e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}}H_\lambda^{(1)}(ix). \tag{25}$$

这种函数在应用上的重要性决定于:它是方程(22)的取正值的解,且当 $x\to\infty$时按指数法则趋于0(参看下一目的公式(17)).利用汉克尔函数用贝塞尔函数来表达的公式(7),对于非整数的 λ 得到

$$K_\lambda(x)=-\pi\frac{e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}}J_\lambda(ix)-e^{\frac{\lambda\pi i}{2}}J_{-\lambda}(ix)}{2\sin\lambda\pi},$$

或按公式(23)引入函数 $I_\lambda(x)$

$$K_\lambda(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\lambda}(x)-I_\lambda(x)}{\sin\lambda\pi}. \tag{26}$$

在此,取 λ 趋于整数 n 时的极限,且揭开不定式的值,得到

$$K_n(x)=\frac{(-1)^n}{2}\left\{\frac{\partial I_{-\lambda}(x)}{\partial\lambda}-\frac{\partial I_\lambda(x)}{\partial\lambda}\right\}_{\lambda=n}. \tag{27}$$

由此可得出 $K_n(x)$的级数展开式,如同我们对于韦伯函数所作的一样.例如,当 $n=0$ 时有

$$K_0(x)=-I_0(x)\ln\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\psi(k+1), \tag{28}$$

其中 ψ 是 Γ 函数的对数导数. 根据这一目的公式(25)及(6), 对于任何的 λ, 我们得出

$$K_\lambda(x)=K_{-\lambda}(x).$$

容易验证: 函数 $I_\lambda(z)$ 与 $K_\lambda(z)$ 满足形状稍加改变的递推关系式

$$I_{\lambda-1}(z)-I_{\lambda+1}(z)=\frac{2\lambda}{z}I_\lambda(z),\quad I_{\lambda-1}(z)+I_{\lambda+1}(z)=2I'_\lambda(z). \tag{29}$$

$$\begin{aligned} K_{\lambda-1}(z)-K_{\lambda+1}(z)&=-\frac{2\lambda}{z}K_\lambda(z),\\ K_{\lambda-1}(z)+K_{\lambda+1}(z)&=-2K'_\lambda(z). \end{aligned} \tag{30}$$

特别如,

$$I'_0(z)=I_1(z),K'_0(z)=-K_1(z). \tag{31}$$

当 λ 等于整数加 $\frac{1}{2}$ 时, 这些函数可用初等函数来表出. 例如

$$\begin{aligned} &I_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sh} z,\quad I_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{ch} z;\\ &K_{\frac{1}{2}}(z)=K_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}. \end{aligned} \tag{32}$$

在某些问题上, 还会遇到变元 $z=x\sqrt{-i}=e^{\frac{3}{4}\pi i}x$ 的圆柱函数. 对于这些函数的实数部分与虚数部分, 常引进专门的记号

$$\left.\begin{aligned} &J_\lambda(x\sqrt{-i})=e^{\frac{\lambda\pi i}{2}}\cdot I_\lambda(x\sqrt{i})=\operatorname{ber}_\lambda x+i\operatorname{bei}_\lambda x,\\ &e^{\frac{-\lambda\pi i}{2}}\cdot K_\lambda(x\sqrt{i})=\operatorname{ker}_\lambda x+i\operatorname{kei}_\lambda x,\\ &H_\lambda(x\sqrt{-i})=\operatorname{her}_\lambda x+i\operatorname{hei}_\lambda x. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

当 $\lambda=0$ 时, 通常略去指标, 例如

$$J_0(x\sqrt{-i})=I_0(x\sqrt{i})=\operatorname{ber} x+i\operatorname{bei} x. \tag{34}$$

97. 圆柱函数的渐近表达式 渐近表达式将有不同的形式, 它依赖于我们是否假设阶 λ 是甚大的, 或假设变元 x 是甚大的, 或假设二者都是甚大的(我们已设定 λ,x 都是实数). 与此相应, 我们分三种情形来讨论:

(1) 对于甚大的阶的渐近表达式 首先考虑第一汉克尔函数, 我们把它写成前一目中的积分形式(4)

$$H_\lambda^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{ix\sin\zeta-i\lambda\zeta}d\zeta, \tag{1}$$

其中 C_1 是图 199 中的路径. 我们设 $\lambda>x$, 且把小于 1 的数 $\frac{x}{\lambda}$ 表为 $\frac{x}{\lambda}=\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}$. 公式(1)具有形式

$$H_\lambda^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{\lambda\left(i\frac{\sin\zeta}{\operatorname{ch}\alpha}-i\zeta\right)}d\zeta=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{\lambda f(\zeta)}d\zeta, \tag{2}$$

其中

$$f(\zeta)=i\frac{\sin\zeta}{\operatorname{ch}\alpha}-i\zeta=-\cos s\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha}+\sigma+i\left(\sin s\frac{\operatorname{ch}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha}-s\right) \tag{3}$$

(令 $\zeta=s+i\sigma$). 为了要得到渐近公式,我们利用第 77 目的越过法. 鞍点可由方程

$$f'(\zeta_0)=i\left(\frac{\cos\zeta_0}{\operatorname{ch}\alpha}-1\right)=0$$

求出. 由此 $\cos\zeta_0=\operatorname{ch}\alpha$,因而

$$\zeta_0=\pm i\alpha. \tag{4}$$

通过这些点的最倾斜的曲线由方程

$$\operatorname{Im} f(\zeta)=\sin s\frac{\operatorname{ch}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha}-s=0 \tag{5}$$

来确定(实际上,在鞍点处 $s=0,\sigma=\pm\alpha$),由此有

$$\operatorname{ch}\sigma=\operatorname{ch}\alpha\frac{s}{\sin s}.$$

这曲线的形状如图 200 中的虚线所表示出的,是由虚轴与渐近地趋近于直线 $s=\pm\pi$ 的两条弧线所组成的. 从这曲线的弧中,可组成积分路线使沿着它的积分(1)同沿着路径 C_1 的有相同的值. 我们用 $\widetilde{C}_1$ 来代表这路径,且在图 200 中用粗的虚线标出. 这路径由沿着虚轴的射线 $(i\infty,-\alpha i)$ 与最快速倾斜曲线的下面那弧线的右半部分组成*.

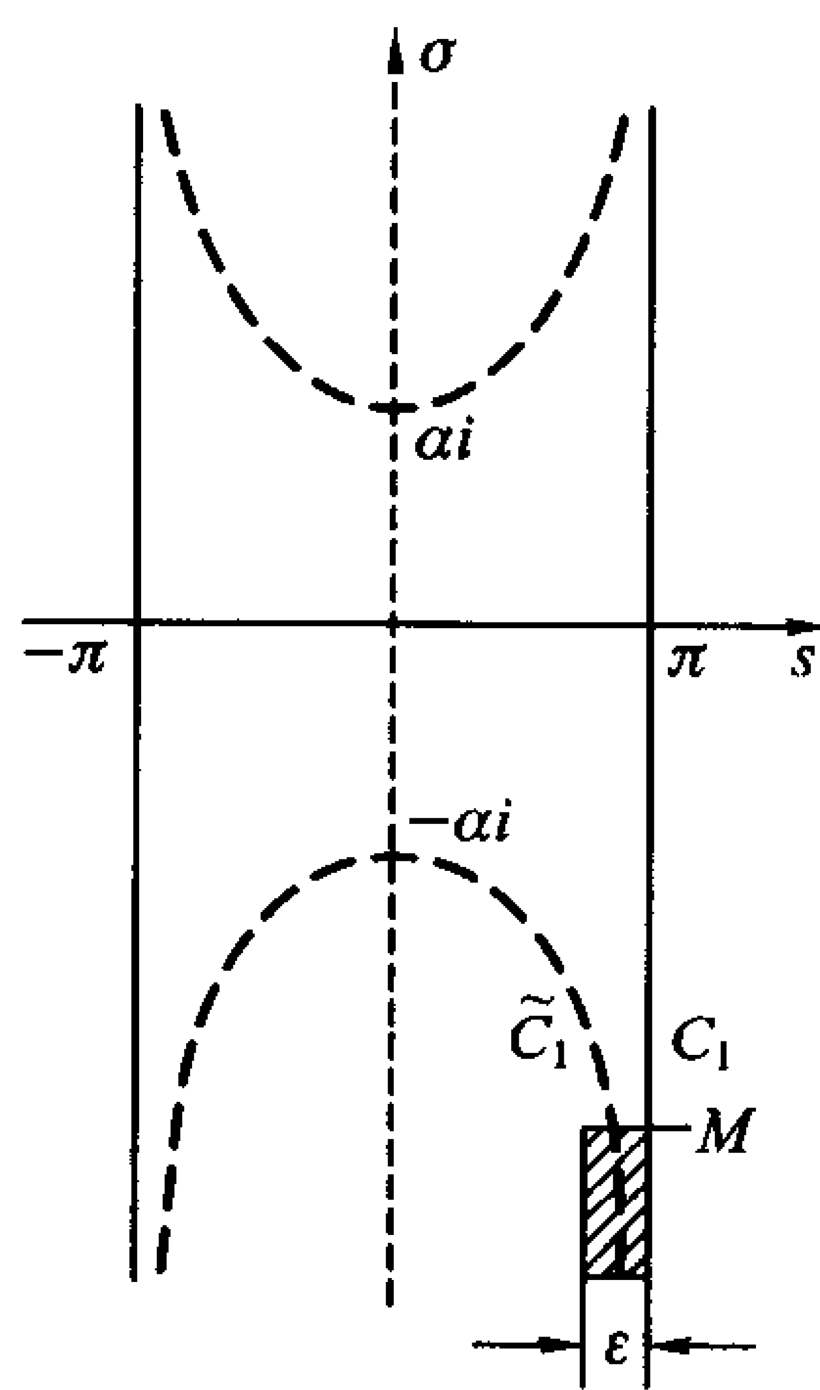


图 200

由于按方程(5),在曲线 $\widetilde{C}_1$ 上有 $\operatorname{Im} f(\zeta)=0$,故在这曲线上有

$$f(\zeta)=-\cos s\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha}+\sigma.$$

在 σ 轴上,函数 $f(i\sigma)=\sigma-\dfrac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha}$ 在点 $\sigma=\alpha$ 处达到极大值 $\alpha-\operatorname{th}\alpha$,在点 $\sigma=-\alpha$ 处达到极小值 $\operatorname{th}\alpha-\alpha$(这可由考虑导数 $\dfrac{df}{d\sigma}=-\dfrac{\operatorname{ch}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha}+1$ 而直接推知).

容易看出,在点 $\zeta_0=\alpha i$ 的极大值——函数 $f(\zeta)$ 在曲线 $\widetilde{C}_1$ 上的唯一极大值,因为 $f(\zeta_0)=\alpha-\operatorname{th}\alpha$, $f''(\zeta_0)=\operatorname{th}\alpha$ 和最快速倾斜曲线在越过点的倾斜角 $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$,所以按照第 77 目公式(18)我们得到

---

* 要证明 C_1 同 $\widetilde{C}_1$ 给出积分(1)同一数值,只需注意:在有界区域内,以及在半带形 $\pi-\varepsilon<\varepsilon<\pi,\sigma<-M$ 内,其中 ε 可以任意小而 M 可以任意大(这区域在图 200 中用虚线标出),通过变形,便可把 C_1 变换成 $\widetilde{C}_1$,而且,沿着 C_1 与 $\widetilde{C}_1$ 在这半带形内的部分的积分,可以任意怎样小.

$$H_{\lambda}^{(1)}(x)\approx\frac{1}{\pi}e^{\lambda(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}\sqrt{\frac{2\pi}{\operatorname{th}\alpha}}e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-i\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\operatorname{th}\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}.$$

在这里作代换 $\operatorname{th}\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-x^2}=\frac{\mu}{\lambda}$，其中 $\mu=\sqrt{\lambda^2-x^2}$ 和 $\alpha=\operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}$，最终我们得到所要求的阶数 λ 甚大时的第一汉克尔函数的渐近表达式

$$H_{\lambda}^{(1)}(x)\approx-i\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}e^{-\mu+\lambda\operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}}.\tag{6}$$

(这里应当认为 $x<\lambda$).

完全类似地，阶数甚大时的第二汉克尔函数的渐近表达式可求得为

$$H_{\lambda}^{(2)}(x)\approx i\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}e^{-\mu+\lambda\operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}}\tag{7}$$

借助于前一目的公式(5)，从估值(6)与(7)我们可求得甚大阶的贝塞尔函数的渐近表达式

$$J_{\lambda}(x)=\frac{H_{\lambda}^{(1)}(x)+H_{\lambda}^{(2)}(x)}{2}\approx0.\tag{8}$$

如若进行完全类似的计算，不考虑积分(2)而考虑施拉夫利积分

$$J_{\lambda}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Pi}\mathrm{e}^{ix\sin\zeta-i\lambda\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{\Pi}e^{\lambda f(\zeta)}d\zeta$$

(第 95 目的公式(10)，函数 $f(\zeta)$具有同前面一样的表达式)，且替代图 198 中的周线 Π 以图 201 中的周线 $\tilde{\Pi}$——曲面 $\tau=\operatorname{Re}f(\zeta)$的最大倾斜曲线的部分，则替代(8)我们得到另一个对于甚大的 λ 的渐近表达式

$$J_{\lambda}(x)\approx\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}e^{\mu-\lambda\operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}}.\tag{9}$$

这些计算中的细节我们将不加叙述.

按前一目的公式(10)，根据(6)与(7)我们还可求得关于阶数甚大时的韦伯函数的渐近表达式

$$Y_{\lambda}(x)=\frac{H_{\lambda}^{(1)}(x)-H_{\lambda}^{(2)}(x)}{2i}\approx-\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}e^{-\mu+\lambda\operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}}.\tag{10}$$

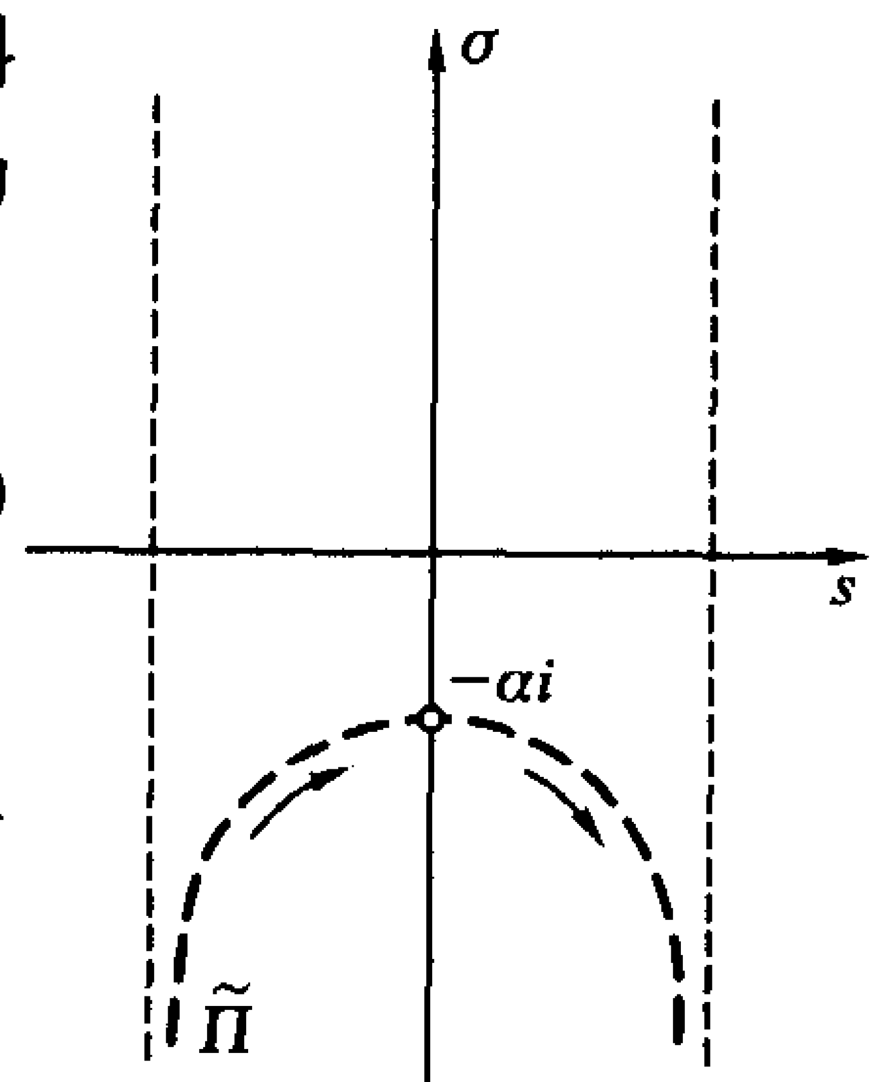


图 201

(2) 对于变元甚大值的渐近表达式　我们将设 $x>\lambda$，且把小于 1 的数$\frac{\lambda}{x}$表为$\frac{\lambda}{x}=\cos\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. 第一汉克尔函数可写为

$$H_{\lambda}^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_0}e^{x(i\sin\zeta-i\zeta\cos\alpha)}d\zeta=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{xg(\zeta)}d\zeta\tag{11}$$

的形式，其中

$$g(\zeta)=i\sin\zeta-i\zeta\cos\alpha$$

$$= -\cos s \operatorname{sh} \sigma + \sigma \cos \alpha + i(\sin s \cdot \operatorname{ch} \sigma - s \cos \alpha) \quad (12)$$

与公式(3)中的函数 $f(\zeta)$ 只相差一个常数因子. 鞍点可从方程 $g'(\zeta) = i(\cos \zeta_0 - \cos \alpha) = 0$ 求得,由此得 $\zeta_0 = \pm \alpha$. 通过这些点的最大倾斜的曲线可由方程

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g(\zeta) &= \sin s \cdot \operatorname{ch} \sigma - s \cos \alpha \\ &= \pm (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \end{aligned}$$

或

$$\operatorname{ch} \sigma = \cos \alpha \frac{s}{\sin s} \pm \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\sin s}$$

来确定. 这两条曲线的形状如图 202 中所表出,它们之中的每一条都由相交于鞍点且渐近地接近于虚轴与直线 $s = \pm \pi$ 的两个分支组成.

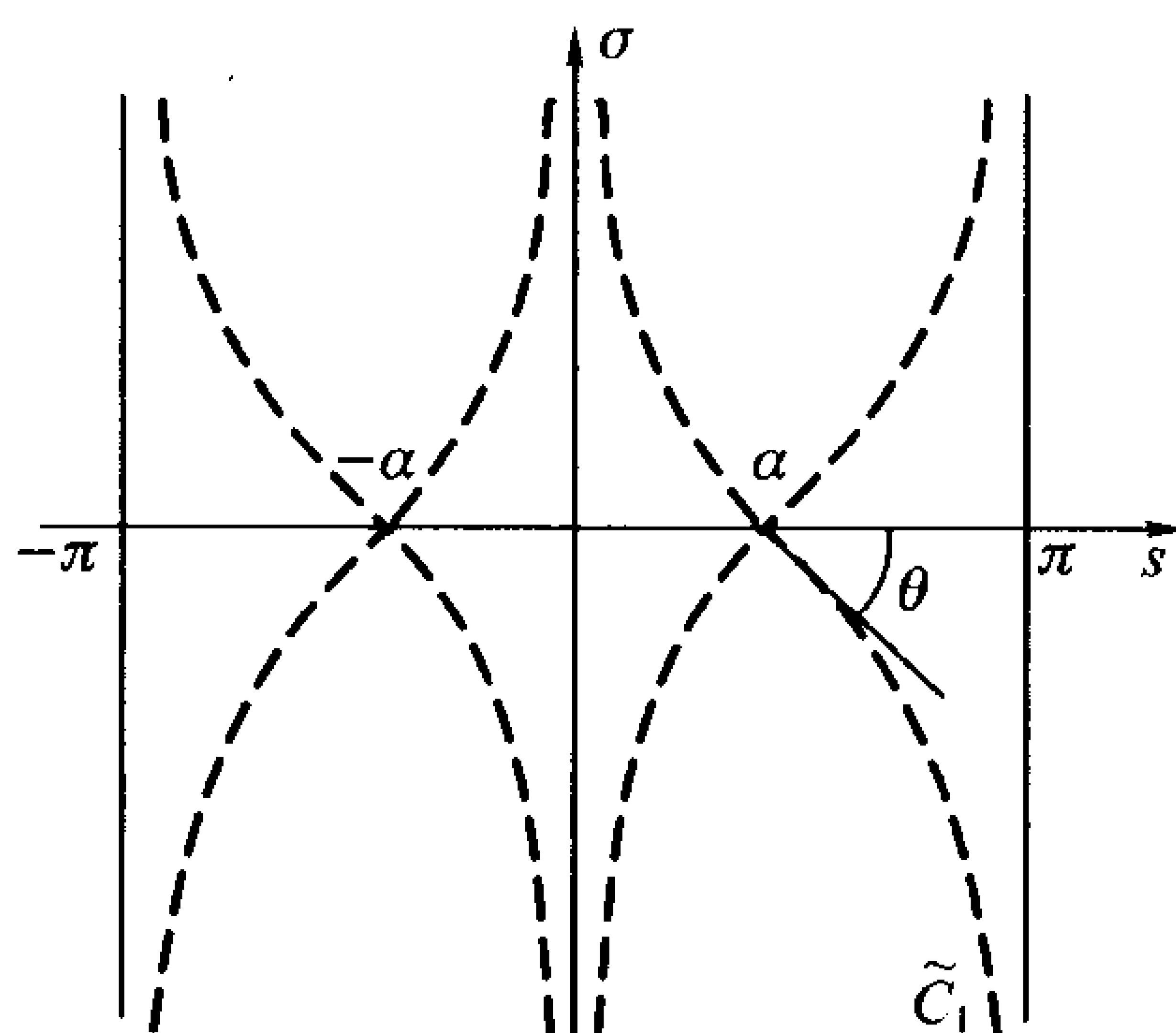


图 202

我们选取通过点 $\zeta_0 = \alpha$ 的最大倾斜曲线

$$\operatorname{ch} \sigma = \cos \alpha \frac{s}{\sin s} + \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\sin s}$$

的这样的一支为周线 $\tilde{C}_1$,使得沿着它积分(11)具有相同于沿着 C_1 时的值. 在图 202 中这周线用粗的虚线标出. 在 $\tilde{C}_1$ 上,函数

$$\tau = \operatorname{Re} g(\zeta) = -\cos s \operatorname{sh} \sigma + \sigma \cos \alpha$$

只有一个固定点,即鞍点 $\zeta_0 = \alpha$,且当趋近于 $\tilde{C}_1$ 的两个端点时,这函数趋于 $-\infty$. 由此推知:点 $\zeta_0 = \alpha$ 是函数 $\tau = \operatorname{Re} g(\zeta)$ 在 $\tilde{C}_1$ 上的唯一的极大点.

由于这里 $g(\zeta_0) = i(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$, $g''(\zeta_0) = -i \sin \alpha$ 和 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ *,则按第 77 目中公式(18)我们得出

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin \alpha}} e^{ix(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - i\frac{\pi}{4}},$$

由此再作替代 $x \cos \alpha = \lambda$, $\sin \alpha = \frac{\nu}{x}$,其中

$$\nu = \sqrt{x^2 - \lambda^2}, \alpha = \arcsin \frac{\nu}{x},$$

我们便得到了变元的值甚大时的第一汉克尔函数的渐近表达式

---

* 为了求角 θ,首先注意,曲线 $\operatorname{Re} g(\zeta) = \text{const}$ 经过鞍点 $\zeta_0 = \alpha$,我们有方程

$$-\cos s \operatorname{sh} \sigma + \sigma \cos \alpha = 0$$

这方程在点 ζ_0 的邻域内的主要项写成形状 $\sigma(s - \alpha) \sin \alpha + \cdots = 0$(我们作代换 $\cos s = \cos \alpha - \sin \alpha (s - \alpha) + \cdots$ 和 $\operatorname{sh} \sigma = \sigma + \cdots$),因此这曲线在点 ζ_0 的切线是直线 $s = \alpha$ 和 $\sigma = 0$. 曲线 $\operatorname{Im} g(\zeta) = \text{const}$ 在那一点的切线根据共轭调和函数的性质是这些直线的角平分线,亦即 $\theta = \pm \pi/4$,因此必须取 $\theta = -\pi/4$.

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} e^{i\left(\nu - \lambda \arcsin\frac{\nu}{x} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{13}$$

完全类似地,可得第二汉克尔函数的渐近表达式

$$H_\lambda^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} e^{-i\left(\nu - \lambda \arcsin\frac{\nu}{x} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{14}$$

如果再设 $x \gg \lambda$,于是 $\nu = \sqrt{x^2 - \lambda^2} \approx x$, $\alpha = \arcsin\frac{\nu}{x} \approx \frac{\pi}{2}$,则公式(13)与(14)可简化为:

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, H_\lambda^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \tag{15}$$

从公式(15)可推知在前一目中提到过而未加证明的论断:对于任何一个实值 λ 来说,汉克尔函数 $H_\lambda^{(1)}(z)$ 与 $H_\lambda^{(2)}(z)$ 是线性无关的.

从公式(15)根据前一目的公式(5)与(10),我们得出对于数值 $x \gg \lambda$ 的第一类及第二类圆柱函数的渐近表达式

$$\left.\begin{aligned} J_\lambda(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_\lambda(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

很值得注意的是:对于参数值 $\lambda = \pm\frac{1}{2}$,这两个渐近表达式都是精确的等式.(对于整数 $\lambda = n$,第一个公式在前面第 77 目中曾得到过).

用完全类似的方法,可得到对于数值 $x \gg \lambda$ 的虚变元的圆柱函数的渐近表达式

$$\left.\begin{aligned} I_\lambda(x) &= e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}} J_\lambda(ix) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \\ K_\lambda(x) &= \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\lambda\pi i}{2}} H_\lambda^{(1)}(ix) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

我们将不讲它们的推演.

(3) 对于甚大的 x 与 λ 的渐近表达式　如果设 $x = \lambda$,并且令

$$g(\zeta) = i\sin\zeta - i\zeta, \tag{18}$$

则

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_C e^{x(i\sin\zeta - i\zeta)} d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{xg(\zeta)} d\zeta, \tag{19}$$

和我们将仅有一个鞍点,在坐标原点 $\zeta_0 = 0$ 处.最大坡度曲线

$$\operatorname{Im} g(\zeta) = \sin s \operatorname{ch}\sigma - s = 0 \tag{20}$$

由通过坐标原点的三支组成:虚轴 $s = 0$ 及两条渐近地接近于直线 $s = \pm\pi$ 的弧(图 203).从这条曲线的分支中我们构作路线 $\tilde{C}_1$(用粗的虚线表示在图 203 上),对于积分(19),沿 $\tilde{C}_1$ 给出同沿 C_1 一样的值,我们应用越过法于这路线.我们作同在前一情

况下完全相同的讨论，只有一点不同，此时在鞍点处不仅 $g'(\zeta)=i(\cos\zeta-1)$ 为 0，而且 $g''(\zeta)=-i\sin\zeta$ 也为 0，并且只有 $g'''(0)=-i$ 异于 0，因此第 77 目的公式(18)不可应用，初等分析证明，虽然如此，但是点 $\zeta_0=0$ 是函数 $g(\zeta)$ 在 $\widetilde{C}_1$ 上的极大值点，并且是唯一的．依照越过法的思想，为了得到渐近表达式我们可以作代换 $g(\zeta)\approx\frac{g'''(0)}{3!}\zeta^3=-\frac{1}{6}\zeta^3$，并用鞍点的小邻域代换曲线 $\widetilde{C}_1$，或者带有同一精度

$$H_\lambda^{(1)}(x)\approx\frac{1}{\pi}\left\{\int_{\mathrm{I}}e^{-\frac{ix}{6}\zeta^3}d\zeta+\int_{\mathrm{II}'}e^{-\frac{ix}{6}\zeta^3}d\zeta\right\},$$

其中I表示正的虚半轴，而II′是II一段的切线（见图 203）．这切线的方程是 $\sigma=-\frac{1}{\sqrt{3}}s$（这不难从(20)式左边部分的泰勒展开式得出），并且在切线上 $\zeta^3=(s+i\sigma)^3=i\sigma(3s^2-\sigma^2)=8i\sigma^3$，$d\zeta=e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{ds^2+d\sigma^2}=-2e^{-i\frac{\pi}{6}}d\sigma$（符号说明我们这里有$d\sigma<0$）．

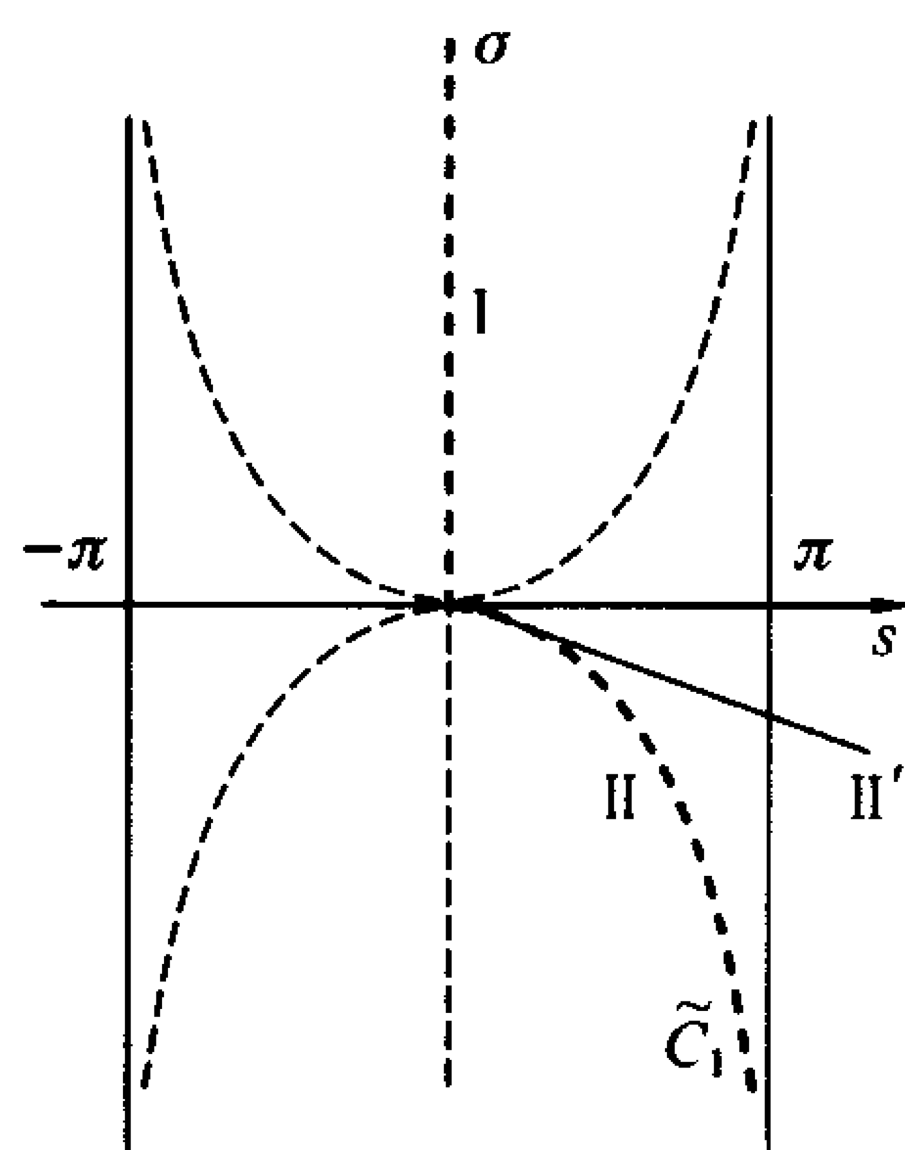


图 203

因此在 I 段上令 $\zeta=i\sigma$，我们得

$$\begin{aligned}H_\lambda^{(1)}(x)&\approx\frac{1}{\pi}\left\{i\int_\infty^0e^{-\frac{x}{6}\sigma^3}d\sigma-2e^{-i\frac{\pi}{6}}\int_0^{-\infty}e^{\frac{4}{3}x\sigma^3}d\sigma\right\}\\&=-\frac{1}{\pi}\left\{i\sqrt[3]{\frac{6}{x}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}2\sqrt[3]{\frac{3}{4x}}\right\}\int_0^\infty e^{-\xi^3}d\xi,\end{aligned}$$

但是

$$\int_0^\infty e^{-\xi^3}d\xi=\frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

于是最终得出

$$H_\lambda^{(1)}(x)\approx-\frac{1}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{6}{x}}\left(i-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right).\tag{21}$$

B. A. 福克院士对于

$$\sqrt{\lambda^2-x^2}\approx\lambda^{\frac{2}{3}},\lambda\gg1$$

的情形，或者，完全一样，对于有限值

$$t=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\lambda^2}{x^2}-1\right)$$

的情形，给出了另一渐近公式．这公式具有形式

$$H_\lambda^{(1)}(x)\approx-\frac{i}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}w(t),\tag{22}$$

其中

$$w(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_Le^{t\zeta-\frac{\zeta^3}{3}}d\zeta,\tag{23}$$

且 L 是沿射线 $\arg\zeta=-\frac{2}{3}\pi$ 自 $\zeta=\infty$ 到 $\zeta=0$ 与沿正半轴 $\arg\zeta=0$ 自 $\zeta=0$ 到 $\zeta=$

∞行进的路线.这函数被研究过并且为它造出了表.我们将不讲福克公式的推导(参看B.A.福克[10],页55—60).

98. 圆柱函数的图像.零点的分布 在此,我们将引入在实用上最通用的那些圆柱函数对于变元的正值的图像.在图204与图205中,实曲线用来表示函数 $J_0(x)$ 与 $Y_0(x)$ 的图像.对于变元的很小的值,这些图像的性征可由 $J_0(x)$ 与 $Y_0(x)$ 的级数表示来说明.对于大的 x 值,可利用前一目的渐近表达式(16),从(16)推出

$$\left.\begin{aligned} J_0(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \\ Y_0(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

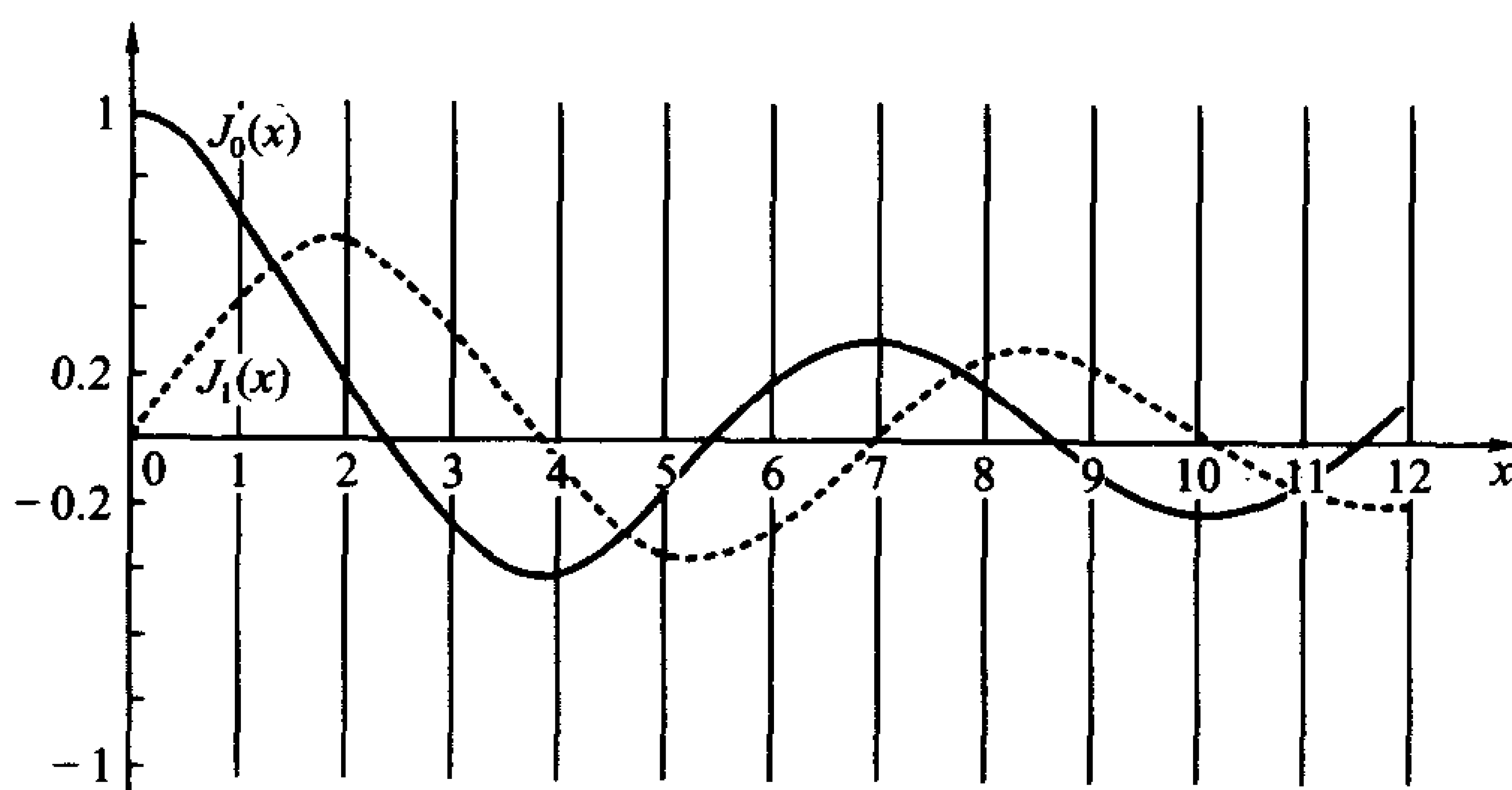


图 204

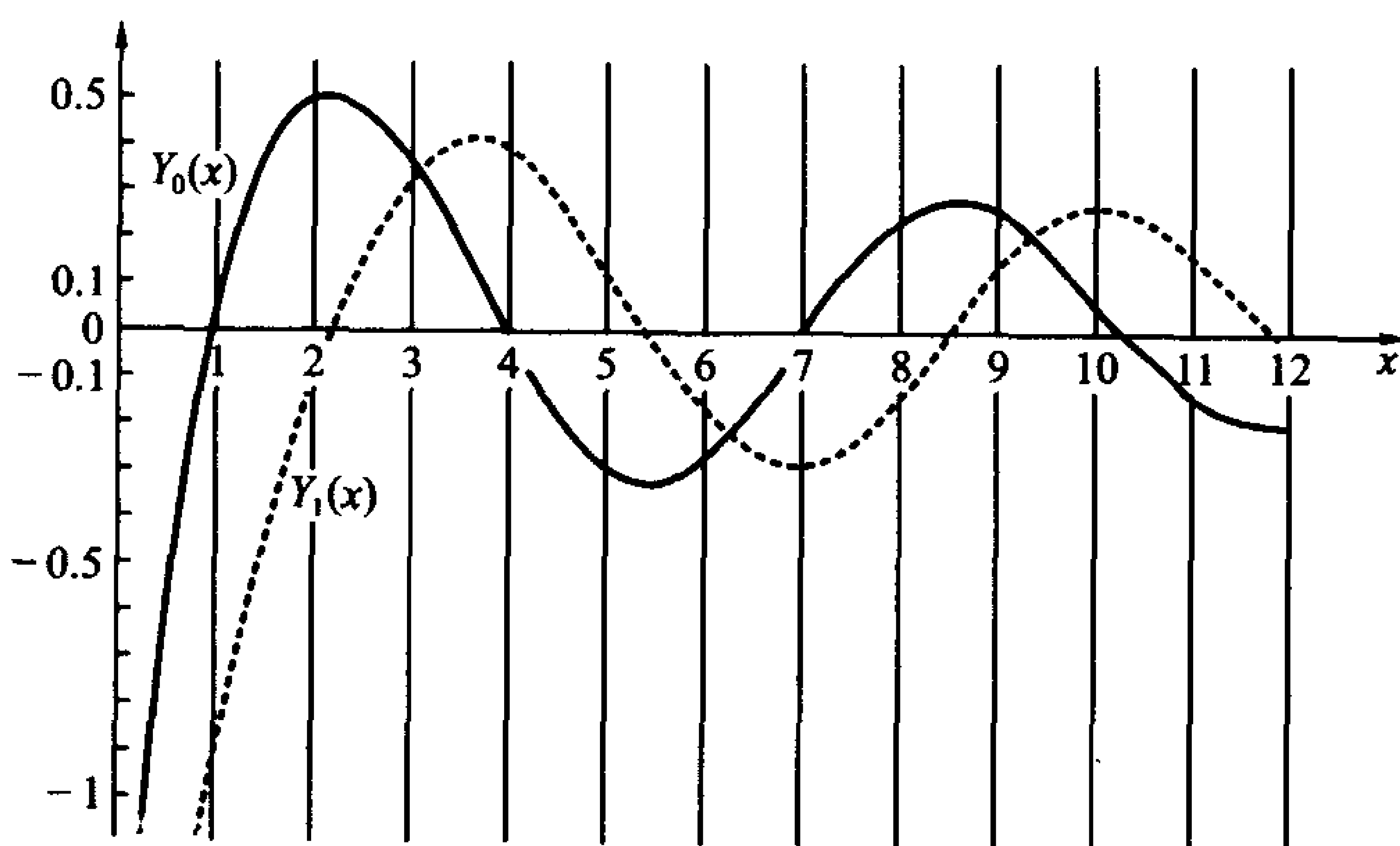


图 205

在这两个图中,虚曲线表示一阶的贝塞尔函数 $J_1(x)$ 与韦伯函数 $Y_1(x)$ 的图像.它们可根据关系式 $J_1(x)=-J'_0(x)$, $Y_1(x)=-Y'_0(x)$ 从 $J_0(x)$ 与 $Y_0(x)$ 的图像利用图解微分法而得到.

在图 206 与图 207 中,还举出了常被应用于物理学的虚变元的圆柱函数

$$
\begin{aligned}
I_0(x)&=J_0(ix)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{x},\\
K_0(x)&=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(ix)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

的图像,在图 206 中还用虚线表示出了 $I_n(x)$, $n=1,2,3,4$ 的图像.

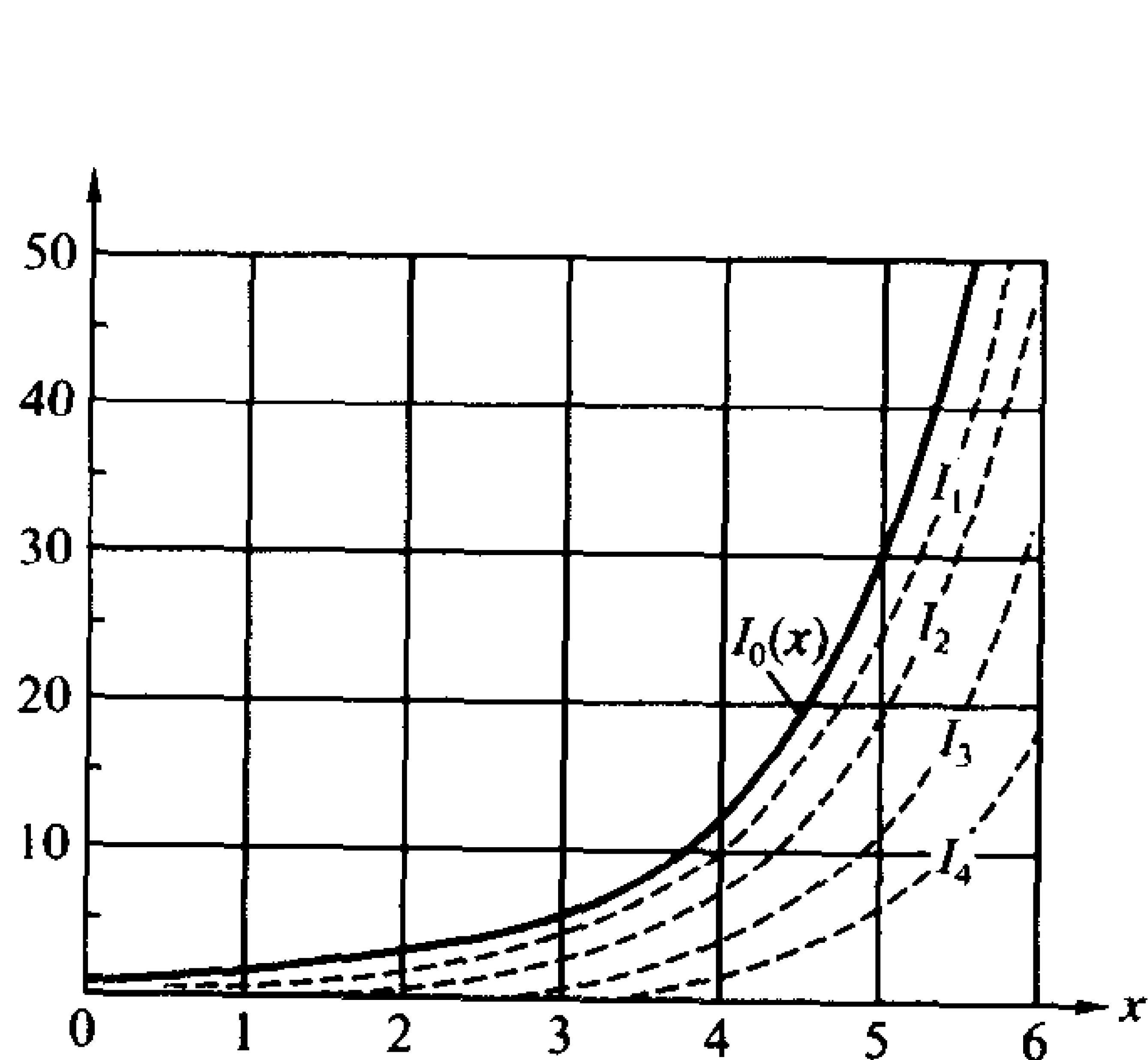


图 206

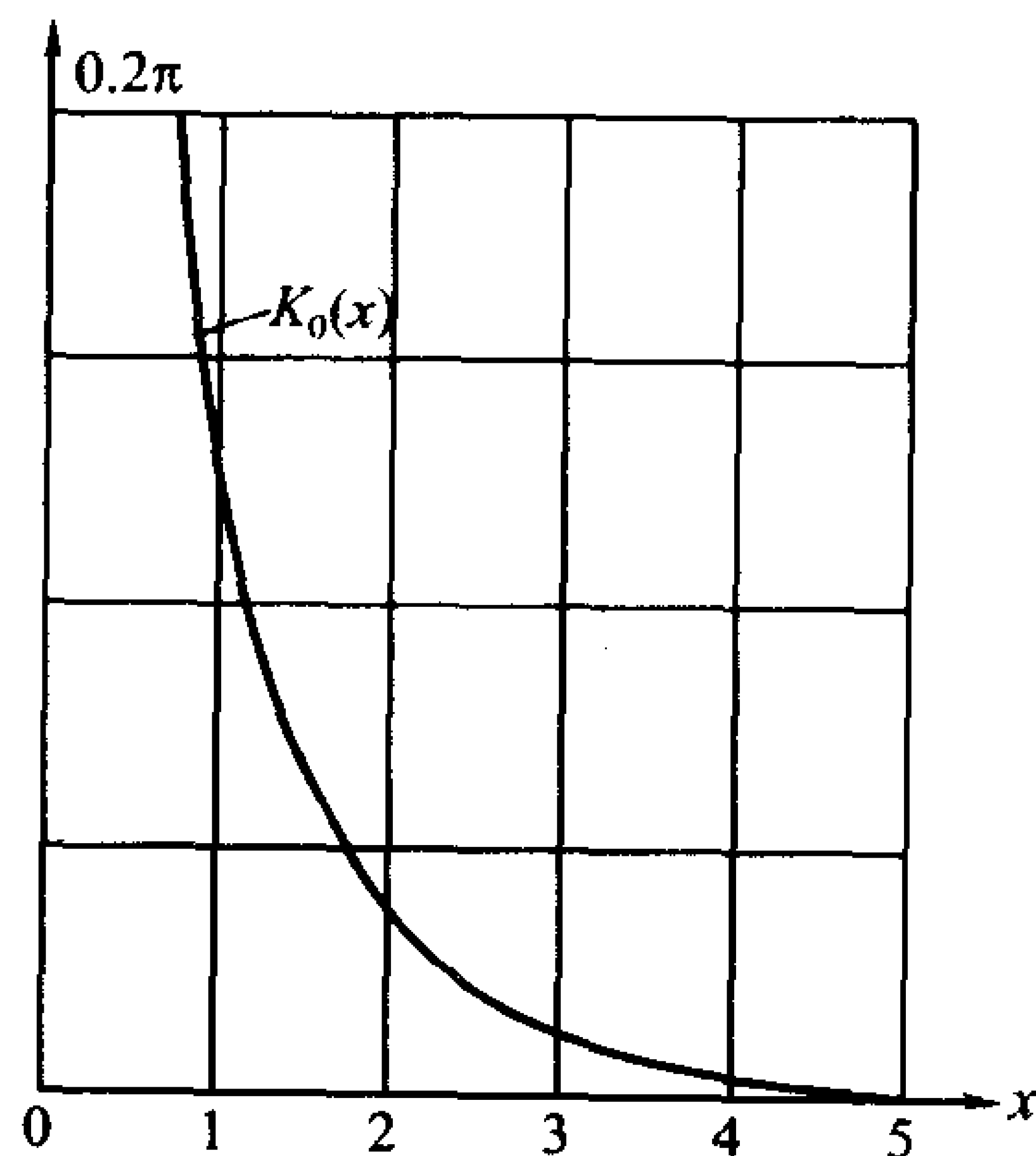


图 207

函数 $J_n(x)$ 与 $Y_n(x)$ 有波动的性征,它们具有近于常数的频率以及同 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 一样减小着的振幅. 同时,函数 $Y_n(x)$ 当接近于坐标原点时趋于 $-\infty$.

相反,函数 $I_0(x)$ 与 $K_0(x)$ 没有波动的性征:它们之中的第一个自数值 1 到∞单调地增大,大致具有指数函数的速率,而第二个则自 $+\infty$减小到 0.

在图 208 中作出了函数 $J_0(z)$ 的"地形面",其上画出了模的(间隔为 0.2)与辐角的(间隔为 30°)等值线,沿实轴的截线给出了 $|J_0(x)|$ 的图像. 图 209 中表明了 $H_0^{(1)}(z)$ 的一个分支的"地形面",这分支沿着负实轴遭遇间断点且当 $y\to+\infty$ 时趋于 0. 在图中画出了模的(间隔为0.2)与辐角的(间隔为 15°)等值线. 在图 210 中显示了 $J_\lambda(x)$ 对于两个实变量 x 及 λ 的依赖性. 在曲面上的曲线是 $J_0(x)$, $J_2(x)$, $\cdots$, $J_{10}(x)$ 与 $J_\lambda(2)$, $J_\lambda(4)$, $\cdots$, $J_\lambda(20)$ 的图像.

在实用上,圆柱函数的零点具有很大的价值. 我们来考虑贝塞尔函数的零点分布的问题. 设 λ 是实数,$\lambda>-1$. 在第 95 目中我们在证明这些函数的正交性时曾引出了公式(33),由这个公式,对于函数 $J_\lambda(z)$ 的任何两个零点 $z=\alpha$ 与 $z=\beta$,引出关系式

$$
(\beta^2-\alpha^2)\int_0^1 J_\lambda(\alpha t)J_\lambda(\beta t)\,t\,dt=0.
\tag{3}
$$

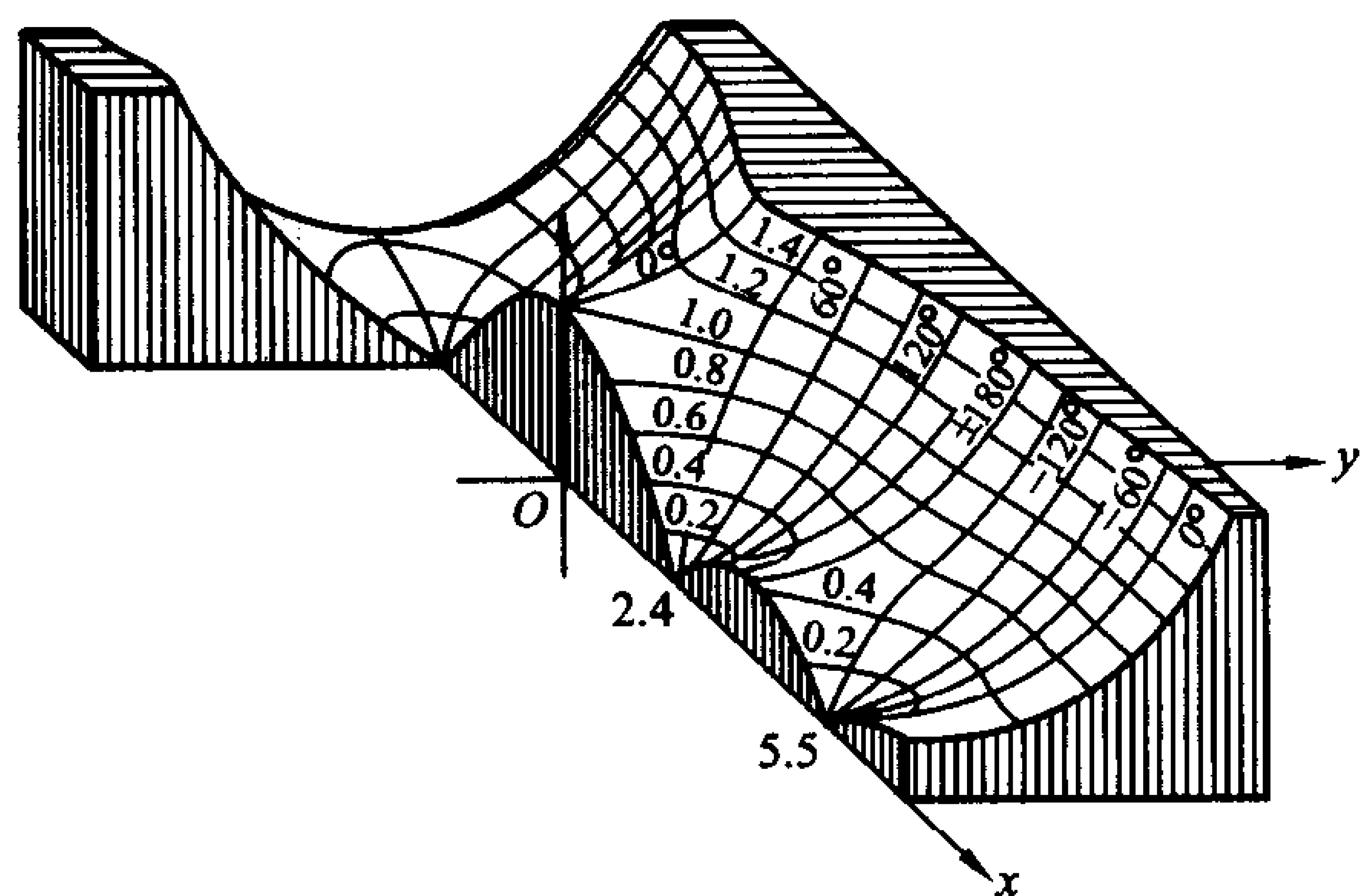


图 208

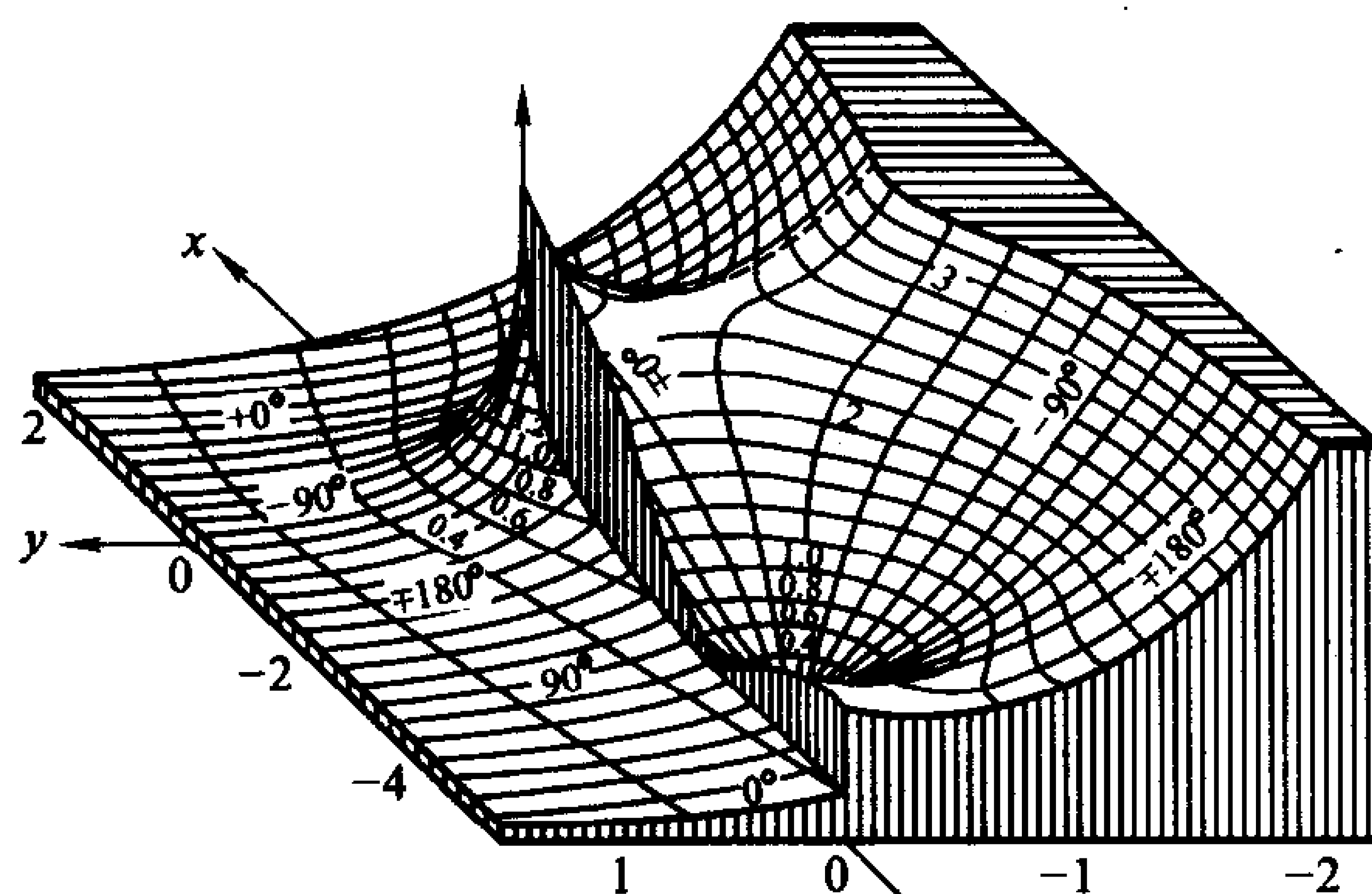


图 209

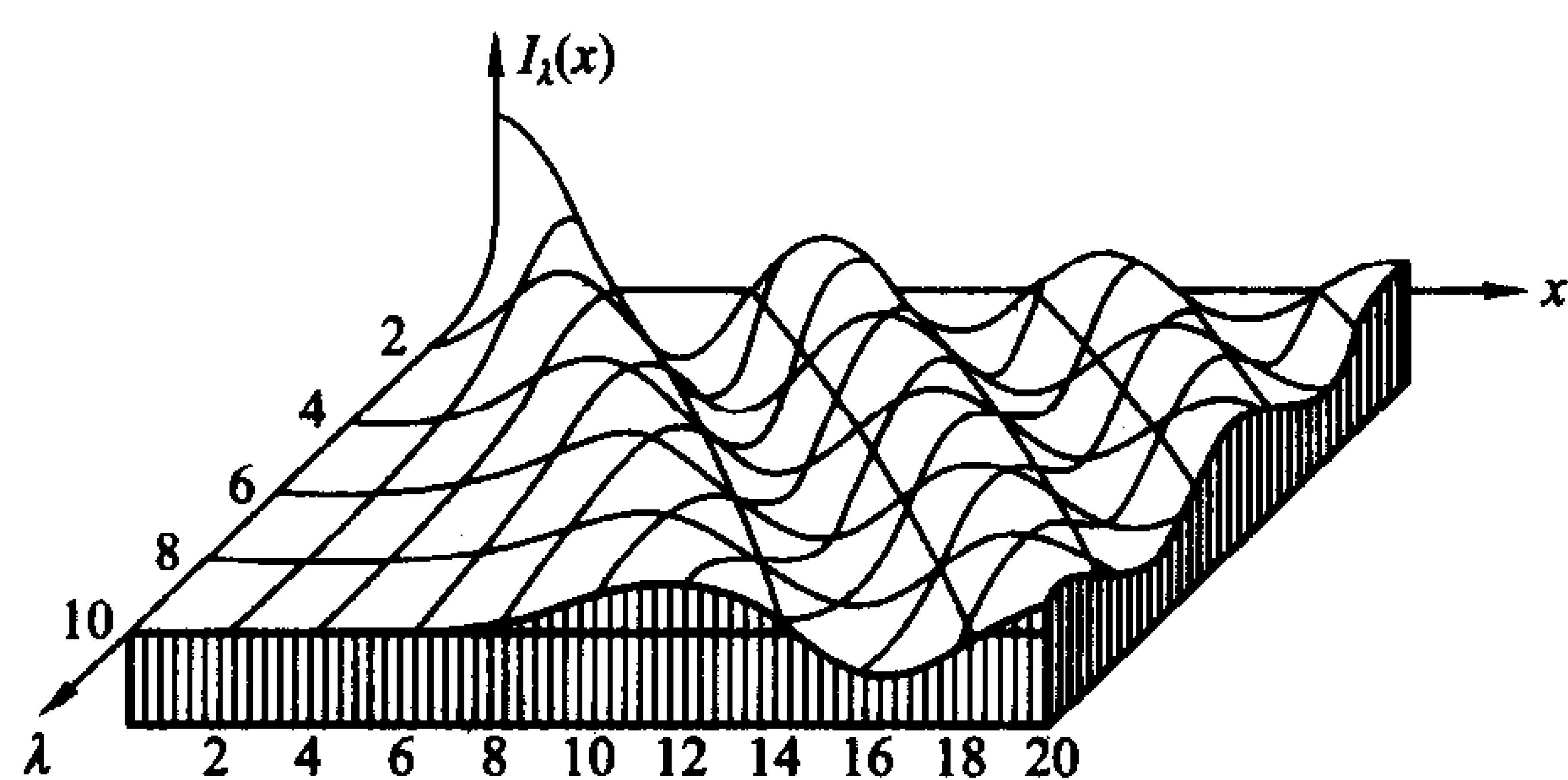


图 210

由于在展开式

$$J_\lambda(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{4}$$

中,所有的系数都是实的,故显然有

$$J_\lambda(\bar{z})=\overline{J_\lambda(z)}. \tag{5}$$

特别是,由此可以推知:如果 z 是方程 $J_\lambda(z)=0$ 的复数根,则 $\bar{z}$ 也将是这方程的根. 在公式(3)中令 $\alpha=z,\beta=\bar{z}$,且利用公式(5),依照这一公式 $J_\lambda(z)\cdot J_\lambda(\bar{z})=|J_\lambda(z)|^2$,因而我们有

$$(\bar{z}^2-z^2)\int_0^1|J_\lambda(tz)|^2tdt=0.$$

但由于这里的积分不可能为0,故 $\bar{z}^2-z^2=0$,由此或者 $\bar{z}=z$ 或者 $\bar{z}=-z$. 因此,对于实值的 $\lambda>-1$,函数 $J_\lambda(z)$ 只可能有实的或纯虚的零点.

从前一目中所得到的关于 $\lambda\geqslant0$ 时的渐近公式

$$J_\lambda(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\lambda\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \tag{6}$$

可以推知:$J_\lambda(x)$ 具有无穷多个正值的零点(实际上,$J_\lambda(x)$ 是连续的,而且从(6)中可推知,它改变符号无穷多次). 但从展开式(4)直接推得的公式

$$J_\lambda(-z)=e^{i\lambda\pi}J_\lambda(z), \tag{7}$$

可以看出:$J_\lambda(z)$ 的零点对于坐标原点对称地分布着的. 因此,$J_\lambda(z)$ 也有无穷多个负值的零点.

从(6)可推得关于 $J_\lambda(x)$ 的零点的近似公式

$$\alpha_k^{(\lambda)}\approx\frac{3\pi}{4}+\lambda\frac{\pi}{2}+k\pi, \tag{8}$$

$|k|$ 愈大时愈精确. 作为例子,我们举出函数 $J_0(x)$ 的最小的正值的零点:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha_k^{(0)}$	2.404 8	5.520 1	8.653 7	11.741 5	14.930 9	18.071 1	21.212 6

注意,当 $k=6$ 时,近似公式(8)给出值 $\alpha_6^{(0)}=21.206$ (具有精确度 0.01).

为了要研究关于 $J_\lambda(z)$ 的纯虚根的问题,我们在公式(4)中令 $z=xi$,得到

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}=\frac{1}{2^\lambda}\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\frac{1}{k!\ \Gamma(\lambda+k+1)}. \tag{9}$$

设 λ 是任意实数,由于 $\lambda+k+1$ 除了有限个数以外的所有的 k 都具有正值,故级数(9)的所有系数,除了有限多个之外,都是正的. 此外,对于很大的 $|x|$,公式(9)的右端的符号由高次幂的符号来确定,故我们可推断:对于充分大的 $|z|$,$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}>0$,就是说,$J_\lambda(z)\neq0$. 但在虚轴的有限线段上,整函数 $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ 只可能有有限个零点,因此对于任何一个实值 λ,函数 $J_\lambda(z)$ 只可能有有限个纯虚数的零点. 特别,当 $\lambda>-1$ 时,级

数(9)的所有系数都是正的,因此,当 $\lambda > -1$ 时,函数 $J_\lambda(z)$ 完全没有纯虚数的零点.

我们来阐明贝塞尔函数的零点分布的某些特性.为此,首先我们记

$$y(x)=\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}, \tag{10}$$

并且注意到:这函数满足微分方程

$$xy''+(2\lambda+1)y'+xy=0, \tag{11}$$

这可由在圆柱函数的微分方程中作代换 $J_\lambda=x^\lambda y$ 而得到.

假设 α 是导数 y' 的任意一个正的零点,于是方程(11)在 $x=\alpha$ 时采用 $y''(\alpha)+y(\alpha)=0$ 的形状.但 $y(\alpha)$ 不可能等于0,因为那时从条件 $y(\alpha)=0, y'(\alpha)=0$,按微分方程(11)的始值问题的解的唯一性定理* 也就有 $y(x)\equiv 0$.所以 $y(\alpha)$ 与 $y''(\alpha)$ 具有不同的符号.

现在假定 α 与 $\beta(\beta>\alpha)$ 是 $y'(x)$ 的两个邻接的正值零点,则在区间 (α,β) 内 $y'(x)\neq 0$.按照周知的罗尔定理,$y''(x)$ 在区间 (α,β) 上至少有一个零点,精确地说,有奇数个这种零点.由此推知:$y''(\alpha)$ 与 $y''(\beta)$,因而 $y(\alpha)$ 与 $y(\beta)$,具有相异的符号,就是说,在区间 (α,β) 上至少有 $y(x)$ 的一个零点.但是在区间 (α,β) 上 $y(x)$ 不可能有多于一个的零点,因为如果如此,在这区间内将至少有 $y'(x)$ 的一个零点,而这是同我们所采用的条件相矛盾的.因此,可以推断:$y(x)$ 与 $y'(x)$ 的正根是互相间隔着的.对于负值的零点也是这样.

再注意:第95目的递推关系式(18)可写成

$$y'(x)=-\frac{J_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda} \tag{12}$$

的形式.因此,$y'(x)$ 的零点同 $J_{\lambda+1}(x)$ 的零点相一致.在另一方面,从(10)式看出,$y(x)$ 的零点同 $J_\lambda(x)$ 的零点相一致.这样一来,前面所得到的论断便可叙述为:*阶数相差1的两个贝塞尔函数的零点彼此相间隔*.我们又发现了贝塞尔函数与三角函数间的相同之处:$\cos\left(x+\lambda\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\cos\left[x+(\lambda+1)\frac{\pi}{2}\right]$ 的零点显然也是互相间隔着的.

99.例.应用 (1) 贝塞尔函数的加法定理 对于任何整数 n 与复数 z_1 及 z_2,都有

$$J_n(z_1+z_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(z_1)J_{n-k}(z_2). \tag{1}$$

证明可由关于指数函数的加法定理与 J_n 的利用母函数的定义而推得.我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z_1+z_2)w^n=e^{\frac{z_1+z_2}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=e^{\frac{z_1}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}e^{\frac{z_2}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)},$$

现在展开这些函数为级数

$$e^{\frac{z_1}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z_1)w^n,\quad e^{\frac{z_2}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(z_2)w^k,$$

---

* 点 $x=\alpha$ 是方程(11)的正则点.

且将展开式相乘,按 w 的幂将乘积排列起来.就有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1+z_2)w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1)J_{n-k}(z_2)\right\}w^n,$$

因此,由于展开为洛朗级数的唯一性,对于任何的 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$,我们得到公式(1).

(2) 可用圆柱函数来解的微分方程　方程

$$x^2y''+axy'+(b+cx^\alpha)y=0 \tag{2}$$

给出可用圆柱函数来解的二阶线性微分方程的重要的一类例子,这里 a,b,c 与 α 是某一些常数,并且 c 与 α 都异于0*.

实际上,在方程(2)中,我们令

$$x=kt^\mu, y=t^\nu u \tag{3}$$

其中 μ,ν 和 k 是某些常数,便变换到新的自变数 t 与新的所求函数 u.作代换

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}},\quad y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

且利用(关系式(3))来计算在这些公式的右端的导数.将这些表达式代入方程(2)中.在简化后得到如下形式的方程

$$t^2u''+[2\nu+(a-1)\mu+1]tu'+[c\mu^2k^\alpha t^{\alpha\mu}+(a-1)\mu\nu+b\mu^2+\nu^2]u=0,$$

其中 u' 与 u'' 表示对于 t 的导数.如果选取常数 μ,ν 及 k 使得

$$2\nu+(a-1)\mu=0,\quad \alpha\mu=2,\quad c\mu^2k^\alpha=1, \tag{4}$$

(如果 α 与 c 异于0,这总是可能的),则方程(4)便具有形式

$$t^2u''+tu'+(t^2-\lambda^2)u=0, \tag{5}$$

其中

$$\lambda^2=-[(a-1)\mu\nu+b\mu^2+\nu^2]=\nu^2-b\mu^2. \tag{6}$$

就是说,将同具有指标 λ 的圆柱函数的微分方程一致.

(3) 含有贝塞尔函数的积分　应用第80目的相似定理于第82目中关于圆柱函数的像的公式(7),求得

$$J_n(bt)\doteqdot\frac{b^n}{\sqrt{p^2+b^2}(\sqrt{p^2+b^2}+p)^n}. \tag{7}$$

按照关于拉普拉斯变换的公式(为对称起见,在其中以 a 代 p),就有

$$\int_0^\infty e^{-at}J_n(bt)dt=\frac{b^n}{\sqrt{a^2+b^2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^n}. \tag{8}$$

特别,当 $n=0$ 时得积分(利普希茨)

$$\int_0^\infty e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{8'}$$

它在 $\mathrm{Re}\,a\geqslant0$ 时收敛.

在(8′)中以 ai 替代 a,得

---

* 如若 c 或 α 等于0,则方程(2)可用初等函数来解.

$$\int_0^\infty e^{-ait} J_0(bt)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}, 当 |a|<|b|, \\ \dfrac{-i}{\sqrt{a^2-b^2}}, 当 |a|>|b| \end{cases}$$

(可以查出:$\sqrt{\quad}$ 在此表示当 a 与 b 都是实值时取正值的那一分支).当 a 与 b 为实数时,把实数部分与虚数部分分开,我们求得积分(韦伯)

$$\int_0^\infty J_0(at)\cos bt dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}, \\ 0, \end{cases} \quad \int_0^\infty J_0(at)\sin bt dt = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \end{cases} \tag{9}$$

(上面的那行属于情形 $a>b$,而下面的那行则属于情形 $a<b$).

设 $a>b$;对公式(9)的第一式按 b 进行积分,我们求得

$$\int_0^\infty J_0(at)\frac{\sin bt}{t}dt = \int_0^b \frac{db}{\sqrt{a^2-b^2}} = \arcsin\frac{b}{a}, 0 \leqslant b < a.$$

当 $b=a$ 时,左边的积分也收敛,并且在 $b \to a$ 时取极限,对任何 $a>0$ 我们得出

$$\int_0^\infty J_0(at)\frac{\sin at}{t}dt = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

(极限过渡的合法性可以有根据的).从另一方面,在区间(b_0, b),$a<b_0<b$ 上对(9)的同一公式进行积分,我们得到

$$\int_0^\infty J_0(at)\left\{\frac{\sin bt}{t} - \frac{\sin b_0 t}{t}\right\}dt = 0,$$

由此,在 $b_0 \to a$ 时取极限(取极限的合法性也是可以有根据的),顾虑到(10)我们求得

$$\int_0^\infty J_0(at)\frac{\sin bt}{t}dt = \frac{\pi}{2}, \quad b \geqslant a.$$

由此可见,把求得的结果合并起来,我们得到

$$\int_0^\infty J_0(at)\frac{\sin bt}{t}dt = \begin{cases} \arcsin\dfrac{b}{a}, & 0 \leqslant b < a, \\ \dfrac{\pi}{2}, & b \geqslant a. \end{cases} \tag{11}$$

我们也还有过公式

$$\int_0^\infty e^{-p\tau}\tau^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{\tau})d\tau = \frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}} \tag{12}$$

(参看第 82 目公式(3)与拉普拉斯变换的公式),其中令 $\tau=\dfrac{a^2t^2}{4}$ 与 $p=\dfrac{4b^2}{a^2}$,便又得到一个积分(韦伯)

$$\int_0^\infty J_n(at)e^{-b^2t^2}t^{n+1}dt = \frac{a^n}{(2b^2)^{n+1}}e^{-\frac{a^2}{4b^2}}. \tag{13}$$

(4) 索宁积分　从 $J_m(x)$的级数表示求得

$$J_m(x\sin t)\sin^{m+1}t\cos^{2n+1}t = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{m+2k}}{2^{m+2k}k!\,\Gamma(m+k+1)}\sin^{2m+2k+1}t\cos^{2n+1}t.$$

把这关系式逐项对 t 自 0 到$\dfrac{\pi}{2}$求积分(这当 $m>-1, n>-1$ 时是合法的),并利用第 90 目的公式(5),就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x\sin t)\sin^{m+1}t\cos^{2n+1}t\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{m+2k}}{2^{m+2k}k!\ \Gamma(m+k+1)}\ \frac{1}{2}\ \frac{\Gamma(m+k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+k+2)}$$

$$=\Gamma(n+1)\frac{2^n}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(m+n+k+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+n+2k+1}$$

$$=\Gamma(n+1)\frac{2^n}{x^{n+1}}J_{m+n+1}(x),$$

或者

$$J_{m+n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{2^n\Gamma(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x\sin t)\sin^{m+1}t\cos^{2n+1}t\,dt \tag{14}$$

$(m,n>-1)$. 这个积分是 Н.Я. 索宁得出的.

类似地,我们可得到第二个索宁积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x\sin t)J_n(y\cos t)\sin^{m+1}t\cos^{n+1}t\,dt$$

$$=\frac{x^m y^n J_{n+m+1}(\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(m+n+1)}}\quad(m,n>-1). \tag{15}$$

下面哪个公式也属于 Н.Я. 索宁:

$$\int_0^{\infty} J_m(at)\frac{J_n(b\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}t^{m+1}\,dt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a^m}{b^n}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{x}\right)^{n-m-1}J_{n-m-1}(x\sqrt{a^2-b^2}), & 当 0<a<b,\\ 0; & 当 a>b>0.\end{cases} \tag{16}$$

要推演出这个公式,我们注意,在第 95 目的索宁 - 施拉夫利积分中,当 $\lambda>-1$ 时按若尔当引理可以用直线 $\mathrm{Im}\ \zeta=C>0$ 替代积分路线 C^*. 我们得出了贝塞尔函数的新的积分表示(索宁):

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}\zeta^{-\lambda-1}\,d\zeta. \tag{17}$$

在公式(16)的左端,将 $J_n(b\sqrt{t^2+x^2})$ 按公式(17)代入,求得这左端等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} J_m(at)\left(\frac{b}{2}\right)^n t^{m+1}\left\{\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta-\frac{b^2(t^2+x^2)}{4\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} J_m(at)t^{m+1}\left\{\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b}{2}\left(\omega-\frac{t^2+x^2}{\omega}\right)}\frac{d\omega}{\omega^{n+1}}\right\}dt$$

(我们作了代换 $\frac{2\zeta}{b}=\omega$,且利用了下述事实:当 $b>0$ 时,这代换不改变积分路线). 在这式中交换求积分的顺序,且利用韦伯积分(13),求得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\omega^{-n-1}e^{\frac{b}{2}\left(\omega-\frac{x^2}{\omega}\right)}d\omega\int_0^{\infty} e^{-\frac{bt^2}{2\omega}}J_m(at)t^{m+1}\,dt$$

$$=\frac{a^m}{2\pi i\ b^{m+1}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b^2-a^2}{2b}\omega-\frac{bx^2}{2\omega}}\omega^{m-n}\,d\omega. \tag{18}$$

当 $a>b$ 时,这积分等于 0. 实际上,在这种情形下,在 e 的乘幂的指数中,ω 的系数为负,因而按若尔当引理,这积分可作为沿线段 $(c-id,c+id)$ 及加上右半个圆周的积分的极限而得到,而在

这路线的内部,被积函数是正则的.公式(16)的第二部分得到证明.

当 $a<b$ 时,按同一索宁公式(17)求得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b^2-a^2}{2b}\omega-\frac{bx^2}{2\omega}}\omega^{m-n}d\omega = \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^{n-m-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta-\frac{b^2-a^2}{4\zeta}x^2}\zeta^{m-n}d\zeta$$

$$=\frac{1}{b^{n-m-1}}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{x}\right)^{n-m-1}J_{n-m-1}(x\sqrt{b^2-a^2})$$

(我们作了代换 $\omega=\frac{2b}{b^2-a^2}\zeta$,且应用了公式(17),其中设 $\lambda=n-m-1, z=x\sqrt{b^2-a^2}$).将求得的积分值代入(18)中,便得出索宁公式(16)的第一部分.

(5) 电磁波理论的积分 我们将导出公式

$$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})\cdot\eta(t-\tau)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}, \tag{19}$$

这个公式我们在第 87 目中解决传输线上的电波传播问题时已曾利用过.我们从第 95 目的索宁积分(8)出发,在其中令 $n=0$ 与 $z=a\sqrt{t^2-\tau^2}$,便有

$$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1} e^{\frac{a\sqrt{t^2-\tau^2}}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}\frac{d\omega}{\omega}.$$

在其中作代换

$$\omega=\sqrt{\frac{t+\tau}{t-\tau}}\zeta,$$

这时圆周 $|\omega|=1$ 变换成圆周 $|\zeta|=\left|\sqrt{\frac{t-\tau}{t+\tau}}\right|$,且由于被积函数只有一个奇点 $\zeta=0$,故这圆周可用圆周 $|\zeta|=1$ 来替代.我们得到

$$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} e^{\frac{at}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{a\tau}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{20}$$

利用这公式,我们来求(19)的左端的拉普拉斯的像.我们设 $\tau>0$,并且总是设 $\mathrm{Re}\,p>0$,我们有

$$\int_\tau^\infty e^{-pt}J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left\{\int_\tau^\infty e^{-t\left[p-\frac{a}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]}dt\right\}e^{\frac{a\tau}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{21}$$

(我们交换了积分的顺序).在内部的积分中,在幂函数的指数中的 t 的系数的实数部分等于

$$\mathrm{Re}\left[p-\frac{a}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]=\mathrm{Re}(p-ai\sin\varphi)=\mathrm{Re}p>0$$

(我们令 $\zeta=e^{i\varphi}$,且设 a 是实数),所以积分收敛,且容易计算得为

$$\int_\tau^\infty e^{-t\left[p-\frac{a}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]}dt=\frac{e^{-\tau\left[p-\frac{a}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]}}{p-\frac{a}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}.$$

将这个值代入积分(21)中,求得

$$\int_\tau^\infty e^{-pt}J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})d\tau=-\frac{e^{-\tau p}}{a\pi i}\int_{|\zeta|=1} e^{a\tau\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta^2-\frac{2p}{a}\zeta-1}.$$

被积函数在此具有两个极点:$\zeta_{1,2}=\frac{p\pm\sqrt{p^2+a^2}}{a}$,其中一个位于圆 $|\zeta|<1$ 的内部,而另一个位于

其外部,因为 $\zeta_1\zeta_2=-1$. 在条件 $\operatorname{Re} p>0, \operatorname{Re}\sqrt{p^2+a^2}>0$ 下,根 $\zeta_2=\frac{1}{a}(p-\sqrt{p^2+a^2})$ 位于圆的内部,因而按留数定理,最后那个积分等于

$$\int_\tau^\infty e^{-pt}J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})dt=-\frac{e^{-\tau p}}{a\pi i}2\pi i\frac{e^{a\tau\zeta_2}}{2\zeta_2-2\frac{p}{a}}=\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}}{\sqrt{p^2+a^2}},$$

这同公式(19)的值相一致.

用同一方法可得到更一般的结果:对于任一个非负的整数 n,我们都有

$$\eta(t-\tau)(t-\tau)^n\frac{J_n(\sqrt{t^2-\tau^2})}{(t^2-\tau^2)^{\frac{n}{2}}}\doteqdot\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{22}$$

(6) 关于悬链振动的伯努利问题 在1732年丹尼尔·伯努利提出了并且解决了关于垂直悬挂着的重链的振动问题. 假设长度为 l 的均匀的重链 AMB 垂直地悬挂在点 B 处,且在重力的作用下作环绕平衡位置的微小振动. 若用 t 来表示时间,x 表示自点 A 到变动点 M 的链的长度,且用 $u=u(x,t)$ 来表示点 M 对于垂直位置的偏差(图211),则微小振动的方程将具有形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{23}$$

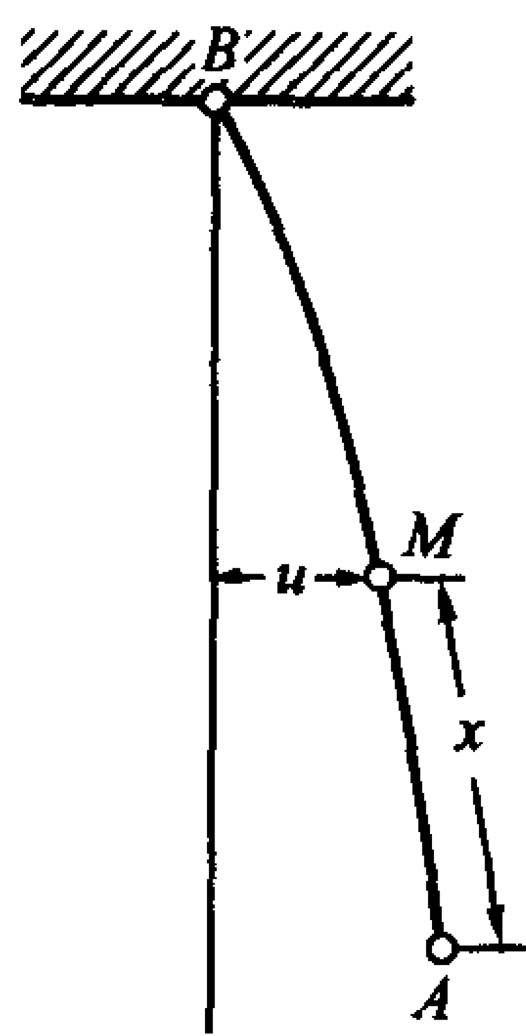


图211

其中 g 是重力加速度. 依照伯努利,我们将用分离变量的方法来解这个方程. 为此,首先来求它的呈两个函数的乘积的形式的特解,其中一个函数只依赖变量 x,而另一个只依赖变量 t

$$u=X(x)T(t).$$

将这代入(23)式中,经简单的变换后就有

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=g\frac{xX''(x)+X'(x)}{X(x)}.$$

由于左端只是一个变量 t 的函数,而右端只是一个变量 x 的函数,故等式仅可能在两端都等于同一常数的情况下成立,我们将用 $-\omega^2$ 表示这个常数*. 于是最后那个方程分解为两个:

$$T''(t)+\omega^2T(t)=0, xX''(x)+X'(x)+\frac{\omega^2}{g}X(x)=0. \tag{24}$$

第一个方程的解具有形式

$$T(t)=A\sin(\omega t+\varphi),$$

其中 A 与 φ 是某两个常数. 而第二个方程具有本目的方程(2)的形式,其中 $a=1, b=0, c=\frac{\omega^2}{g}$, $\alpha=1$. 按(4)式求得 $\mu=2, \nu=0, k=\frac{g}{4\omega^2}$,因此,在我们的情形下,代换(3)具有形式** $x=\frac{g}{4\omega^2}t^2$,或 $t=2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}$,它将这方程变换为指标 λ 等于0的圆柱函数的方程,这是从关系式(6)显然可见的. 因此,(24)的第二个方程的通解具有形式

---

* 这常数应当是负的,因为,假如不然的话,从(24)的第一个方程便可看出,解将没有振动性,而这是同物理情况相背的.

** 因为 $\nu=0$,未知函数的代换是多余的.

$$X(x)=BJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)+CY_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right),$$

其中 B 与 C 都是常数. 从物理的考虑显然有:当 $x\to0$ 时,解应当保持有界,因此 $C=0$,常数 B 可认为等于 1,因为在 T 的表达式中已经有任意因子 A 进入. 于是我们求得方程(23)的特解的形状为

$$u=AJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)\sin(\omega t+\varphi). \tag{25}$$

在此,数量 ω 不可能有任意数值,因为从链悬挂在点 B 处这条件,当 $x=l$ 时,我们求得:对于所有的 t,都有 $u(l,t)=0$. 这只有在

$$J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\right)=0 \tag{26}$$

的情形下才有可能,由此得 $\omega=\omega_k=\frac{\alpha_k}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$,其中 α_k 是零阶的贝塞尔函数的零点.

方程(25)表明:链上所有的点作谐波振动,具有同一的频率 $\omega_k=\frac{\alpha_k}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$,且具有从一点到一点依照规律* $AJ_0\left(2\omega_k\sqrt{\frac{x}{g}}\right)=AJ_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$而改变着的振幅. 系于所考虑的函数 $J_0(x)$的零点 α_k 的不同,这振动的频率以及振动的链的形态也可以不同. 图 212 中表示当 $k=1,2,3$ 时链上的点的振幅的改变规律. 通常,链的振动是具有不同的振幅及原始位相的振动(25)的叠加:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kJ_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin(\omega_kt+\varphi_k). \tag{27}$$

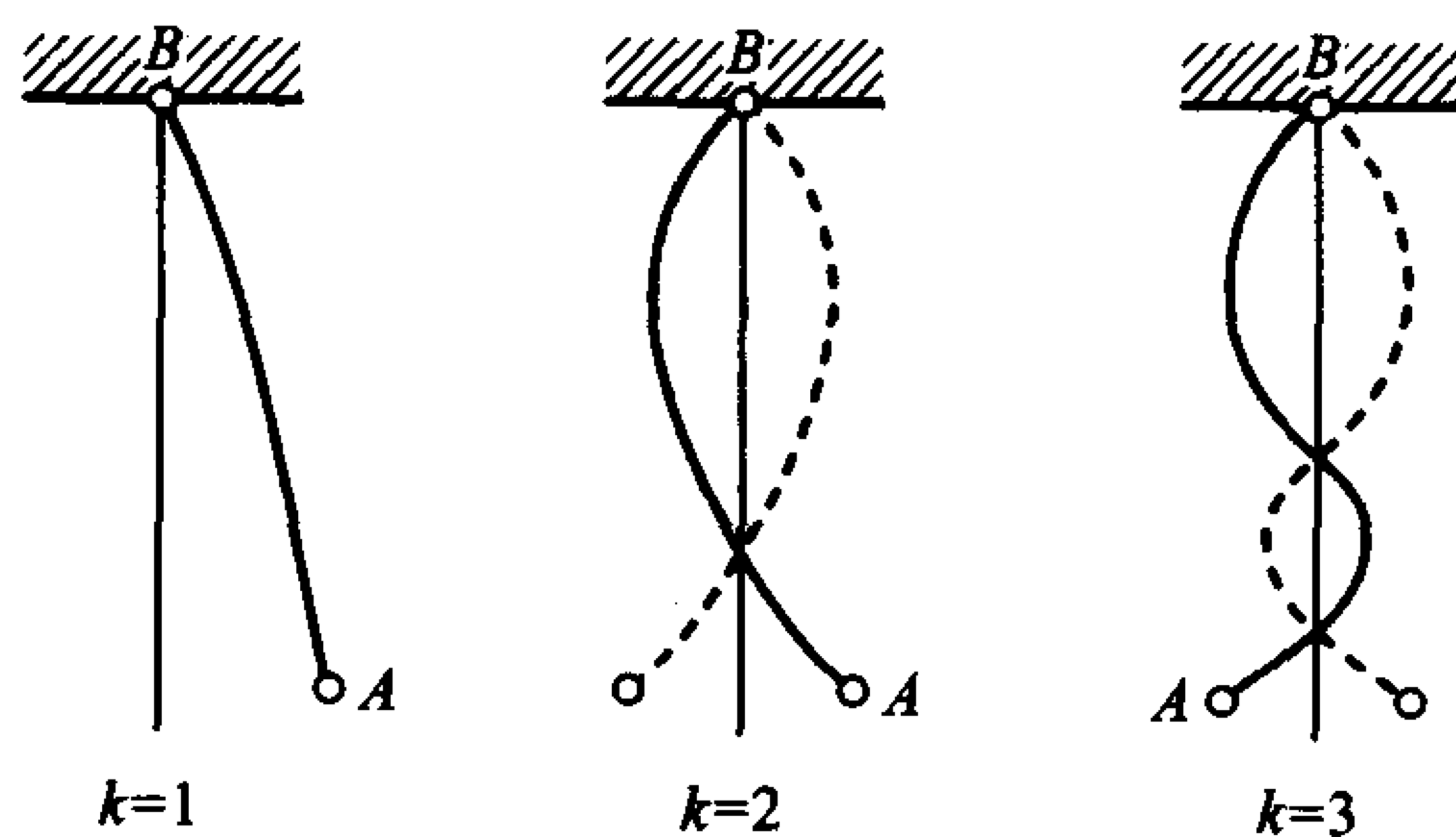


图 212

要确定系数 A_k 与 φ_k,应当给出链上的点的初始的偏差及速度,即是,给出 $u(x,0)=f(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$. 于是将有条件

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kJ_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin\varphi_k,$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\omega_kJ_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cos\varphi_k,$$

* 当 $x=0$ 时函数 $J_0(x)=1$,因此,常数 A 表示链的自由的一端的振动的振幅.

这两个条件在引用记号$\sqrt{\frac{x}{l}}=\tau, f(l\tau^2)=F(\tau), g(l\tau^2)=G(\tau)$后，可重写成广义傅里叶展开式的形式

$$F(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\varphi_kJ_0(\alpha_k\tau), G(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\omega_k\cos\varphi_kJ_0(\alpha_k\tau). \tag{28}$$

从这两个展开式，按第 95 目的公式(38)，可求得所有的系数 A_k 与 φ_k.

在发表于 1732 年的彼得堡科学院论丛中的一篇著作里 D. 伯努利利用级数解出了(24)的第二个方程，得到了条件(26)，并且指出了：链可以有无穷多的形态的摆动线.

(7) 关于圆的薄膜振动的欧拉问题 假设一薄膜* 在张力的作用下起微小的振动，挠度 $u=u(x,y,t)$是薄膜对于平衡状态的偏差. 这函数满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{29}$$

其中 $a^2=\frac{T}{\sigma}$，T 是张力，σ 是曲面密度. 在 1764 年发表的一篇论文里，L. 欧拉讨论了关于圆的薄膜振动的问题. 欧拉从对应于方程(29)的极坐标方程

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{30}$$

出发. 为了要构造方程(30)的特解，欧拉设

$$u=R(r)\sin(\omega t+\gamma)\sin(\lambda\varphi+\delta),$$

其中 $\omega,\lambda,\gamma,\delta$ 都是常数，在代入(30)中后得

$$r^2R''+rR'+\left(\frac{\omega^2}{a^2}r^2-\lambda^2\right)R=0. \tag{31}$$

在把 r 过渡到新变量$\rho=\frac{r\omega}{a}$之后，方程(31)取圆柱函数的方程的普通形式

$$\rho^2R''+\rho R'+(\rho^2-\lambda^2)R=0. \tag{32}$$

从物理学上的考虑显然有：函数对于 φ 而言的周期应当等于 2π，因此 λ 应当是整数. 对于 λ 的这种数值，欧拉给出了方程(31)的级数形式的解**. 由此可见，欧拉得到了方程(31)的下述形式的特解

$$u=AJ_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)\sin(\omega t+\gamma)\sin(n\varphi+\delta). \tag{33}$$

如果薄膜被固定在端点上，则当 $r=r_0$ 时，应当有 $J_n\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)=0$，这里的 r_0 是薄膜的半径. 由此 $\omega=\omega_k^{(n)}=\frac{a}{r_0}\alpha_k^{(n)}$，其中 $\alpha_k^{(n)}$ 是函数$J_n(x)$的第 k 个零点. 欧拉也指出了：薄膜有无穷多种可能有的振动存在.

当 $n=0$ 时，函数 u 同φ 无关：

$$u=A_kJ_0\left(\alpha_k\frac{r}{r_0}\right)\sin(\omega_kt+\gamma_k), \tag{34}$$

也就是说，薄膜上所有与中心有相等距离的点同样地振动着. 薄膜上的点作谐波振动，具有相同的

---

* 由可以自由弯曲与微小延伸的物质所构成的薄片，称做薄膜，例如，鼓膜.

** 在较后的著作中，欧拉也讨论了非整数的 λ 的情形.

频率 $\omega_k=\frac{a\alpha_k}{r_0}$，其振幅 $A_kJ_0\left(\alpha_k\frac{r}{r_0}\right)$ 依赖于该点到中心的距离. 在图 213 中表示了当 $k=0,1,2$ 时薄膜上个别的点的振动振幅的变化规律.

薄膜振动的最一般的形式，可由对于不同的 n 与 k，将所有的振动(33)相加而得到

$$u=\sum_{n,k=0}^{\infty}A_{nk}J_n\left(\alpha_k^{(n)}\frac{r}{r_0}\right)\sin(\omega_k^{(n)}t+\gamma_{nk})\sin(n\varphi+\delta_{nk}).\tag{35}$$

当给定了薄膜的初始位置及偏离值时，利用三角函数系与圆柱函数系的正交性，可求得系数 $A_{nk},\gamma_{nk},\delta_{nk}$.

图 213

(8) 瞬息的圆柱面热源　平行于平面的热流，在垂直于某一固定方向的所有平面(Π)上，温度 u 的分布都是同样的，这种热流可由微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\tag{36}$$

来描述，其中 t 是时间，a 是常系数，x,y 是(Π)中一个平面 Π 上的笛卡儿坐标. 用直接求导数可以验证，函数

$$u=\frac{A}{t}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\tag{37}$$

满足方程(36)，其中 A,ξ 与 η 都是常数. 这时，在平面上异于 $\zeta=\xi+i\eta$ 的任何点 $z=x+iy$ 处，当 $t\to0$ 时函数 $u\to0$，而在点 ζ 处这函数 $\to\infty$. 所以可以说，在物理上(37)表示由于在 $t=0$ 时安置在点 ζ 处的瞬时点热源的作用而在点 z 处所产生的温度.

我们来计算由于当 $t=0$ 时沿圆周 $|\zeta|=\rho$ 均匀地安置着的瞬时点热源的作用，所发生在点 z 处的温度的总和. 我们将认为，安置在这圆周的微小的弧 $\rho d\theta$ 上的热源的效应，等于一个点热源的效应. 于是这些热源的作用所产生的温度，由公式(37)可确定为 *

$$du=\frac{Ad\theta}{t}e^{-\frac{|z-\zeta|^2}{4a^2t}}=\frac{Ad\theta}{t}e^{-\frac{r^2+\rho^2-2\rho r\cos\theta}{4a^2t}},$$

其中我们设 $z=re^{i\varphi},\zeta=\rho e^{i(\theta+\varphi)}$(图 214). 将这表达式对于 θ 自 $-\pi$ 到 π 求积分，便得出所求的总温度

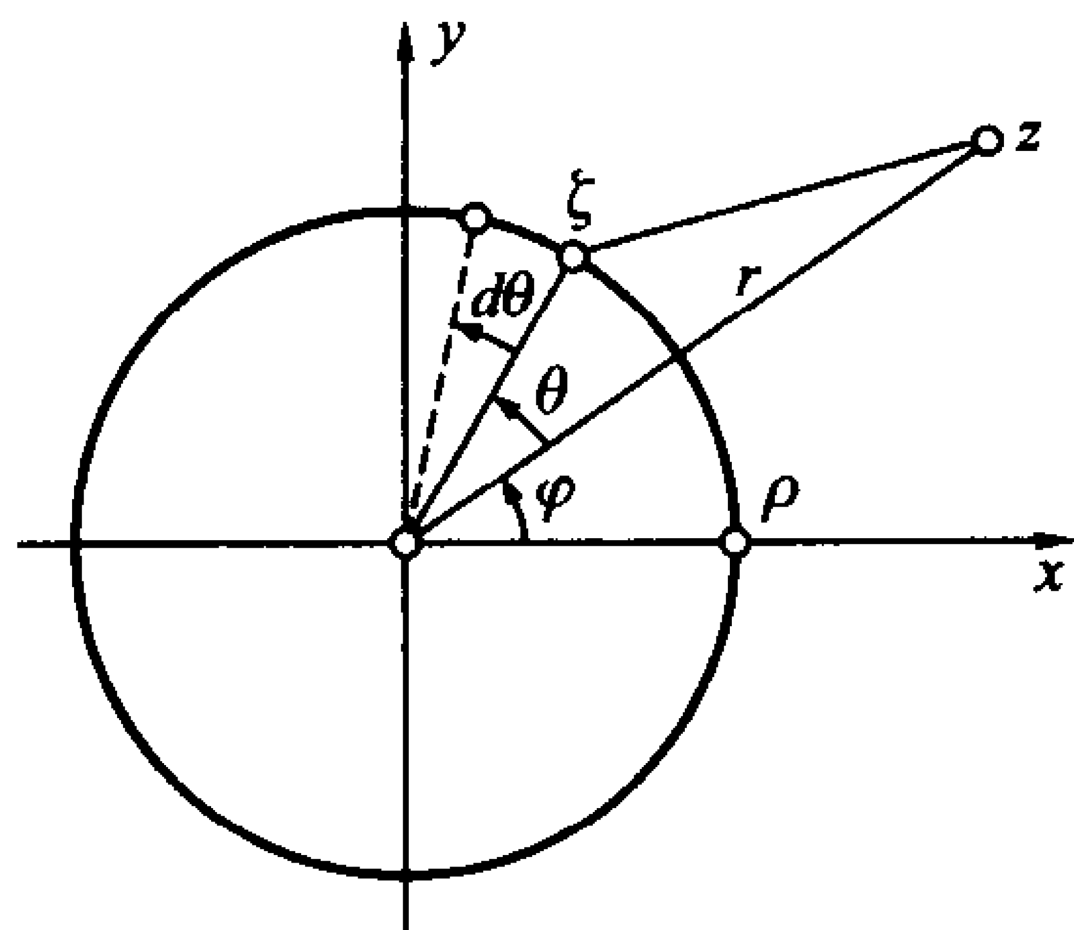


图 214

$$u=\frac{A}{t}e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{\rho r}{2a^2t}\cos\theta}d\theta.$$

在此，函数 $\cos\theta$ 可以用 $\sin\theta$ 来代换，因为这个代换只归结于以 $\theta-\frac{\pi}{2}$ 代换 θ，代替积分限 $-\frac{3}{2}\pi,\frac{\pi}{2}$，可以重新取 $-\pi,\pi$，这不改变积分的数值. 回忆起第 95 目中关于函数 $J_0(z)$ 的贝塞尔的积分表示式(11)，我们便得到 u 的表达式，其形状为

$$u=\frac{2\pi A}{t}e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}}I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right).\tag{38}$$

* 我们写 du 与 $Ad\theta$ 来替代 u 与 A，为的是强调指出我们的这些量仅与微小的弧 $\rho d\theta$ 有关.

为了阐明常数 A 的物理意义，我们来计算，为了要在平面 z 中得到我们的温度分布，所必需的总热量. 如果用 c 表示比热，σ 表示物质的面密度，则在面积单元 $rdrd\varphi$ 上的热量将是 $dQ = c\sigma u r dr d\varphi$，因而在整个平面上，

$$Q = c\sigma\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\infty} urdr = \frac{2\pi Ac\sigma}{t}e^{-\frac{\rho^2}{4a^2t}}2\pi\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right)rdr.$$

考虑到本目中的韦伯积分(13)(在我们考虑的情形下，其中的 n,a 及 b^2 分别等于 $0, \frac{\rho i}{2a^2t}$ 和 $\frac{1}{4a^2t}$)，便求得

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right)rdr = 2a^2te^{\frac{\rho^2}{4a^2t}}.$$

于是 $Q = 8\pi^2 Ac\sigma a^2$，因而 u 的表达式的最后的形式为

$$u = \frac{Q}{4\pi a^2 c\sigma t}e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}}I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right). \tag{39}$$

从平面的热场转变到空间的平行于平面的热场，可以认为：公式(39)给出了由 $t=0$ 时均匀地安置在某一个柱面上的瞬间热源(柱面热源)的作用所发生的温度的表达式. 这时，Q 表示聚积在宽度为 1 且垂直于柱面的轴的带形上的总热量.

(9) 在圆柱面上热的传导问题 假设在半径为 ρ 的圆柱面上，保持温度等于 $u_0\cos\omega t$. 在圆柱内部的初始温度等于零的条件下，求温度的分布.

由于问题具有轴的对称性，自然地要变到圆柱坐标 r,φ,z. 但由于在这里 u 同 z 无关，也同 φ 无关，故热的传导方程具有形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{dr}\right), \tag{40}$$

再者，始值条件与边值条件是 $u|_{t=0} = 0, u|_{r=\rho} = u_0\cos\omega t$. 我们将用算子法来解这个问题. 过渡到按照变量 t 的拉普拉斯变换得到算子方程

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{p}{a^2}U = 0,$$

并且应当在条件

$$U|_{r=\rho} = \frac{pu_0}{p^2+\omega^2}$$

下来解它. 按照第 95 目的公式(32)与第 96 目的公式(20)，算子方程的通解是

$$U = AJ_0\left(\frac{\sqrt{p}}{a}ir\right) + BY\left(\frac{\sqrt{p}}{a}ir\right)$$

(这里 $\lambda = 0, \alpha = \frac{\sqrt{p}}{a}i$)，并且，由于当 $r\to 0$ 时 U 应当是有界的，故 $B=0$，和

$$U = AI_0\left(\frac{\sqrt{p}}{a}r\right).$$

代入边值条件，求得 $AI_0(\frac{\sqrt{p}}{a}\rho) = \frac{pu_0}{p^2+\omega^2}$，因而算子解具有形式

$$U = u_0\frac{I_0\left(r\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{I_0\left(\rho\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}\frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{41}$$

函数 $U(p)$具有无穷多个极点,其中有两个是纯虚的:$p=\pm i\omega$,而其余的则都是负的:$p_k=-\left(\frac{a\alpha_k}{\rho}\right)^2$ $(k=0,1,2,\cdots)$,α_k 是$J_0(x)$的零点.依照第 82 目的第一展开定理,像原函数可作为函数 $U(p)e^{pt}$在它的所有的极点处的留数之和而求得,即,

$$u(r,t)=u_0\left\{\mathrm{Re}\frac{I_0\left(r\frac{\sqrt{\omega}}{a}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}{I_0\left(\rho\frac{\sqrt{\omega}}{a}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}e^{i\omega t}+2a^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{r}{\rho}\alpha_k\right)}{J'_0(\alpha_k)}\frac{\alpha_k^3e^{-\left(\frac{a\alpha_k}{\rho}\right)^2t}}{a^4\alpha_k^4+\rho^4\omega^2}\right\},$$

其中极点 $p=\pm i\omega$ 给出第一项,而和式是关于那些极点 $p_k=-\left(\frac{a\alpha_k}{\rho}\right)^2$ 的.如果依照第 96 目的公式(34)来替代函数

$$I_0(e^{i\frac{\pi}{4}}x)=I_0(x\sqrt{i})=\mathrm{ber}\,x+i\,\mathrm{bei}\,x,$$

并且为简单起见,记$\frac{\sqrt{\omega}}{a}=\lambda$,$\frac{\alpha_k}{\rho}=\beta_k$,则最后那个公式可重写成下述的最终的形式

$$\begin{aligned}u(r,t)=u_0\ \Bigg\{&\frac{\mathrm{ber}\,\lambda r\ \mathrm{ber}\,\lambda\rho+\mathrm{bei}\,\lambda r\ \mathrm{bei}\,\lambda\rho}{\mathrm{ber}^2\,\lambda\rho+\mathrm{bei}^2\,\lambda\rho}\cos\omega t\\&+\frac{\mathrm{ber}\,\lambda r\ \mathrm{bei}\,\lambda\rho-\mathrm{bei}\,\lambda r\ \mathrm{ber}\,\lambda\rho}{\mathrm{ber}^2\,\lambda\rho+\mathrm{bei}^2\,\lambda\rho}\sin\omega t\\&+\frac{2a^4}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-a^2\beta_k^2t}\frac{J_0(r\beta_k)}{J'_0(\rho\beta_k)}\frac{\beta_k^3}{a^4\beta_k^4+\omega^2}\Bigg\}\end{aligned}\tag{42}$$

§4 椭圆函数

在这一节里,我们将讨论椭圆积分及椭圆函数的性质.在第 39 目中,当讨论把矩形映到半平面上的共形映射的问题时,我们已经遇到过一种椭圆积分以及它的反函数 sn 了.在刚体动力学,空气动力学,电工学,弹性理论等的许多问题中,都会遇到椭圆函数.

在 18 世纪末期,椭圆积分早已由勒让德研究过,在 19 世纪,经最卓越的数学家们(阿贝尔,雅可比,刘维尔,魏尔斯特拉斯)的共同努力,椭圆函数的理论已基本上被建立了.

我们将从叙述亚纯的周期函数的一般性质开始,在这种亚纯的周期函数之中,特别,也包含有椭圆函数这一类.

100. 周期函数 如果函数 $f(z)$对于在它的定义域内的所有的值 z,都满足函数方程

$$f(z+T)=f(z),\tag{1}$$

则就称 $f(z)$是**周期函数**,其中 $T\neq0$ 是某一常数,称做函数的**周期***.

周期函数必然地具有无穷多个周期.实际上,我们有

* 因此,周期函数的定义域在含有任一个点 z 的同时也应当含有点$z+T$.

定理 1 假若 $T_1, T_2, \cdots, T_k (k \geqslant 1)$ 是函数 $f(z)$ 的周期,则它们的具有整系数(负的,零的或正的)的任一线性组合

$$T = n_1 T_1 + n_2 T_2 + \cdots + n_k T_k,$$

也是这个函数的周期.

事实上,对于非负的 n_ν,论断显然成立,因为重复地加周期于变元,并不改变函数的值.要证明它对于负值的 n_ν 也正确,只需证明:当 T_ν 是函数 $f(z)$ 的周期时,$-T_\nu$ 也是它的周期便够了.但是,实际上,对于任一个 z,由于方程(1)都有

$$f(z - T_\nu) = f[(z - T_\nu) + T_\nu] = f(z),$$

而这就意味着,$-T_\nu$ 也是 $f(z)$ 的周期.

在所有的后面的叙述中,我们将认为函数 $f(z)$ 是单值的并且是亚纯的.我们特别标出单值性这条件,为的是强调:所叙述的理论,对于多值的解析函数来说并不成立.为了叙述直观起见,我们将用平面 z 上的点来表示 $f(z)$ 的周期.我们来说明周期点集的结构.首先证明一条引理.

引理 亚纯函数 $f(z) \neq \text{const}$ 的周期点集,不可能含有任何一个收敛到平面上有限点的序列.

实际上,假设有一个收敛到有限点 T 的周期序列 T_ν 存在,并且设 z_0 是 $f(z)$ 的任意正则点.按定理 1,收敛到零的序列 $\widetilde{T}_\nu = T_{\nu+1} - T_\nu$,也是 $f(z)$ 的周期的一个序列.这样一来,对于任何 $\nu = 1, 2, \cdots$,便都有

$$f(z_0 + \widetilde{T}_\nu) = f(z_0).$$

但点列 $z_\nu = z_0 + \widetilde{T}_\nu$ 收敛到 z_0,且在这点列上 $f(z)$ 取同一的值.于是按唯一性定理便将推得 $f(z) \equiv \text{const}$,而这是同定理的条件相矛盾的.

周期点集的全部性征可由下述定理给出:

定理 2(阿贝尔) 亚纯函数 $f(z)$ 最多可有两个线性无关的周期.换言之,有两个周期 τ 与 τ' 存在,使得 $f(z)$ 的任一周期 T 都具有形式

$$T = n\tau + n'\tau' \tag{2}$$

其中 n 与 n' 都是整数.

我们把证明分为两部分:

1)设在某一条经过原点的直线 L 上有 $f(z)$ 的一个周期 T^0.要证明:这时 $f(z)$ 的所有位于直线 L 上的周期集合,具有形式

$$T = n\tau, \tag{3}$$

其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,而 τ 是某一个复数.实际上,在直线 L 的线段 OT^0 上,按引理只可能有 $f(z)$ 的有限多个的周期(假如不然的话,在 L 上就将存在一个收敛到有限点的周期序列了).所以在 OT^0 上有模最小的一个 $f(z)$ 的周期存在,用 τ 来表示这周期,我们将证明:位于 L 上的 $f(z)$ 的任一周期都具有形式(3).假若不然,设 L

上有位于某两点 $n\tau$ 与 $(n+1)\tau$ 之间的一个周期 $\widetilde{T}$ 存在,则 $\widetilde{T}$ 可表为形式 $\widetilde{T}=(n+\vartheta)\tau$,其中 $0<\vartheta<1$,因而按定理 1 知道,$\widetilde{\tau}=\vartheta\tau$ 也是 $f(z)$ 的周期.但这个周期应位于线段 $O\tau$ 上,而按照我们的构造法,在这线段 $O\tau$ 上不可能有 $f(z)$ 的周期.这矛盾就证明了所作的论断.

2) 假定除了周期(3)之外,$f(z)$ 还具有别的周期,于是这些周期便都不在直线 L 上.按照引理,有以点 $z=0$ 为中心而不包含有这种周期(位于 L 上的那些周期不在考虑之列)的一个最大圆存在.按同一引理,在这个圆的圆周上只可能有有限多个的周期,因此,有这样的一个周期存在,当从 L 的正方向依逆时针方向旋转时,它最近于 L,这个周期我们就用 τ' 来表示(图 215).我们将证明:$f(z)$ 的任一周期都具有形式(2).为此,假定不然,设有形如

$$\widetilde{T}=(n+\vartheta)\tau+(n'+\vartheta')\tau'$$

的周期存在,其中 n 与 n' 是某两个整数,且 $0\leqslant\vartheta\leqslant1$, $0\leqslant\vartheta'\leqslant1$,再者 ϑ 与 ϑ' 不是两个(等于 0 或 1)整数.按定理 1,这时

图 215

$$\widetilde{\tau}=\vartheta\tau+\vartheta'\tau'$$

也是 $f(z)$ 的周期.但这个周期位于具有顶点 $0,\tau,\tau',\tau+\tau'$ 的平行四边形内,而不同它的任何顶点重合.按照我们的构造法,这个周期不可能位于平行四边形内的在图 215 中加上斜线的那部分上,即是,它不可能位于三角形 $O\tau\tau'$ 内.因此,它位于另一部分内,但这时点 $\widetilde{\tau}'=\tau+\tau'-\widetilde{\tau}$ 也是 $f(z)$ 的周期,却位于三角形 $O\tau\tau'$ 内,并且不同这三角形的任何顶点重合.这同我们的构造法矛盾,因为在这三角形内没有 $f(z)$ 的周期.定理于是便证明了.

在已证明的这定理中的所参加的那两个数 τ 与 τ'($-\tau$ 与 $-\tau'$ 也是一样),称做函数 $f(z)$ 的**基本周期**.从这定理推得:所有的亚纯函数可分为三类:

1) **非周期函数** 对于它们来说,两个基本周期都等于 0:

$$\tau=\tau'=0.$$

2) **单周期函数** 对于它们来说,一个基本周期(例如 τ')等于 0,而另一个则异于 0.按定理 2,单周期函数的所有周期都是基本周期 τ 的整倍数,初等函数 e^z(基本周期 $\tau=\pm2\pi i$),$\sin z$,$\cos z$(基本周期 $\tau=\pm2\pi$),$\tan z$,$\cot z$(基本周期 $\tau=\pm\pi$)等都是这种函数的例子.

3) **双周期函数** 对于它们来说,两个基本周期 τ 与 τ' 都异于 0.按定理 2,这时

比值$\frac{\tau'}{\tau}$不可能是个实数，且函数的所有的周期都具有形式

$$T = n\tau + n'\tau' \quad (n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

双周期的亚纯函数就称做**椭圆函数**.

椭圆函数的基本性质将于本节的后面几目中来专门讲. 在此，我们将举出一系列与任何(单的或双的)周期函数有关的命题.

用 τ 表示函数$f(z)$的基本周期，且通过位于直线 L 上的每一个点 $n\tau$ ($n=0$, $\pm 1, \pm 2, \cdots$)，都作一条平行于异于 L 的方向的某一个方向的直线. 这时，整个平面被区分为宽度相同的一些带形，这种带形称做**周期带**. 显然，$f(z)$在某一周期带中所取的全部函数值，在邻接的带形中都周期地重复. 因此，只需在这些带形中的某一个上研究周期函数就足够了.

用 G 表示由辅助平面ζ中去掉两点$\zeta=0$ 与 $\zeta=\infty$而得到的那个二阶连通区域，在这区域内考虑多值函数

$$z = \frac{\tau}{2\pi i}\mathrm{Ln}\ \zeta. \tag{4}$$

函数(4)在某一点 ζ 处所取的那些函数值，彼此仅相异一个差数，而且这差数是 τ 的整倍数，所以复合函数

$$f\left(\frac{\tau}{2\pi i}\mathrm{Ln}\ \zeta\right) = \varphi(\zeta) \tag{5}$$

在区域 G 内是单值的. 在每一个点 ζ 处，若这点的那些对应点 z 是f 的正则点，则这函数显然是解析的，而在对应于 f 的极点的那些点处，这函数也具有极点*. 将(4)的反函数

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\tau}z} = e^{i\omega z} \tag{6}$$

代入(5)中，这里 $\omega=\frac{2\pi}{\tau}$是函数$f(z)$的“频率”，我们得到 $f(z)$的形如

$$f(z) = \varphi(e^{i\omega z}) \tag{7}$$

的表示式. 从这个表示式，我们就得到一些关于周期函数的定理.

定理 3 在每一个由平行于周期直线 L 的两条直线L'与 L''所围成的带形内(图 216)，若这带形不包含有 $f(z)$的奇点，则这函数可表为傅里叶级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega z}. \tag{8}$$

实际上，在平面 z 上的直线L'与L''上，分别有

$$z = z' + t\tau, z = z'' + t\tau$$

(z'与 z''分别是L'与L''上的固定点，t 是实参数，自 $-\infty$变到 $+\infty$). 根据(6)，它们在

* 为了证明这个，只需讨论函数(4)在这点的邻域内的一个单值的分支，且利用关于复合函数的解析性的定理便够了.

平面 ζ 上对应着中心在点 $\zeta=0$ 处且半径为 $r'=|e^{iz'\omega}|$ 与 $r''=|e^{iz''\omega}|$ 的两个同心圆周

$$\zeta=e^{iz'\omega}e^{2\pi it},\zeta=e^{iz''\omega}e^{2\pi it}.$$

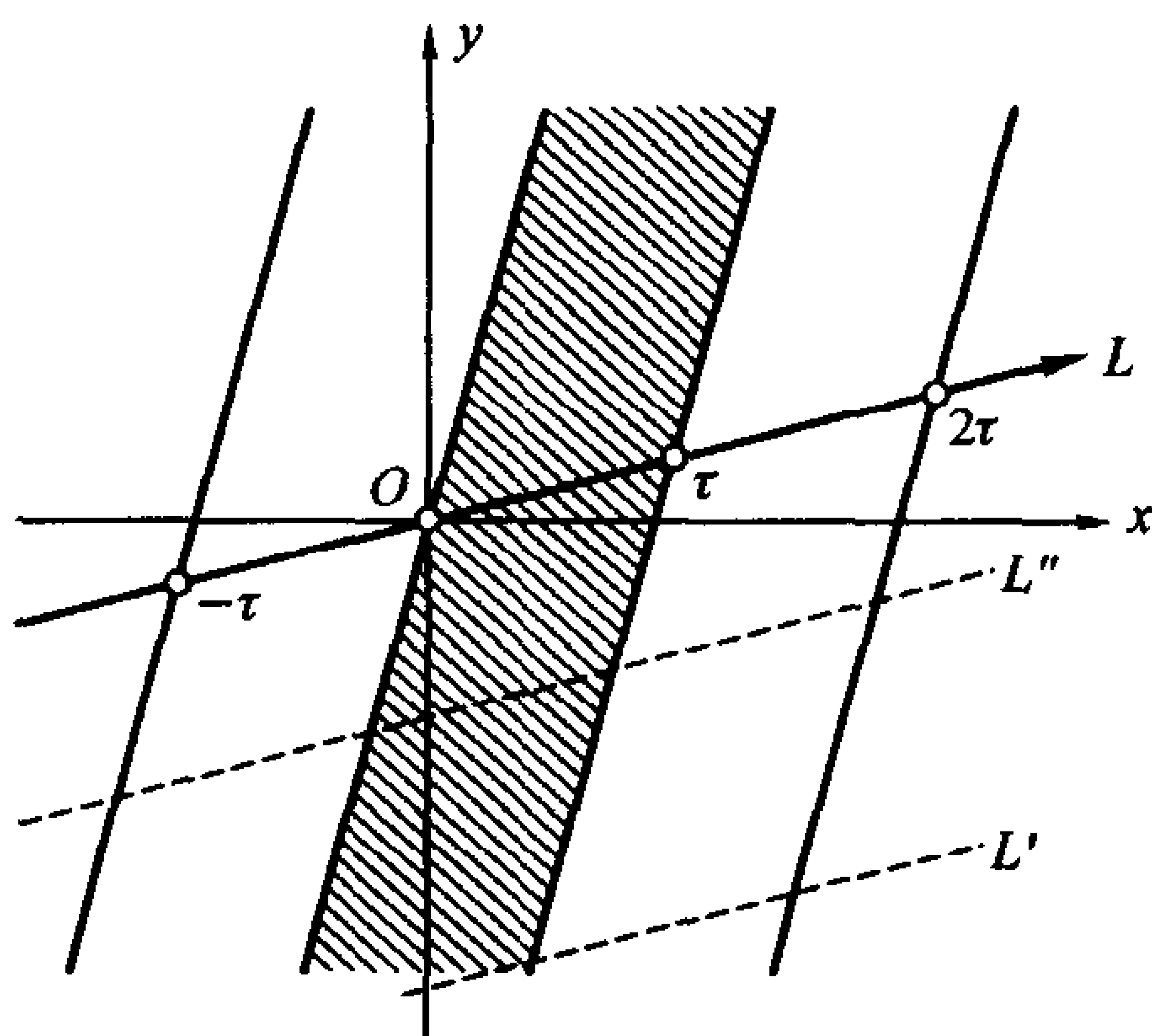


图 216

在位于这两个圆周之间的那个环形内，函数 $\varphi(\zeta)$ 是解析的，因此，可表为洛朗级数

$$\varphi(\zeta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\zeta^k.$$

将 $\zeta=e^{i\omega z}$ 代入此处，且利用公式(7)，我们便得出所求的展开式(8).

特别，由此得到

定理 4 周期整函数 $f(z)$ 可表为对于所有的 z 值都收敛的傅里叶级数(8).

其次，我们指出下列简单的定理：

定理 5 若一个周期整函数在一周期带内是有界的，则这函数是个常数.

这可由刘维尔定理立刻推得.因为从函数在一个周期带内的有界性，可推知它在整个平面上都是有界的.

定理 6 若一个周期整函数 $f(z)$ 当 z 趋于周期带的两端时，趋于有限极限或无穷大的极根*，则它是一个三角多项式

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ik\omega z}. \tag{9}$$

实际上，在我们的条件下，点 $\zeta=0$ 与 $\zeta=\infty$ 至多仅能是函数 $\varphi(\zeta)$ 的极点，因此展开式(8)只可能含有有限多个异于零的项.

下面的更一般的定理也成立：

定理 7 若亚纯的周期函数 $f(z)$ 当 z 趋于周期带的两端点时趋于有限极限或无穷大的极限，则它是两个三角多项式的比.

101. 椭圆函数的一般性质 假设 $f(z)$ 是任意一个椭圆函数，即一个双周期的亚纯函数，具有基本周期 τ 与 τ'. $f(z)$ 的所有周期所成的点集具有形式

$$T=n\tau+n'\tau'(n,n'=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{1}$$

我们约定，任何两点 z_1 与 z_2，若它们的差数为某一个周期：$z_1-z_2=T$，就称做**同余的**并将其写成形式

$$z_1\equiv z_2(\mathrm{mod}\ \tau,\tau') \tag{2}$$

(读为"z_1 按模 τ 及 τ' 等同于 z_2"). 点集 M_1(在已知 T 下)，与由所有与 M_1 的点同余的点所组成的点集 M_2(在已知 T 下)，我们也称做**同余的**.

---

* 按定理 5，若 $f(z)\neq\mathrm{const}$，则这两个极限不可能都是有限的.

比值$\frac{\tau'}{\tau}$不可能是个实数(参看前一目),因此点 $O,\tau,\tau+\tau'$与τ'构成一个非退化的平行四边形(图 217.)这个平行四边形以及所有的与它同余的平行四边形,我们将称为**周期平行四边形**.为具体起见,我们将假定:顶点 $O,\tau,\tau+\tau',\tau'$依照平行四边形的周界的正向的绕行顺序来排列.为此,显然只需假定

$$\operatorname{Im}\frac{\tau'}{\tau}>0.$$

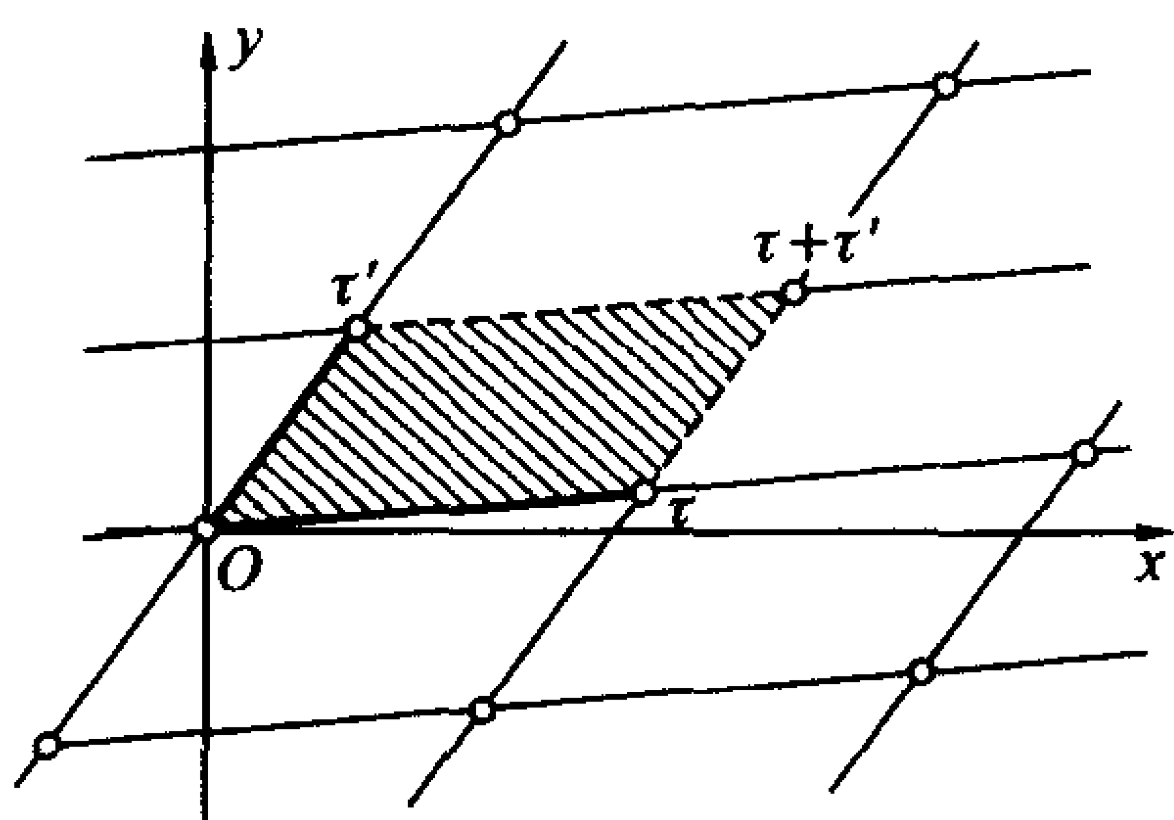


图 217

此外,我们还约定,把边 $O\tau$、$O\tau'$除去顶点τ及τ'后算入这平行四边形内,而周界上的其余部分则不算入,并且对于所有的同余的平行四边形都这样做.于是周期平行四边形将不含有任何一对同余点,且对于平面上的每一个点z,都可在任一平行四边形内求得同余于它的点.

我们来列举椭圆函数的基本性质:

定理 1 具有相同的周期 τ 与 τ'的两个椭圆函数的和,差,积,商,或更一般地,这样一些椭圆函数的任一个有理组合 $R(f_1,\cdots,f_n)$,仍都是具有周期 τ 与 τ'的椭圆函数.对于椭圆函数的导数来说,这也成立.

这个定理的证明,可从函数的亚纯性与周期性对于所说的运算都不被破坏而推得.

定理 2(刘维尔) 若一个双周期函数是整函数,则它是个常数.

实际上,我们的函数在周期平行四边形内应当是有界的,因而它在整个平面上也是有界的,因此是个常数.

由此可见,在周期平行四边形(照前面所说的加以补充后)内,应当至少有 $f(z)$的一个极点.由于 $f(z)$是亚纯函数,属于周期平行四边形内的极点的总数应当是有限的,这个数目(其中每一个极点都按照它的重数重复计算)称做椭圆函数的**阶**.

定理 3(刘维尔) 椭圆函数 $f(z)$在其属于周期平行四边形的所有极点处的留数之和,等于零.

要证明这定理,只需说明:沿着包含所有属于周期平行四边形的极点.而且只含有这些极点的任何闭周线 C 的积分等于 0.若在平行四边形的周界上没有极点,则即可取这周界作为 C.假如不然的话,我们就把平行四边形的周界作将顶点 0 变到 z_0的平行移动,如图 218 中所示,再取如此得到的周界作为 C(在这图中,极点用星号标出,记住,用点线表示的边不属于平行四边形内).我们有

$$\int_C f(z)dz=\int_{\mathrm{I}}+\int_{\mathrm{II}}+\int_{\mathrm{III}}+\int_{\mathrm{IV}},\tag{3}$$

而在第一个积分与第三个积分中,对应于同余点的积分元 $f(z)dz$ 只相差一个符号,

因为函数 $f(z)$ 在同余点处的值相等,而 dz 相差一个符号,所以第一个积分与第三个积分之和为0.对于第二个积分与第四个积分之和来说,也有同样的情形.定理得证.

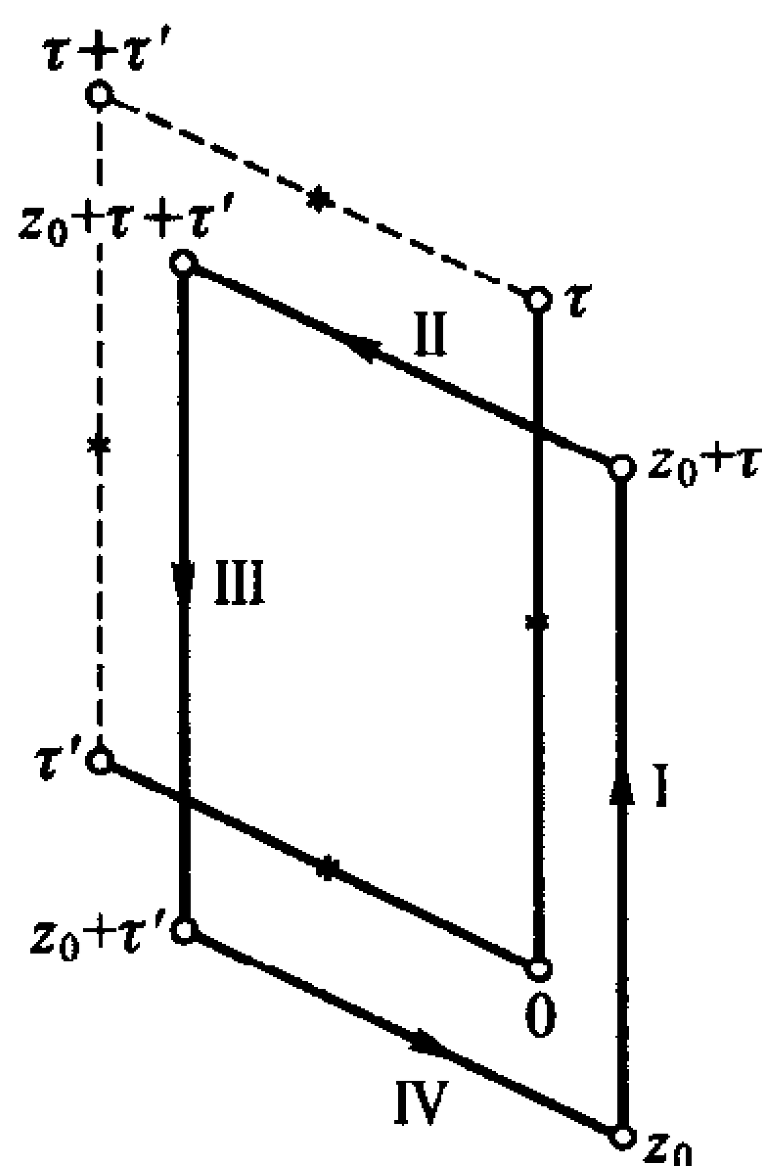


图 218

作为推论,我们可以指出:*不存在一阶的椭圆函数*.实际上,按照定义,这样的函数在周期平行四边形内应当有一个一阶极点,而因此积分(3)就将异于0了.从定理2也可以推出:*不存在零阶的椭圆函数*.

定理 4(刘维尔) *椭圆函数在周期平行四边形内取每一复数值 a 的次数* 都相同,等于这椭圆函数的阶数.*

对于 $a=\infty$,这论断立即可从椭圆函数的阶数的定义推得.对于 $a\neq\infty$,我们回忆起按照第23目中的辐角原理,在周期平行四边形内,a 值点的个数与函数 $f(z)$ 的极点个数之差等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)dz}{f(z)-a},\tag{4}$$

其中 C 是前一定理中所引用的周线(只是还应当假定:它不经过函数 $f(z)$ 的 a 值点).按定理1,函数 $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ 是与 $f(z)$ 具有相同的周期 τ 与 τ' 的椭圆函数,所以按定理3积分(4)等于0,而这就证明了论断.

定理 5 *在周期平行四边形内,所有使 $f(z)$ 取任一个固定值 a 的那些点 z 的和,同余于周期平行四边形内所有极点的和.*

对于 $a=\infty$,这论断显然成立.对于 $a\neq\infty$,在周期平行四边形内,所有的 a 值点之和与所有极点之和的差等于(第23目)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz,\tag{5}$$

其中 C 是定理4中所用的周线.我们设

$$\int_C z\frac{f'(z)dz}{f(z)-a}=\int_{\text{I}}+\int_{\text{II}}+\int_{\text{III}}+\int_{\text{IV}}$$

(图218),如果证得第一个积分与第三个积分之和,以及第二个积分与第四个积分之和,都等于 $f(z)$ 的某一个周期,则这就证明了定理.而实际上,假设 z 与 ζ 分别是线段Ⅰ与Ⅲ上的变动点,则可以设 $\zeta=z+\tau'$,因而由于 τ' 是函数 $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ 的周期,且沿线段Ⅰ的积分与沿线段Ⅲ的积分方向相反,故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\text{I}}z\frac{f'(z)dz}{f(z)-a}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\text{III}}\zeta\frac{f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta)-a}$$

* 每一个使得 $f(z)=a$ 的点 z,都按照这个点的重数而重复计算若干次.

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{I}}(z-\zeta)\frac{f'(z)dz}{f(z)-a} = -\frac{\tau'}{2\pi i}\mathrm{Ln}\frac{f(z_0+\tau)-a}{f(z_0)-a} = \tau' n',$$

其中 n' 是个整数(τ 是 $f(z)$ 的周期,因此在记号 Ln 后的分数等于 1,而它的对数值可认为等于 $-2\pi n' i$).完全类似地得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{II}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{IV}} = n\tau,$$

其中 n 也是个整数.这样一来,积分(5)便等于 $n\tau + n'\tau' = T$,因而定理就证明了.

定理 6　*在任何两个具有相同的周期 τ 与 τ' 的椭圆函数 $f(z)$ 同 $g(z)$ 之间,都有形如*

$$P[f(z),g(z)] = 0 \tag{6}$$

的代数关系式存在,其中 $P(Z,W)$ 是 Z 与 W 的一个具有常数系数的多项式.

实际上,用 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 表示周期平行四边形内所有的这样的点,在这些点处函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 中有一个或两个同时具有极点.设 p_k 是这两个函数在点 a_k 处的极点的阶数中最大的那个阶数,并设 $p = p_1 + \cdots + p_m$.另一方面,设 $Q(Z,W)$ 是变元 Z 与 W 的某一个 n 次多项式.若将 $Z = f(z)$ 与 $W = g(z)$ 代入其中,则按定理 1,我们得到某一个与给定的那个函数具有相同的周期 τ 及 τ' 的椭圆函数 $F(z)$.我们来证明:可以适当地选取多项式 Q,使这函数变为恒等于常数 C,那时定理便就证明了,因为可取 $Q-C$ 来作为(6)式中的多项式 P.

函数 $F(z)$ 只可能在点 a_k(以及同余于它们的点)处具有极点,因而要使它为常数,由定理 2,只要在所有这些点 a_k 处它的主要部分都等于 0 便够了.而对于 $F(z)$ 来说,点 a_k 是阶数不高于 np_k 的极点,因此,在所有的点 a_k 处 $F(z)$ 的主要部分都等于 0 的条件,可化为不多于 $n(p_1+\cdots+p_m) = np$ 个方程,且这些方程对于多项式 Q 的系数而言都是线性的与齐次的.多项式 Q 总共有 $\frac{(n+3)n}{2}$ 个系数(我们不计入常数项),因此,选取 $n+3>2p$,我们就有:系数的个数多于方程的个数.于是方程组至少有一组异于 0 的解,因而由这组解出的系数所确定的多项式 Q 将是所要求的.定理得证.

由于导数 $f'(z)$ 是与 $f(z)$ 具有相同的周期的椭圆函数,所以从定理 6 便可直接推得.

定理 7　*任一椭圆函数 $f(z)$ 都满足如下形式的代数微分方程*

$$P[f(z),f'(z)] = 0, \tag{7}$$

其中 $P(Z,W)$ 是个关于自己自变量的多项式.

作为例子,我们用在周期平行四边形内具有两个单极点的二阶椭圆函数,来说明所证明了的定理(具有一个二阶极点的椭圆函数,我们将在第 103 目中来讨论).

二阶椭圆函数在椭圆函数的理论中起很重要的作用,因为可以证明:任一椭圆函数都可用二阶椭圆函数及它的导数有理形式地表示(证明从略).用 a_1 与 a_2 来表示

二阶椭圆函数 $f(z)$ 的极点,我们可假定 $a_1+a_2=0$ 而不失其一般性,因为,通过移动平面 z(以 $z+c$ 替代变元 z),总可以使坐标原点落在线段 a_1a_2 的中点.作为周期平行四边形,我们可取中心在点 $z=0$ 处的平行四边形.点 a_1 与 a_2 不可能位于这平行四边形的周界上,因为这时它们应当位于对边上,而这是不可能的(平行四边形只含有每对对边中的一边).按定理 4,函数 $f(z)$ 在周期平行四边形内取任一个值两次,正是,在两个点 z_1 与 z_2 处,按定理 5,点 z_1 与 z_2 的和与极点之和同余,即零:

$$z_1+z_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,\tau,\tau').$$

但是由于位于周期平行四边形内的两个点之和,不可能与 0 同余而不等于 0 的,故 $z_1+z_2=0$.换言之,对于任何一个 z,关系式 $f(-z)=f(z)$ 都成立,亦即,$f(z)$ 是个偶函数.

由此推得:我们的函数的导数是个奇函数:$f'(-z)=-f'(z)$,并且由于 $f'(z)$ 在周期平行四边形内,除了在点 a_1 与 a_2 处具有二阶极点外,处处都是正则的,故它是个四阶的椭圆函数.由于 $f'(z)$ 是奇函数,并且 $f'(z)$ 在点 $z=0$ 处是连续的,可以推知:它在 $z=0$ 处等于 0.再者,我们有

$$f'\left(\frac{\tau}{2}\right)=-f'\left(-\frac{\tau}{2}\right)=-f'\left(-\frac{\tau}{2}+\tau\right)=-f'\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

由此显然 $z=\frac{\tau}{2}$ 也是 $f'(z)$ 的零点.类似地,还可以找到 $f'(z)$ 的两个零点:$z=\frac{\tau'}{2}$ 与 $\frac{\tau+\tau'}{2}$.这样一来,我们便知道了它在周期平行四边形内的所有四个零点.

按定理 7,在 $f(z)$ 与 $f'(z)$ 之间存在有代数关系式:

$$P[f(z),f'(z)]=0. \tag{7}$$

设 $f(z)=Z$,$f'(z)=W$,我们可以说出下列的论断:a)对应于每一个 Z 的值,方程(7)有两个 W 的值;b)这两个值只有符号的差别;c)对应于 W 的每一个值有四个 Z 值;d)函数 Z 与 W 同时趋于无穷大.

实际上,要验证 a)与 b),我们只需注意:由于 $Z=f(z)$ 是二阶的偶函数,故对应于每一个 Z 的值有两个只有符号不同的 z 的值,而由于 $W=f'(z)$ 是奇函数,故所对应的 W 的值也只有符号的不同.论断 c)可同 a)一样地来验证;论断 d)是成立的,因为 $f(z)$ 与 $f'(z)$ 的极点相重合.

从 a)与 c)可推知(7)的左端多项式具有形式

$$P[Z,W]=A_0(Z)W^2+A_1(Z)W+A_2(Z),$$

其中 $A_k(z)$ 是次数不高于 4 的多项式,从 b)可推断 $A_1(Z)\equiv 0$,最后,从 d)可推知 $A_0(Z)=\mathrm{const}$(假如不然的话,则从(7)所化成的方程 $W^2=-\frac{A_2}{A_0}$,可以推知:在使 $A_0(Z)$ 等于 0 的那些点 z 处,一定有 $W=\infty$).

这样一来,方程(7)可归结为形式 $W^2=cA_2(Z)$,其中 c 是某一常数,而 A_2 是个

四次多项式. 由于 $A_2(Z)$的零点与 W 的零点相重合,而这些零点是我们所已知的,故最后得到微分方程为如下形式:

$$[f'(z)]^2 = c\{f(z)-f(0)\}\left\{f(z)-f\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\}\left\{f(z)-f\left(\frac{\tau'}{2}\right)\right\}$$
$$\left\{f(z)-f\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right)\right\}. \tag{8}$$

换言之,所得到的结果可表述为:函数 $Z=f(z)$是积分

$$z=\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{\sqrt{c(w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)(w-w_4)}} \tag{9}$$

的反函数,其中 c 与 w_0 是常数,且

$$w_1=f(0),w_2=f\left(\frac{\tau}{2}\right),w_3=f\left(\frac{\tau'}{2}\right),w_4=f\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right). \tag{10}$$

积分(9)称做**椭圆积分**. 这种积分的特殊情形

$$z=\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \tag{11}$$

我们在第 39 目中在讨论把上半平面映到矩形上的共形映射时已经遇到过了. 这个积分的反函数,我们已表示为

$$w=\operatorname{sn}z, \tag{12}$$

并且称它为**椭圆正弦**. 它是雅可比椭圆函数的一种,我们现在就来研究雅可比椭圆函数.

102. 椭圆积分和雅可比函数 一般地讲,形如

$$\int R[w,\sqrt{P(w)}]dw \tag{1}$$

的积分称做**椭圆积分**,其中 R 是它的那两个变元的有理函数,$P(w)$是三次或四次多项式. 在个别的情况下,这个积分可用初等函数表出,例如积分

$$\int\frac{wdw}{\sqrt{w^4+1}}=\frac{1}{2}\ln\left(w^2+\sqrt{w^4+1}\right)+C.$$

这时它称做**伪椭圆积分**.

一般地讲,积分(1)不能用初等函数来表出. 可以证明*:利用初等的代换和变换,椭圆积分可化为下列三种形式之一:

$$\int\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},\int\sqrt{\frac{1-k^2w^2}{1-w^2}}dw,$$
$$\int\frac{dw}{(1+lw^2)\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \tag{2}$$

其中 k 与 l 都是常数. 积分(2)分别称做**勒让德形式**的第一种、第二种及第三种椭圆

* 譬如可看菲赫金哥尔茨,第二卷.

积分.数值 k 称做**椭圆积分的模**.

代换

$$w=\sin\varphi \tag{3}$$

将积分(2)变到三角形式

$$\begin{gathered}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi,\\\int\frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.\end{gathered}\tag{4}$$

变元 φ 称做**椭圆积分的振幅**.对于呈(4)的形式的积分,我们采用下列记号:

$$\begin{gathered}F(\varphi,k)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad E(\varphi,k)=\int_0^\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi,\\\Pi(k,l,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.\end{gathered}\tag{5}$$

具有振幅 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 的积分特别经常遇到,它们称做**完全的椭圆积分**,且对于它们之中的前两种,采用特别的记号:

$$F\left(\frac{\pi}{2},k\right)=K(k),\quad E\left(\frac{\pi}{2},k\right)=E(k).\tag{6}$$

常常还由关系式

$$\sin\alpha=k \tag{7}$$

引入一个变元 α,它称做**模角**.第一种与第二种椭圆积分,视为振幅 φ 与模角 α 的函数,都已编制有表可查.它们的对于 φ 间隔为 $1°$而对于 α 间隔为 $5°$的五位数值表,被引在 Янке、Эмде、Леш 的函数表汇编[14]里.就在那里,有关于更详细的表的指示,以及完全椭圆积分的视为 α 的函数间隔 $1°$的表(第 177 页),以及视为 k^2 的函数间隔 0.01 自 0 到 1 的表(第 180 及 182 页).

在图 219 中,我们举出了在平面 $k^2=\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ 上,函数 $K=K(\lambda)$ 的当 $\lambda=0$ 时等于 $\frac{\pi}{2}$ 且在轴 λ_1 的线段 $(1,\infty)$ 上发生间断的那一分支的“地形面”.从图中可以看出:函数当 $\lambda=1$ 时变为无穷大,在点 $\lambda=1$ 它有一个支点.在“地形面”上标出了模的等值线(间隔为 0.2)与辐角的等值线(间隔为一直角的 0.01),垂直的箭头表出坐标原点的位置.

我们来更详细地谈一下在形式(2)时,即视为复变量 $w=\sin\varphi$ 的函数时,第一类椭圆积分

$$z=\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}\tag{8}$$

的性质.在第 39 目中,我们已证实过:这积分的反函数,即雅可比函数——**椭圆正弦**

$$w=\operatorname{sn}z=\operatorname{sn}(z,k),\tag{9}$$

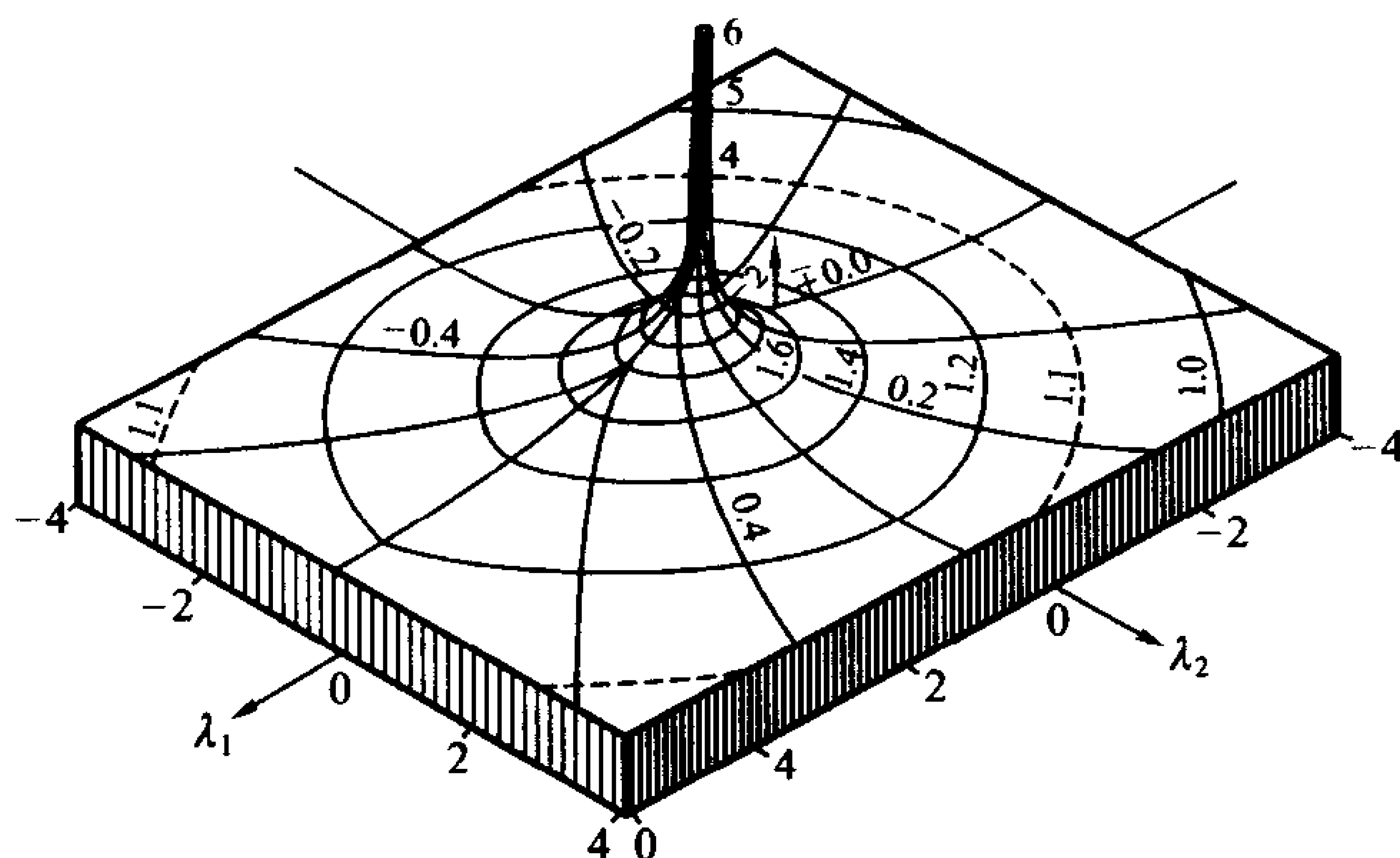


图 219

是双周期的亚纯函数,就是说,是具有基本周期

$$4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 4K,$$
$$2i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = 2iK' \tag{10}$$

的椭圆函数,这里 $K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ 与 $K' = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)$ 分别是对应于模 k 与所谓补模

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \cos\alpha \tag{11}$$

的完全椭圆积分 $\Bigg($ 要证实这点,只需在第一个积分中作代换 $t = \sin\varphi$,于是它就变为 $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$;第二个积分在作代换 $t = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}$ 后变为 $\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}}\Bigg)$. 我们还求得了在周期平行四边形内的 $\mathrm{sn}z$ 的下列数值:

y \ x	0	K	$2K$	$3K$
0	0	1	0	−1
K'	∞	$\frac{1}{k}$	∞	$-\frac{1}{k}$

(12)

且证实了它是个奇函数

$$\mathrm{sn}(-z) = -\mathrm{sn}\, z. \tag{13}$$

在图 220 中,我们作出了当 $k=0.8$ 时函数 sn z 的"地形面". 从它可以看出:这个函数的极点位于点 $z=2nK+(2n'+1)K'i$ 处,其零点位于点 $z=2nK+2n'K'$ 处,其中 n 与 n' 是任意整数(这完全同我们在第 39 目中所说的一致).

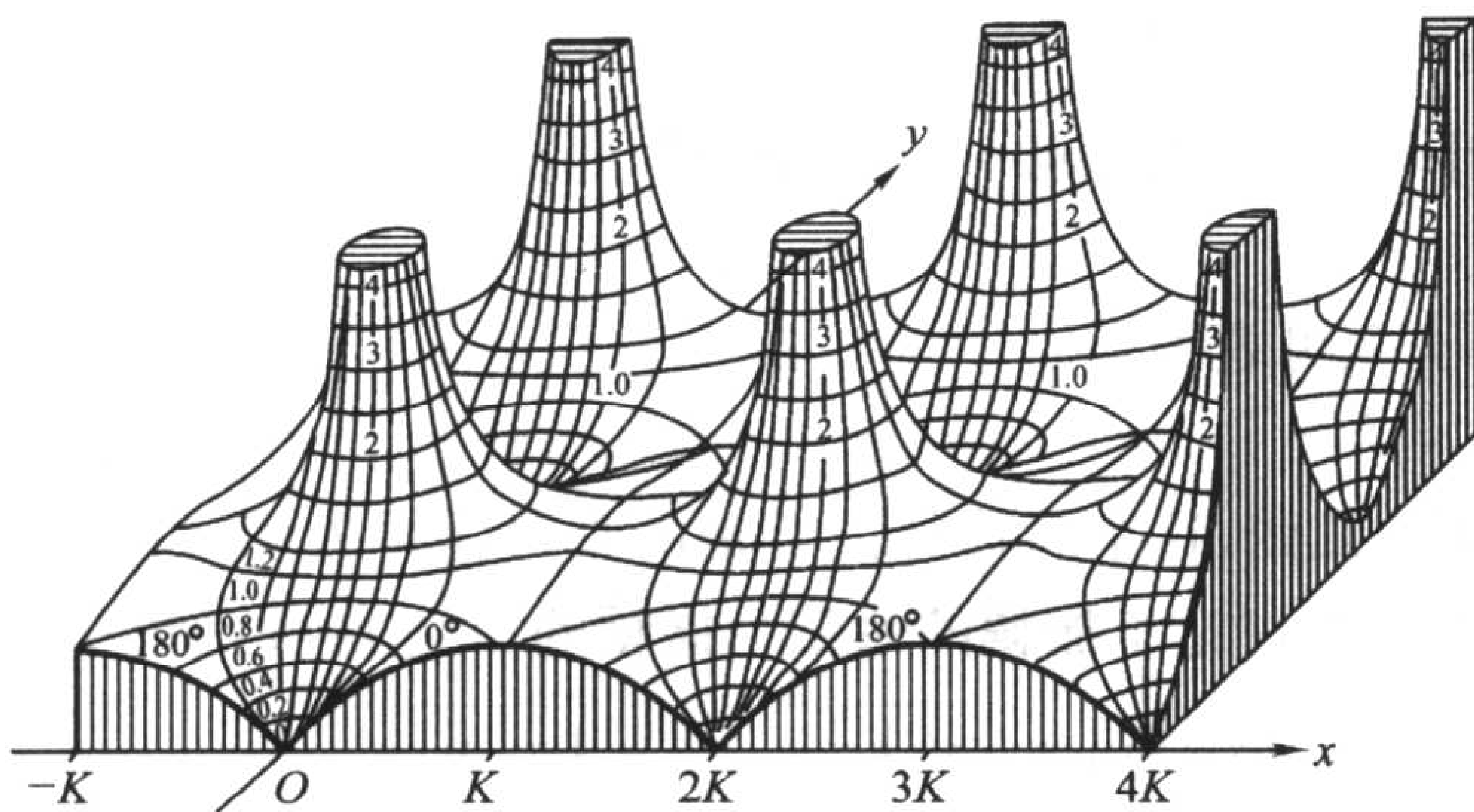


图 220

从函数(9)的双周期性推知:反函数 $z=F(w,k)$——第一类椭圆积分,视为 w 的函数——是无穷多值的. 它的任一个值都可由其中的一个值附加某一个周期 $T=4nK+2in'K'$ 而得到:

$$\int_{0\,L}^{w} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \int_{0\,L_0}^{w} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} + 4nK + 2in'K'. \tag{14}$$

在此,L 表示连接点 0 与 w 的任意路径,而 L_0 是某一条固定的路径,譬如说,是直线段(与第 8 目中 Ln w 的类似的性质相比较). 在图 221 中表示了当 $k=0.8$ 时椭圆积分 $F(w,k)$ 的一个分支的"地形面".

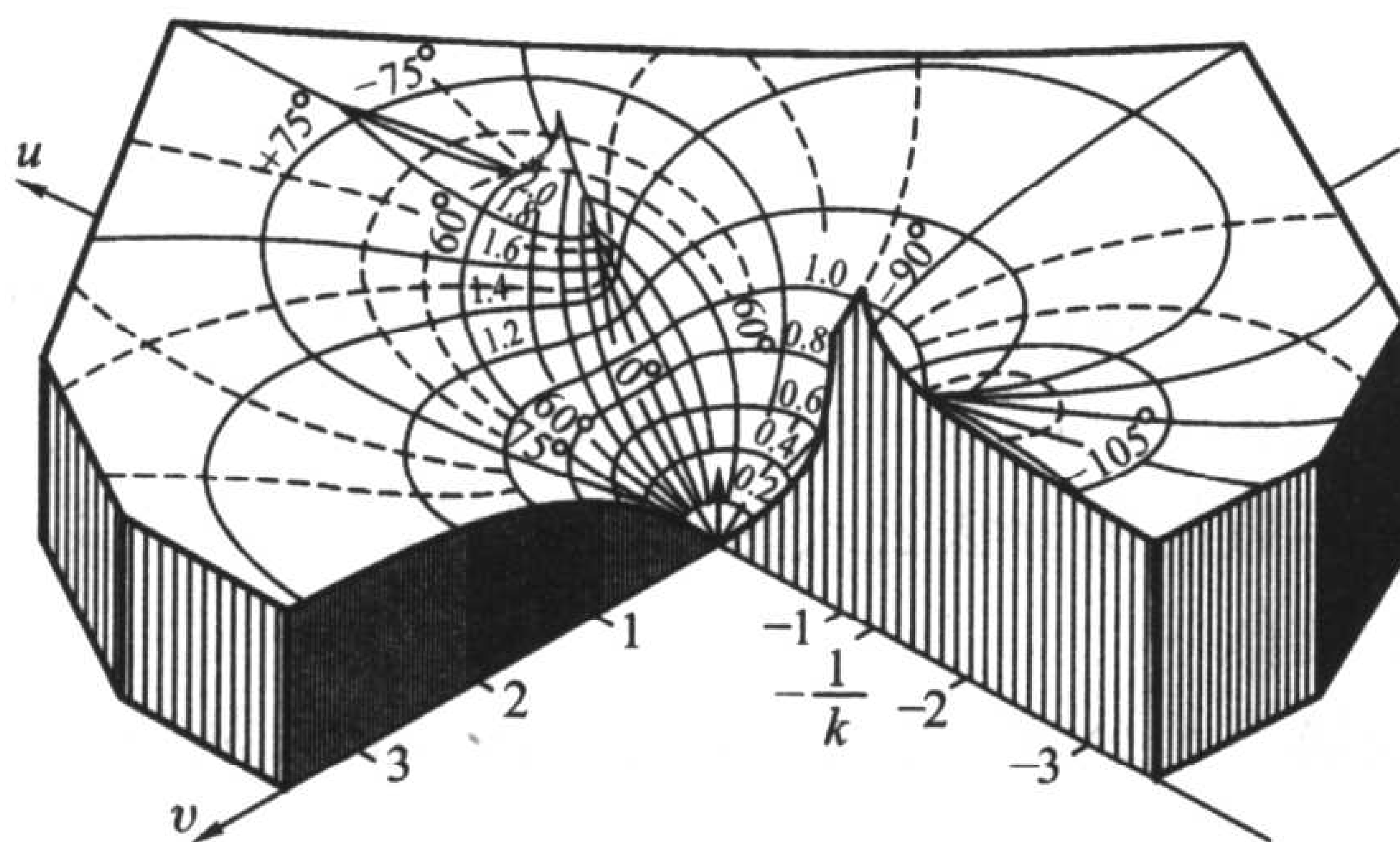


图 221

在图中,位于平面 w 的点 $w=\pm 1$ 与 $w=\pm\frac{1}{k}$ 上面的那些支点,可以明显地看出.

如果同前面一样,引入变量 φ (振幅),使得 $w=\sin\varphi$,则积分(8)变成积分

$$z=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\tag{15}$$

其反函数——椭圆积分 z 的振幅——有个专门的记号:

$$\varphi=\mathrm{am}\ z.\tag{16}$$

于是雅可比椭圆正弦可表为

$$w=\mathrm{sn}\ z=\sin\mathrm{am}\ z\tag{17}$$

的形式,称做**振幅的正弦**,这个名称与记号是由雅可比本人引入的,在现在采用较多的记号是 sn. 雅可比也讨论了**振幅的余弦与振幅的** Δ 这两种函数:

$$\begin{aligned}\cos\mathrm{am}\ z&=\sqrt{1-w^2}=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 z},\\ \Delta\mathrm{am}\ z&=\sqrt{1-k^2w^2}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 z},\end{aligned}\tag{18}$$

在现在对这两种函数通常使用记号

$$\mathrm{cn}\ z=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 z},\quad \mathrm{dn}\ z=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 z}.\tag{19}$$

(按字母读"c　n　z"和"d　n　z"). 在图 222 中我们作出了对于实数值变元 $z=x$ 与不大的正数 k 的 sn,cn 及 dn 的图像. 注意:当 $k=0$ 时,从公式(8)推知 $z=\arcsin w$,因此 $\mathrm{sn}(z,0)=\sin z$,于是公式(19)便给出 $\mathrm{cn}(z,0)=\cos z$,$\mathrm{dn}(z,0)=1$.

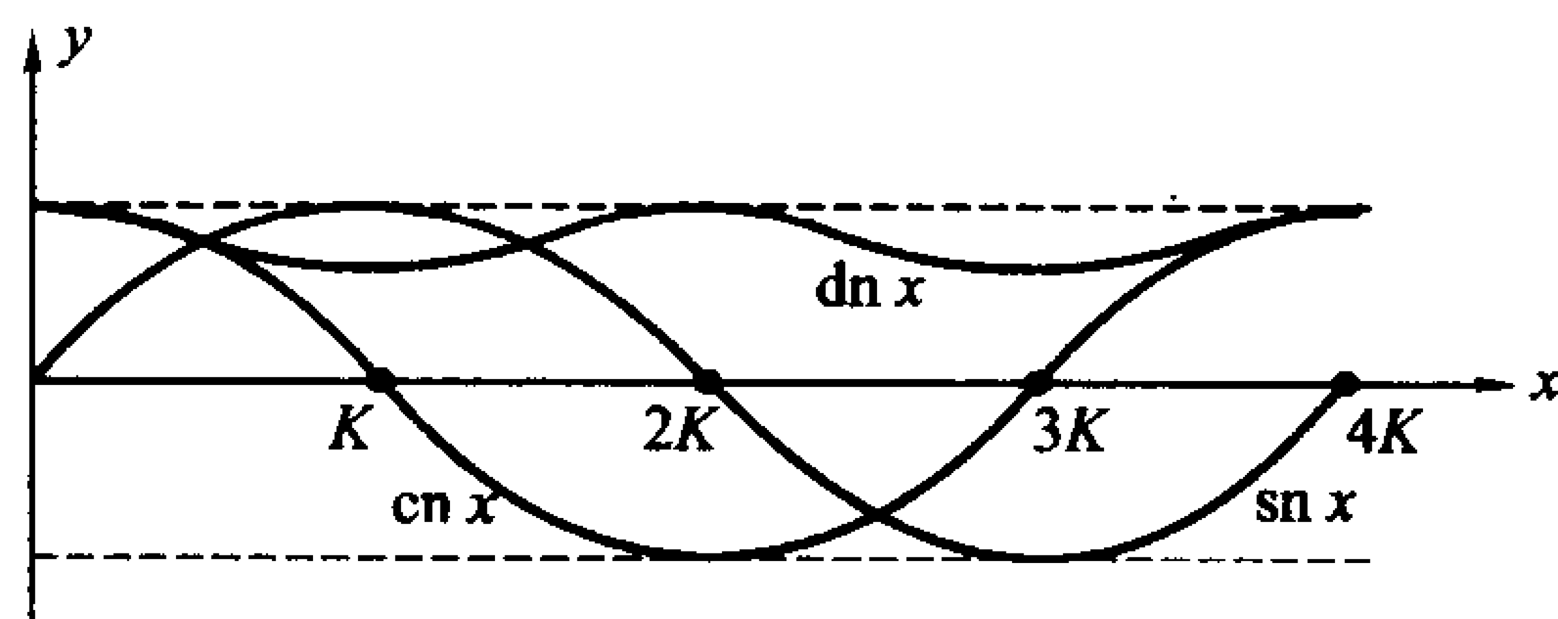


图 222

可以证明:函数 cn z 与 dn z 同 sn z 一样,是二阶的椭圆函数,且它们的基本周期分别等于 $4K, 2K+2K'i$ (对于 cn z)与 $2K, 4K'i$ (对于 dn z)* . 在这里我们只来举出关于雅可比椭圆函数的微分法公式与加法定理,从这些可以明显地看出它们与普通三角函数之间的类似.

要推得微分法的第一个公式,我们从关系式(8)出发,从(8)得

---

* 证明可参看 А. И. Маркушевич[1],第Ⅱ章.

$$\frac{dw}{dz}=\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)},$$

或，代入 $w=\operatorname{sn} z$，得到

$$\frac{d\ \operatorname{sn} z}{dz}=\operatorname{cn} z\cdot\operatorname{dn} z. \tag{20}$$

要得到另外的公式，我们把下列两个可直接从等式(19)推知的关系式

$$\operatorname{sn}^2 z+\operatorname{cn}^2 z=1,\quad k^2\operatorname{sn}^2 z+\operatorname{dn}^2 z=1 \tag{21}$$

求导数，于是得

$$\frac{d\ \operatorname{cn} z}{dz}=-\operatorname{sn} z\ \operatorname{dn} z,\quad \frac{d\ \operatorname{dn} z}{dz}=-k^2\operatorname{sn} z\ \operatorname{cn} z. \tag{22}$$

注意：当 $k=0$ 时，公式(20)与公式(22)中的第一个，就变为众所周知的 $\sin z$ 与 $\cos z$ 的求导公式. 我们还要指出：如果在公式(22)中，利用(21)式，将第一个式子中的 sn 与 dn 用 cn 来表出，在第二个式子中，将 sn 与 cn 用 dn 来表出，则从公式(22)可得到下列的关于 $w=\operatorname{cn} z$ 与 $w=\operatorname{dn} z$ 的微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz}&=-\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)},\\ \frac{dw}{dz}&=-\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)},\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $k'=\sqrt{1-k^2}$ 是补模. 考虑到 $\operatorname{cn} 0=\operatorname{dn} 0=1$（这从(19)式与等式 $\operatorname{sn} 0=0$ 得出），而且 $\operatorname{cn} z$ 与 $\operatorname{dn} z$ 都是偶函数，我们从公式(23)可以看出：这些函数分别是下列积分的反演：

$$\begin{aligned}z&=\int_1^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)}},\\ z&=\int_1^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)}}.\end{aligned} \tag{24}$$

要导出加法定理，我们利用下述方法，这方法的思想溯源于欧拉，是关于椭圆积分的研究的第一个推动力. 遵循欧拉，考虑微分方程

$$\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}+\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}}=0.$$

用独立的方法求出它的两个积分，再比较这两个积分，我们便得到所求的表达加法定理的关系式. 其中的第一个积分可直接得出为

$$\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}+\int_0^\omega\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}}=C. \tag{25}$$

要得到第二个积分，以方程组

$$\begin{aligned}\frac{dw}{du}&=\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)},\\ \frac{d\omega}{du}&=-\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)},\end{aligned} \tag{26}$$

替代我们的微分方程,其中 u 是辅助变量.把这两个方程求导数,得

$$\frac{d^2 w}{du^2} = w(2k^2 w^2 - 1 - k^2), \quad \frac{d^2 \omega}{du^2} = \omega(2k^2 \omega^2 - 1 - k^2),$$

由此有

$$\omega \frac{d^2 w}{du^2} - w \frac{d^2 \omega}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\omega \frac{dw}{du} - w \frac{d\omega}{du}\right) = 2k^2 w\omega(w^2 - \omega^2).$$

从另一方面,由公式(26)得

$$\omega^2 \left(\frac{dw}{du}\right)^2 - w^2 \left(\frac{d\omega}{du}\right)^2 = (\omega^2 - w^2)(1 - k^2 w^2 \omega^2),$$

因而以这一个方程除前一个方程,我们得到

$$\frac{\frac{d}{du}\left(\omega \frac{dw}{du} - w \frac{d\omega}{du}\right)}{\omega \frac{dw}{du} - w \frac{d\omega}{du}} = -\frac{2k^2 w\omega\left(\omega \frac{dw}{du} + w \frac{d\omega}{du}\right)}{1 - k^2 w^2 \omega^2},$$

或

$$\frac{d}{du}\ln\left(\omega \frac{dw}{du} - w \frac{d\omega}{du}\right) = \frac{d}{du}\ln(1 - k^2 w^2 \omega^2).$$

由此得
$$\omega \frac{dw}{du} - w \frac{d\omega}{du} = C'(1 - k^2 w^2 \omega^2),$$

于是,再利用(26)式,我们便求得了第二个积分

$$\frac{w\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)} + \omega\sqrt{(1-w^2)(1-k^2 w^2)}}{1 - k^2 w^2 \omega^2} = C_1. \tag{27}$$

记
$$\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2 w^2)}} = z, \quad \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}} = \zeta,$$

由此有 $w = \operatorname{sn} z, \omega = \operatorname{sn} \zeta$,将这代入公式(25)与(27)中,便得到我们的微分方程的积分,其形式为

$$z + \zeta = C, \quad \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta + \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta} = C_1. \tag{28}$$

由于按照微分方程的解的唯一性定理,这两个积分应当可以从其中的一个推得另一个,故 C_1 应当是 C 的函数,设 $C_1 = \varphi(C) = \varphi(z + \zeta)$.将这关系式代入(28)的第二个方程中,并且为了要求得函数 φ 的形式,还代入 $\zeta = 0$.我们得 $\varphi(z) = \operatorname{sn} z$,因此,最终形式的加法定理可写为

$$\operatorname{sn}(z + \zeta) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta + \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta}. \tag{29}$$

当 $k = 0$ 时,这个公式就与众所周知的正弦的加法定理相一致.

对于其他的雅可比函数,类似的公式也成立,如

$$\operatorname{cn}(z + \zeta) = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} \zeta - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} \zeta \operatorname{dn} z \operatorname{dn} \zeta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta}, \tag{30}$$

$$\mathrm{dn}\,(z+\zeta)=\frac{\mathrm{dn}\,z\ \mathrm{dn}\,\zeta-k^2\mathrm{sn}\,z\ \mathrm{sn}\zeta\mathrm{cn}\,z\ \mathrm{cn}\,\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta}. \tag{31}$$

从这些基本的加法公式,可得出其他的类似于众所周知的三角公式的公式.它们可在,例如,A.M.Журавский 的手册[13],第 76—77 页中找到.

最后我们注意:由于雅可比函数只依赖于一个(复数的)参数 k,故它们的周期不可能任意选取.事实上是,只能任意给定比值,

$$\kappa=\frac{K'}{K}, \tag{32}$$

或,完全一样,给定数值

$$q=e^{-\pi\kappa}=e^{-\pi\frac{K'}{K}}. \tag{33}$$

于是数值 K 与 k 便可按下列公式来确定*

$$K=\frac{\pi}{2}\left\{1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{\nu^2}\right\},\quad k=4\left\{\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}q^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}}{1+2\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}q^{\nu^2}}\right\}^2. \tag{34}$$

我们画出 q 对于k^2的函数在区间(0,1)上的图像(图 223).在这图中,实线是表示 q 与 $10q$ 的图像,虚线则表示 q 在区间(0.999,1)上的图像,对于后一个图像,k^2的值应当取上面的尺度.

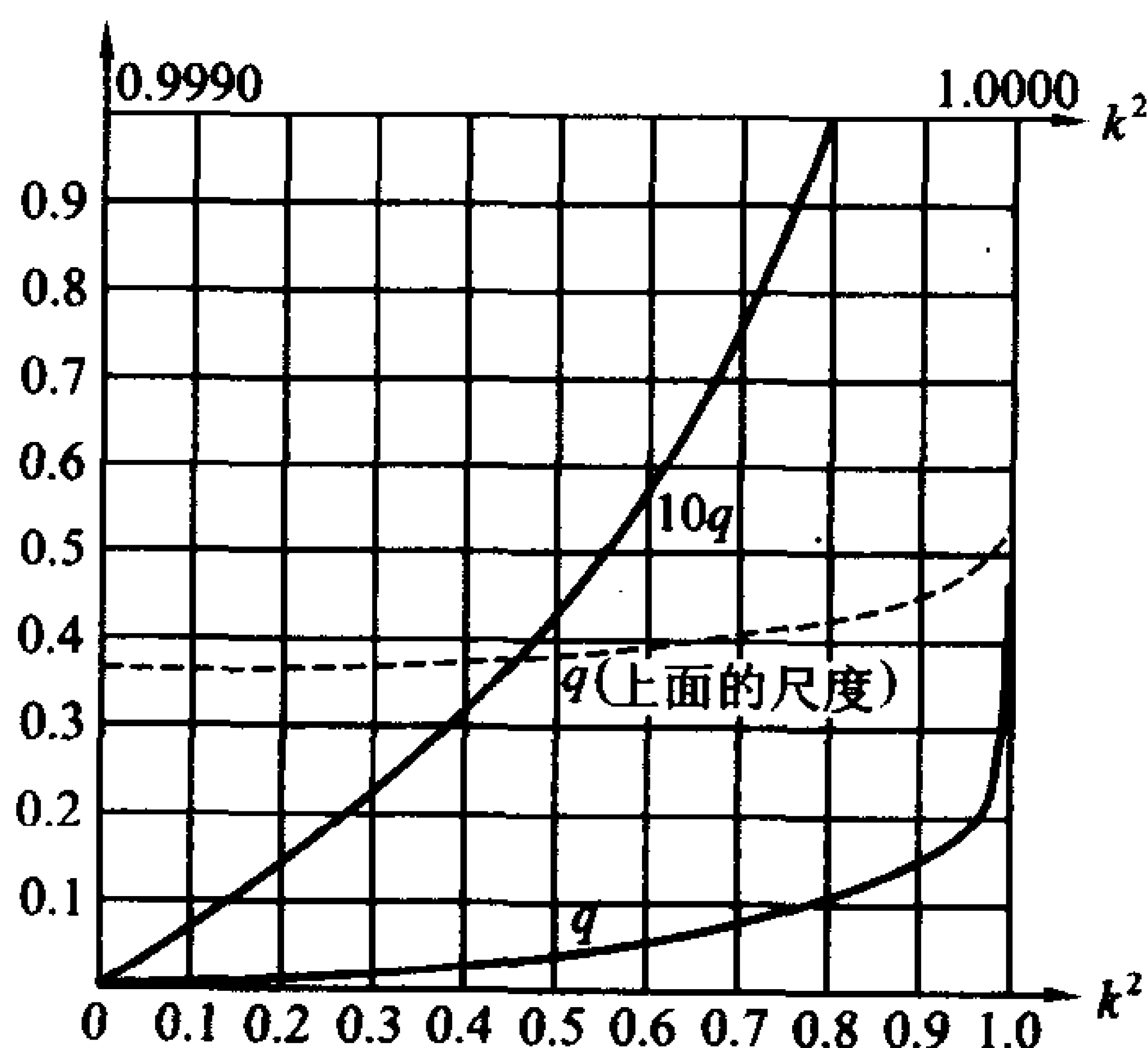


图 223

可是,在 Янке、Эмде 和 Леш 的函数汇编表中,有关于 q 的五位常用对数表,把它作为模角 α 的函数,其中 α 以 5′为间隔,自 0 变到 90°.从它们可对于给定的 q 求

* 级数(34)都收敛,因为,按第 82 目的条件(1)有 $\mathrm{Im}\,\frac{\tau'}{\tau}=\mathrm{Im}\,\frac{K'i}{2K}=\mathrm{Re}\,\frac{K'}{K}>0$,因此$|q|<1$.公式(34)的推导可参看,例如,Н.И.Ахиезер[11],第 94—95 页.

得 k，于是再按完全椭圆积分的表求出 K——这样可以避免应用公式(34).

103. 魏尔斯特拉斯函数. ζ 函数 (1)魏尔斯特拉斯函数$\wp$与$\wp'$雅可比函数是二阶椭圆函数，在周期平行四边形内具有两个单极点.魏尔斯特拉斯构造了在周期平行四边形内具有一个二重极点的二阶椭圆函数.与雅可比函数不同，这些函数依赖于两个复参数，并且周期 τ 与 τ'，在只满足一个一般的条件

$$\operatorname{Im}\frac{\tau'}{\tau}>0 \tag{1}$$

下可以任意给定.魏尔斯特拉斯函数的性质类似于雅可比函数的性质.注意：在理论的讨论中，魏尔斯特拉斯函数几乎常常显得更方便，可是在实用问题中，雅可比函数比较更经常遇到.

我们将证明一个辅助命题.

引理 对于任何满足条件(1)的复数 τ 与 τ'，级数

$$\sum_{n,n'=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(n\tau+n'\tau')^3} \tag{2}$$

都绝对收敛，这里，求和式是对于除了 $n=n'=0$ 以外的所有的整数值 n 与 n' 来取的.

点 $T=n\tau+n'\tau'$ 位于平行四边形网的顶点上.首先讨论平行四边形 Π_1，其上有 8 个点 T (图 224).用 l 表示点 $z=0$ 到 Π_1 上的点的最短距离，注意到对于这 8 个点中的每一个点，都有 $\left|\frac{1}{T^3}\right|\leqslant\frac{1}{l^3}$，所以对于它们而取的和满足不等式

$$\sum_{\Pi_1}{}' \frac{1}{|T|^3}\leqslant\frac{8}{l^3}$$

类似地，在平行四边形 Π_2 上(图 224)有 $8\times2=16$ 个点 T，它们之中每一个到原点的距离都不小于 $2l$，因而对于它们所取的和满足

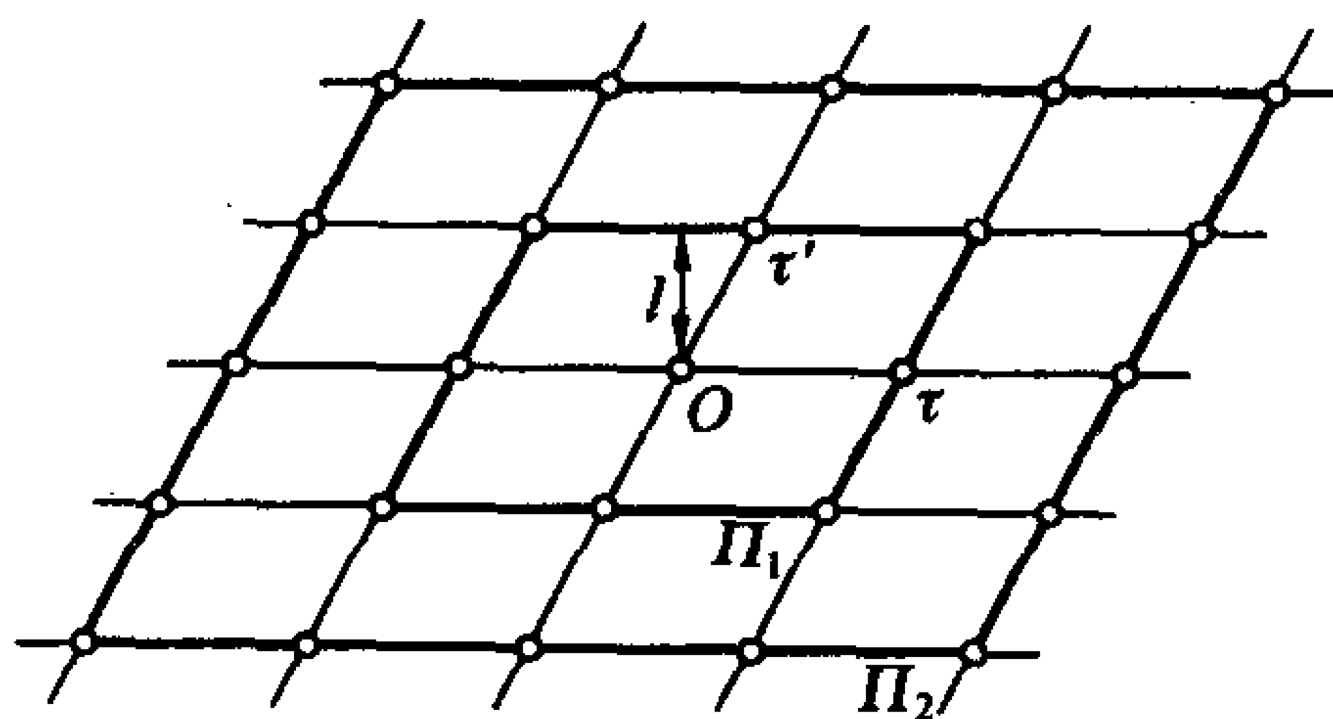


图 224

$$\sum_{\Pi_2}{}' \frac{1}{|T|^3}\leqslant\frac{8}{2^2\cdot l^3}.$$

一般地讲,在平行四边形 Π_n 上有 $8n$ 个点 T,它们与原点的距离都不小于 nl,因此对于 Π_n 有

$$\sum_{\Pi_n}{}' \frac{1}{|T|^3} \leqslant \frac{8}{n^2 \cdot l^3}.$$

这样一来,级数(2)的绝对值不能大于控制收敛级数 $\frac{8}{l^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,因此绝对收敛.引理得证.

从引理推得:级数

$$f(z) = \sum_{n,n'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\tau - n'\tau')^3} = \sum \frac{1}{(z-T)^3} \tag{3}$$

绝对收敛,且在任一个圆 $|z| \leqslant R$ 内,只要在这级数中去掉在这圆内具有极点的有限多个项,这级数都一致收敛(在这里数值 $n = n' = 0$ 也可以允许取).实际上,只需考虑那些使得 $|T| > 2R$ 的项,我们有 $\left|\frac{z}{T}\right| < \frac{1}{2}$,因而

$$\left|\frac{1}{(z-T)^3}\right| \leqslant \frac{1}{\left(1 - \left|\frac{z}{T}\right|\right)^3} \frac{1}{|T|^3} < \frac{8}{|T|^3},$$

由此从引理就得到我们的论断.

对于圆 $|z| < R$ 内的点 z,把 $f(z)$ 表成

$$f(z) = \sum_{|T| \leqslant R} \frac{1}{(z-T)^3} + \sum_{|T| > R} \frac{1}{(z-T)^3}$$

的形式,我们看出:第一个和式是有理函数,在每一点 T 处有一个三阶极点,其主要部分等于: $\frac{1}{(z-T)^3}$;而第二个和式,按刚才所证明的,是在圆 $|z| \leqslant R$ 内解析的函数.因此,可以推断: $f(z)$ 个是亚纯函数.

再次,虽然 $f(z)$ 具有基本周期 τ 与 τ'.实际上,例如,

$$f(z+\tau) = \sum \frac{1}{[z - (T - \tau)]^3} = f(z),$$

因为 $T - \tau$ 也是周期,且与 T 同时遍历所有的周期的总体.因此, τ 是 $f(z)$ 的周期,同样, τ' 也是 $f(z)$ 的周期.而如果 $\widetilde{T}$ 是 $f(z)$ 的任意一个周期,则从 T 是 $f(z)$ 的极点,可以推断出 $T + \widetilde{T} = T'$ 也是个极点.从而 $\widetilde{T} = T' - T$,即, $\widetilde{T}$ 是 τ 与 τ' 的整数组合,因此, τ 与 τ' 是 $f(z)$ 的基本周期.

这样, $f(z)$ 是具有给定周期 τ 与 τ' 的三阶椭圆函数.此外,它也是个奇函数.实际上,

$$f(-z) = \sum \frac{1}{(-z-T)^3} = -\sum \frac{1}{[z - (-T)]^3} = -f(z),$$

因为 $-T$ 与 T 一同遍历所有的周期的总体.

从 $f(z)$ 出发,借助于积分法可以构造偶的二阶椭圆函数:如果 z_0 与 z 都是异于周期的点,则沿着连接 z_0 与 z 且不含有周期点的曲线,将级数(3)逐项求积分,得到

$$\varphi(z)=C+\int_{z_0}^{z}f(z)dz = C-\frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{(z_0-T)^2}\right].$$

在这和式中将具有 $T=0$ 的项分出,我们把上面这个等式重写成形式

$$\varphi(z)+\frac{1}{2z^2} = C+\frac{1}{2z_0^2}-\frac{1}{2}\sum{}'\left[\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{(z_0-T)^2}\right]. \tag{4}$$

在这里,右端的函数在点 $z=0$ 处是正则的,所以常数 C 可以选取得使右端当 $z=0$ 时的值等于 0:

$$C+\frac{1}{2z_0^2}-\frac{1}{2}\sum{}'\left[\frac{1}{T^2}-\frac{1}{(z_0-T)^2}\right]=0. \tag{5}$$

从(4)减去(5),得

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2}\right]\right\}.$$

位于大括弧内的那个亚纯函数称做**魏尔斯特拉斯函数**,用记号$\wp(z)$来表示

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2}\right]. \tag{6}$$

级数(6)绝对收敛,因为对于充分大的$|T|$,它的一般项的模由不等式

$$\left|\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2}\right| = \left|\frac{(2T-z)z}{T^2(z-T)^2}\right| = \frac{2}{|T|^3}\frac{\left|1-\frac{z}{2T}\right|}{\left|1-\frac{z}{T}\right|^2}|z|<\frac{A|z|}{|T|^3},$$

来估计其中 A 是某一个常数.利用这个,我们证得$\wp(z)$是偶函数:

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2}+\sum{}'\left\{\frac{1}{[z-(-T)]^2}-\frac{1}{(-T)^2}\right\} = \wp(z), \tag{7}$$

因为以 $-T$ 替代 T,只归结于级数的项的重新排列.

魏尔斯特拉斯函数的导数

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3}-2\sum{}'\frac{1}{(z-T)^3} = -2\sum\frac{1}{(z-T)^3} = -2f(z)$$

同按(3)决定的 $f(z)$ 只相差一个常数因子,所以,它是具有周期 τ 与 τ' 的双周期函数.因此

$$\wp'(z+\tau)-\wp'(z)=0, \quad \wp'(z+\tau')-\wp'(z)=0,$$

并且积分后,得到

$$\wp(z+\tau)-\wp(z)=C, \quad \wp(z+\tau')-\wp(z)=C_1.$$

在这两个式子中分别令 $z=-\frac{\tau}{2}$ 与 $z=-\frac{\tau'}{2}$,且利用$\wp(z)$是偶函数这性质,得 $C=$

$C_1=0$,由此推知:$\wp(z)$是具有周期 τ 与 τ' 的椭圆函数.显然,它是二阶函数,且在每一个周期平行四边形内有一个二重极点在点 T 处,其主要部分是$\frac{1}{(z-T)^2}$.

导数 $\wp'(z)$是三阶奇椭圆函数.同在第 101 目中一样,我们可求得它的三个零点是在点 $z=\frac{\tau}{2},\frac{\tau'}{2},\frac{\tau+\tau'}{2}$处(这三个零点之和等于 $\tau+\tau'\equiv 0(\bmod \tau,\tau')$,这是按照第 101 目定理 5 应该如此的).因此,这些点都是$\wp(z)$的二重点,所以值

$$\wp\left(\frac{\tau}{2}\right)=e_1,\quad \wp\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right)=e_2,\quad \wp\left(\frac{\tau'}{2}\right)=e_3 \tag{8}$$

(同数值∞一样)是函数 $\wp(z)$在汇合点所取的值.其他的值都是 $\wp(z)$在两个相异的点所取的,因为在相反的情形下,我们还将在周期平行四边形内得到 $\wp'(z)$的另一个零点,而这是不可能的.在图 225 中我们画出了函数 $\wp(z)$的“地形面”.

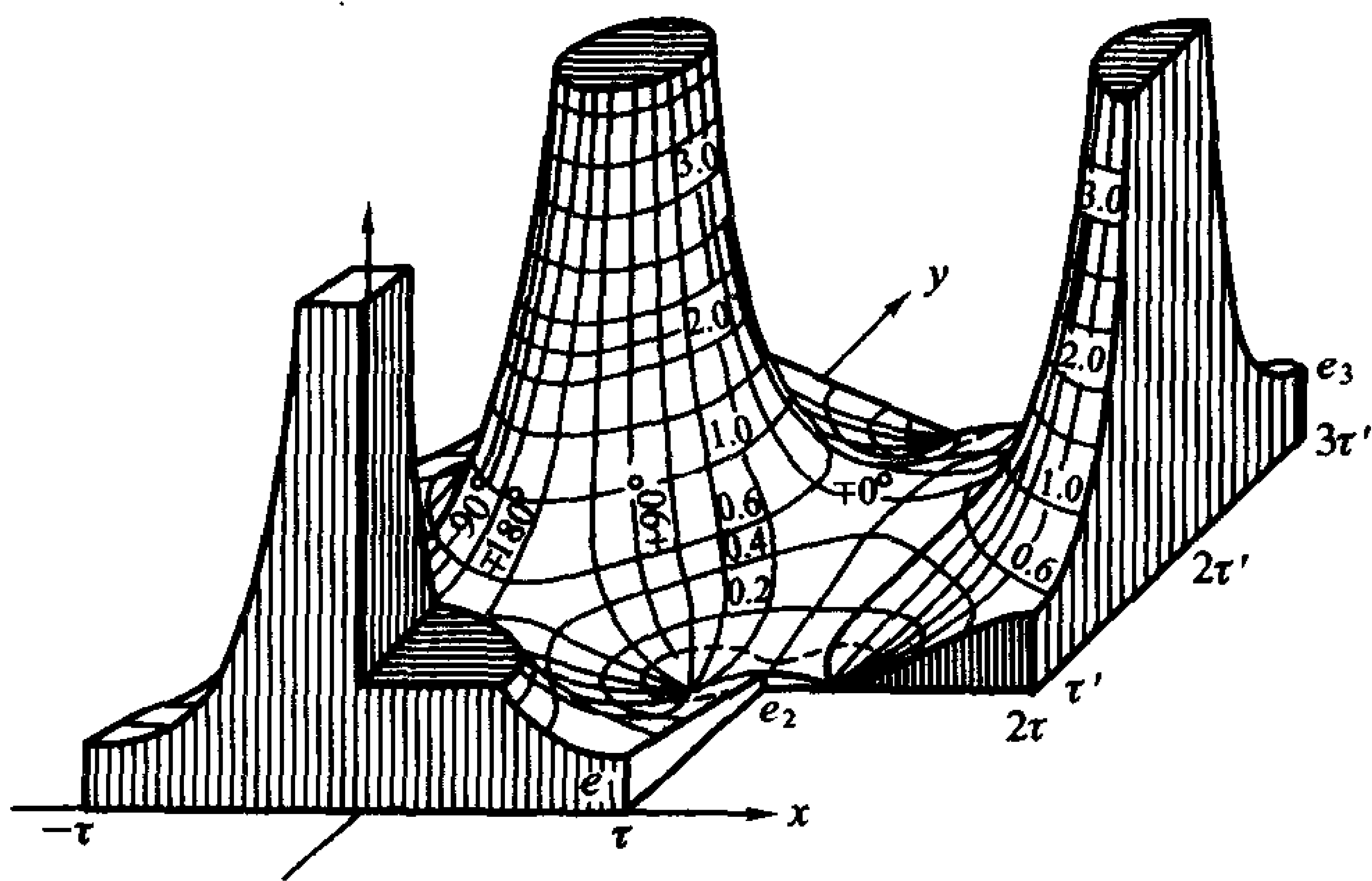


图 225

要得到根据第 101 目的定理 7 为 $\wp(z)$所满足的那个微分方程,我们求出这函数在 $z=0$ 的邻域内的洛朗展开式.对于任一个 $T\neq 0$,有

$$\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2}=\frac{1}{T^2}\left[\left(1-\frac{z}{T}\right)^{-2}-1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{T^{n+2}}z^n,$$

因此,利用表达式(6),并由于 $\wp(z)$是个偶函数,我们的展开式仅含有 z 的偶次幂,我们得到

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+3z^2\sum{}'\frac{1}{T^4}+5z^4\sum{}'\frac{1}{T^6}+\cdots.$$

引入采用的记号:

$$g_2=60\sum{}'\frac{1}{T^4},g_3=140\sum{}'\frac{1}{T^6}, \tag{9}$$

我们得出所求的展开式的形式为

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{g_2}{20}z^2+\frac{g_3}{28}z^4+\cdots. \tag{10}$$

将级数(10)求导数,得

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}+\frac{g_2}{10}z+\frac{g_3}{7}z^3+\cdots. \tag{11}$$

从展开式(10)和(11)出发,组成$\wp$与$\wp'$的有理组合,使其在周期平行四边形内没有极点,因而是个常数(第 101 目定理 2),我们就得到了所求的微分方程.我们有

$$[\wp'(z)]^2=\frac{4}{z^6}\left\{1-\frac{g_2}{10}z^4-\frac{g_3}{7}z^6+\cdots\right\},$$

$$[\wp(z)]^3=\frac{1}{z^6}\left\{1+\frac{3g_2}{20}z^4+\frac{3g_3}{28}z^6+\cdots\right\},$$

因此,所求的组合就是

$$[\wp'(z)]^2-4[\wp(z)]^3+g_2\wp(z)=-g_3+c_2z^2+c_3z^4+\cdots. \tag{12}$$

实际上,(12)的左端是具有周期 τ 与 τ' 的椭圆函数(第 101 目定理 1).在周期平行四边形内它的唯一可能的极点是 $z=0$.但是,如同(12)式的右端所表示的,函数在这个点处是正则的.因此,这函数是个常数,并且等于它在 $z=0$ 时的值,即 $-g_3$.这样一来,我们便得到了所求的微分方程

$$[\wp'(z)]^2=4[\wp(z)]^3-g_2\wp(z)-g_3. \tag{13}$$

前面我们已经求得了$\wp'(z)$的零点,且表出了$\wp(z)$在这些点处的值——参看(8)式.顾及到这一点,等式(13)可写为

$$[\wp'(z)]^2=4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3]. \tag{14}$$

比较公式(13)与(14),按代数学中众所周知的方程的根的性质,得出关系式

$$e_1+e_2+e_3=0,e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{g_2}{4},e_1e_2e_3=\frac{g_3}{4}. \tag{15}$$

记 $\wp(z)=w$,我们可把方程(13)写成

$$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}$$

的形式,由此可推断出:$\wp(z)$是积分

$$z-z_0=\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}},\quad w_0=\wp(z_0)$$

的反函数.在此令 z_0趋于 0,于是 w_0趋于∞,便得**魏尔斯特拉斯形式下的椭圆积分**

$$z=\int_{\infty}^{w}\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}, \tag{16}$$

它的反函数就是函数 $\wp(z)$.

最后,我们提出关于 $\wp(z)$的加法定理

$$\wp(z+\zeta)+\wp(z)+\wp(\zeta)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(\zeta)}{\wp(z)-\wp(\zeta)}\right\}^2, \tag{17}$$

而不加证明,它的推导可在,例如,Н. И. Ахиезер 的书[11],第 60—63 页中找到.

(2)魏尔斯特拉斯函数 ζ 与 σ　在周期函数中,函数$\frac{1}{\sin^2 z}$是同$\wp(z)$相类似的,它在它的周期点 $T=n\pi$ 处也有二重极点,其主要部分是$\frac{1}{(z-T)^2}$.由于从函数

$$\cot z=\frac{1}{z}-\int_0^z\left(\frac{1}{\sin^2 z}-\frac{1}{z^2}\right)dz,\quad (\cot z)'=-\frac{1}{\sin^2 z}$$

的类推,魏尔斯特拉斯利用下列关系式引入了函数 $\zeta(z)$(“zeta－**函数**”):

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\int_0^z\left(\wp(z)-\frac{1}{z^2}\right)dz,\quad \zeta'(z)=-\wp(z).\tag{18}$$

以$\wp(z)$的展开成最简单分式的展开式(6)代替$\wp(z)$,且求积分后,得到

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum{}'\left(\frac{1}{z-T}+\frac{1}{T}+\frac{z}{T^2}\right).\tag{19}$$

zeta－函数是个奇函数.实际上,对于所有的 z,都有

$$[\zeta(z)+\zeta(-z)]'=\zeta'(z)-\zeta'(-z)=\wp(-z)-\wp(z)=0,$$

因此 $\zeta(z)+\zeta(-z)=C$.令 $z\to0$,从公式(18)得 $C=0$,因而 $\zeta(-z)=-\zeta(z)$.

函数 $\zeta(z)$在周期 T 处有单极点,所以不可能是椭圆函数(第 101 目).可是当改变变元一个周期的数值时,它只改变一个常数项,实际上,例如,对于任一个 z 都有

$$\{\zeta(z+\tau)-\zeta(z)\}'=\wp(z)-\wp(z+\tau)=0,$$

对于 τ'也有类似的情形,因此

$$\zeta(z+\tau)-\zeta(z)=\delta,\zeta(z+\tau')-\zeta(z)=\delta'.\tag{20}$$

在数值 τ,τ'与 δ,δ'之间有简单的依赖关系存在.要得到这依赖关系,我们将 $\zeta(z)$沿着具有顶点$\pm\frac{\tau}{2}\pm\frac{\tau'}{2}$的平行四边形的周线求积.由于在这平行四边形内,函数只有一个具有留数 1 的极点 $z=0$,故这积分等于 $2\pi i$.另一方面,把沿着平行四边形的两对对边的积分合并起来,且注意到关系式(20),得出这积分等于 $\delta\tau'-\delta'\tau$.由此推出,

$$\delta\tau'-\delta'\tau=2\pi i.\tag{21}$$

这个关系式是由勒让德得出的.

根据与函数

$$\sin z=ze^{\int_0^z\left(\cot z-\frac{1}{z}\right)dz},\quad (\ln\sin z)'=\cot z$$

的类似性,我们引入 $\sigma(z)$——魏尔斯特拉斯的“**σ 函数**”:

$$\sigma(z)=ze^{\int_0^z\left(\zeta(z)-\frac{1}{z}\right)dz},\quad \{\ln\sigma(z)\}'=\zeta(z).\tag{22}$$

将 $\zeta(z)$的展开式(19)代入,逐项求积分,且取指数后,得出 $\sigma(z)$的无穷乘积的表示式

$$\sigma(z) = ze^{\sum'\left\{\ln\left(1-\frac{z}{T}\right)+\frac{z}{T}+\frac{z^2}{2T^2}\right\}} = z\prod{}'\left(1-\frac{z}{T}\right)e^{\frac{z}{T}+\frac{z^2}{2T^2}}. \tag{23}$$

从这表示式看出：$\sigma(z)$是在点 $z=T$ 处有单零点的整函数.它是个奇函数，因为从(22)式，利用 $\zeta(z)$是奇函数这性质，可以推断出：

$$\sigma(-z) = -ze^{\int_0^{-z}\left\{\zeta(u)-\frac{1}{u}\right\}du} = -ze^{\int_0^{z}\left\{\zeta(v)-\frac{1}{v}\right\}dv} = -\sigma(z).$$

(我们作了代换 $u=-v$).从关系式(22)与(20)可得

$$\frac{\sigma'(z+\tau)}{\sigma(z+\tau)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \delta,$$

求积分并且取指数后，有

$$\sigma(z+\tau) = \sigma(z)e^{\delta z+\gamma}.$$

将 $z=-\frac{\tau}{2}$代入这式子中，且利用 $\sigma(z)$是奇函数这性质，得到 $-1=e^{-\frac{\delta\tau}{2}+\gamma}$，由此得出 $e^{\gamma}=-e^{\frac{\delta\tau}{2}}$，因而

$$\sigma(z+\tau) = -\sigma(z)e^{\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)}. \tag{24}$$

由此知道：当改变变元一个周期 τ 的数值时，函数 $\sigma(z)$得到一个指数乘因子 $-e^{\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)}$(对于 τ'也同样成立).

除了 $\sigma(z)$之外，我们还要引入三个 σ 函数：

$$\sigma_1(z) = -\frac{e^{\delta z/2}}{\sigma\left(\frac{\tau}{2}\right)}\sigma\left(z-\frac{\tau}{2}\right), \quad \sigma_2(z) = -\frac{e^{\delta' z/2}}{\sigma\left(\frac{\tau'}{2}\right)}\sigma\left(z-\frac{\tau'}{2}\right),$$

$$\sigma_3(z) = -\frac{e^{\delta'' z/2}}{\sigma\left(\frac{\tau''}{2}\right)}\sigma\left(z-\frac{\tau''}{2}\right), \tag{25}$$

其中 $\tau''=\tau+\tau'$，而 δ''则是对应于这个周期的在公式(20)与(24)中的常数 δ (引入负号为的是使 $\sigma_k(0)=1$，编号是根据习惯).

最后，我们将证明下面的定理：

定理 在周期平行四边形内具有零点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和极点$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$(每一个点都按照它的重数计算若干次)的任一个 n 阶的椭圆函数$f(z)$，都可用 σ 函数表示：

$$f(z) = C\frac{\sigma(z-\tilde{\alpha}_1)\sigma(z-\alpha_2)\cdots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\sigma(z-\beta_2)\cdots\sigma(z-\beta_n)}, \tag{26}$$

其中 C 是个常数，且

$$\tilde{\alpha}_1 = (\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)-(\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n). \tag{27}$$

实际上，由于按第 101 目的定理 5,

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)\equiv 0 \pmod{\tau,\tau'},$$

我们有 $\tilde{\alpha}_1\equiv\alpha_1 \pmod{\tau,\tau'}$.现在考虑函数

$$g(z) = \frac{\sigma(z-\tilde{\alpha}_1)\sigma(z-\alpha_2)\cdots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\sigma(z-\beta_2)\cdots\sigma(z-\beta_n)},$$

它具有周期 τ 与 τ',因为,根据公式(24),并注意到 σ 是个奇函数,我们得到,例如:

$$g(z+\tau)=e^{\delta(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n-\tilde{\alpha}_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)}g(z)=g(z).$$

此外,比值 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 在周期平行四边形内没有极点,因为分子中的每一个极点都是分母的同重数的极点,且分母的每一个零点也都是分子的同重数的零点(注意 $\tilde{\alpha}_1\equiv\alpha_1(\mathrm{mod}\ \tau,\tau')$).因此,按第 101 目定理 2,这比值是个常数,从而便得出所求的公式(26).

公式(26)类似于有理分式函数的表示为分解成线性因子乘积的两个多项式的比.完全同样,可以证明与展开有理分式函数为最简单分式的定理相类似的定理:*如果 $f(z)$ 在基本平行四边形内具有极点 $z=\beta_k(k=1,2,\cdots,m)$,其主要部分是*

$$g_k(z)=\frac{c_{k1}}{z-\beta_k}+\frac{c_{k2}}{(z-\beta_k)^2}+\cdots+\frac{c_{kn_k}}{(z-\beta_k)^{n_k}},\tag{28}$$

则

$$f(z)=C+\sum_{k=1}^{m}\left\{c_{k1}\zeta(z-\beta_k)-c_{k2}\zeta'(z-\beta_k)+\cdots+(-1)^{n_k-1}\frac{c_{kn_k}}{(n_k-1)!}\zeta^{(n_k-1)}(z-\beta_k)\right\}.\tag{29}$$

(3) 雅可比 ϑ 函数　对于椭圆函数的数值的计算,以利用它们的借助于迅速收敛的级数来表达的式子较为方便.而在实际上,到目前为止,我们讨论过的所有的展开式都收敛得非常缓慢.这个空白可由雅可比的 ϑ 函数来弥补,它们可用迅速收敛的级数来表示,而且所有的椭圆函数都可利用它们来表出.

回到公式(24)上,且注意到:不难指出这样的一个整函数,它在变元改变一个周期时,得到同 $\sigma(z)$ 一样的一个因子,就是

$$\varphi(z)=e^{\frac{1}{2\tau}(\delta z^2-2\pi iz)}.\tag{30}$$

实际上,我们有

$$\varphi(z+\tau)=-e^{\frac{1}{2\tau}(\delta z^2-2\pi iz)}e^{\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)}=-\varphi(z)e^{\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)}.$$

记 $\psi(z)=\frac{\sigma(z)}{\varphi(z)}$,显然,这是一个整函数,因为 σ 与 φ 都是整函数,且 $\varphi(z)\neq0$.

根据(24),且也根据对于周期 τ' 的类似的关系式,因而有

$$\begin{aligned}&\psi(z+\tau)=\psi(z),\\&\psi(z+\tau')=-\psi(z)e^{\frac{\delta'\tau-\delta\tau'}{\tau}\left(z+\frac{\tau'}{2}\right)+\pi i\frac{\tau'}{\tau}}=-\psi(z)e^{-\frac{2\pi iz}{\tau}}\end{aligned}\tag{31}$$

(我们利用了勒让德关系式(21)).公式(31)中的第一个式子,表明了 $\psi(z)$ 是个周期函数.

按第 100 目的定理 4,周期整函数 $\psi(z)$ 在整个 z 平面上可用傅里叶级数来表示

$$\psi(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ik\omega z},\tag{32}$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{\tau}$. 要确定它的系数,我们可利用(31)的第二个关系式与傅里叶级数展开式的唯一性定理,这在我们的情形下可从关于洛朗级数的对应的定理推得. 在(32)中用 $z+\tau'$ 替代 z,得到

$$\psi(z+\tau')=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kq^{2k}e^{ik\omega z},\tag{33}$$

其中 $q=e^{\frac{i\omega\tau'}{2}}=e^{i\pi\frac{\tau'}{\tau}}$,由此利用关系式(31),求得

$$\psi(z)=-e^{i\omega z}\psi(z+\tau')=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kq^{2k}e^{i(k+1)\omega z}.$$

这个展开式与(32)相比较,按唯一性定理有:

$$c_{k+1}=-c_kq^{2k},k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

为方便起见,我们记系数 $c_0=Cq^{\frac{1}{4}}$,其中 C 是某一个常数,逐次可得

$$c_1=-Cq^{\frac{1}{4}},c_2=Cq^{\frac{9}{4}}=Cq^{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2},c_3=-Cq^{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

一般地说,

$$c_k=(-1)^kCq^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\tag{34}$$

(公式(34)的正确性容易用归纳法验证). 代入展开式(32)中,最后得

$$\psi(z)=Ce^{\frac{i\omega z}{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega z}.\tag{35}$$

函数 $\psi(z)$同**雅可比 ϑ 函数**中的一个,即,按定义

$$\vartheta_1(z)=\frac{i}{C}e^{-i\pi z}\psi(\tau z)=i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2k-1)\pi iz},\tag{36}$$

仅有非本质的差别. 回忆起 $\sigma(z)=\psi(z)\varphi(z)$,并利用公式(36)与(30)我们便得出魏尔斯特拉斯 σ 函数的用ϑ_1来表出的表达式

$$\sigma(z)=-iCe^{\frac{\delta z^2}{2\tau}}\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\right).$$

为了要找出在这里所引入的常数 C,我们把这个关系式对于 z 在点 $z=0$ 处求导数,并且注意到,由于(23)式 $\sigma'(0)=1$,我们就得到 $1=-iC\frac{\vartheta_1'(0)}{\tau}$,由此有

$$\sigma(z)=\frac{\tau e^{\frac{\delta z^2}{2\tau}}}{\vartheta_1'(0)}\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\right).\tag{37}$$

注意到 $\sigma(z)$的已知性质,我们现在可以推断出: $\vartheta_1(z)$是奇的周期整函数,具有周期 2*,且在点 $z=n+n'\frac{\tau'}{\tau}$处有单零点.

因为按照我们的条件有 $\mathrm{Im}\frac{\tau'}{\tau}>0$,故从(33)式得出 $|q|=e^{-\pi\mathrm{Im}\frac{\tau'}{\tau}}<1$,因此,

* $\vartheta_1(z)$具有周期 2 这一事实,容易从(36)看出,从而也可看出 $\vartheta_1(z+1)=-\vartheta_1(z)$.

$\vartheta_1(z)$的级数(36)由于在它的项中有因子 $q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}$ 的存在而迅速地收敛.另一方面,由于 σ 可用ϑ_1表出,而且我们已知道,任一椭圆函数都可用 σ 函数来表出,故任一椭圆函数都可用 ϑ_1表出.这样一来,ϑ 函数果然补足了在这一段开头时我们所说到的那个空白.

除了 $\vartheta_1(z)$之外,还要引入三个**雅可比 ϑ 函数**:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_2(z) &= \vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i z},\\ \vartheta_3(z) &= q^{\frac{1}{4}} e^{\pi i z}\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2k\pi i z},\\ \vartheta_4(z) &= \vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2} e^{2k\pi i z}.\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

所有这些函数都是整的偶函数.$\vartheta_2(z)$具有周期 2,而 $\vartheta_3(z)$与 $\vartheta_4(z)$都具有周期 1.魏尔斯特拉斯 σ_k 函数均可用它们来表出,其与公式(37)所差的,仅是在左端要把 σ 换成σ_k,在右端中要把 ϑ_1与 ϑ_1'换成函数 ϑ_{k+1}与 ϑ_{k+1}'.

如果令 $\kappa=-i\dfrac{\tau'}{\tau}$ $\left(\text{按照我们条件 Im}\dfrac{\tau'}{\tau}>0\text{,这个量是正的}\right)$,那么由(33)式我们得到 $q=e^{-\pi\kappa}$.因此雅可比 ϑ 函数依赖于 κ 像依赖于参数一样,并且常常用标记 $\vartheta_j(z,\kappa)(j=1,2,3,4)$表示它们.对级数(36)和(38)求导,我们得出,这些函数满足微分方程

$$\frac{\partial^2\vartheta_j}{\partial z^2}=4\pi\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\kappa},\quad j=1,2,3,4. \tag{39}$$

这样,譬如,

$$\frac{\partial\vartheta_3}{\partial\kappa}=\frac{\partial\vartheta_3}{\partial q}(-\pi q)=-\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2 q^{k^2} e^{2k\pi i z},$$

$$\frac{\partial^2\vartheta_3}{\partial z^2}=-4\pi^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}k^2 e^{2k\pi i z},$$

由此就得出 $j=3$ 时的(39)式.

在前面已经证明了,任一个椭圆函数都可用 ϑ 函数来表出.我们将不加证明地引出下列的关于雅可比椭圆函数的表达式

$$\operatorname{sn} z=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{z}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2k}\right)},\quad \operatorname{cn} z=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2\left(\frac{z}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2k}\right)},\quad \operatorname{dn} z=\sqrt{k'}\frac{\vartheta_3\left(\frac{z}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2k}\right)}.$$

在这里,出现在 ϑ 函数的定义中的那个常数q 应当不是取$e^{i\pi\frac{\tau'}{\tau}}$的形式,而是取 $e^{-\pi\frac{k'}{k}}$ 的

形式，这与前一目中的公式(33)相一致．用 ϑ 函数还可表示出出现在雅可比函数的理论中的数值 K 与 k，即，

$$K=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0),\quad k=\left\{\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right\}^2 \tag{40}$$

(这同前一目的公式(34)相一致)．公式(39)与(40)的推导可在，例如，Н. И. Ахиезер 的书[11]中找到．

104. 例．应用　(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的弧长的计算可化为椭圆积分　实际上，对应于横坐标自 0 变到 x 的那一段弧的长，等于

$$l(x)=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=a\int_0^{\frac{x}{a}}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt, \tag{1}$$

其中 $t=\frac{x}{a}$ 和 $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$．这是勒让德形式的第二类椭圆积分(参看第 102 目的(2)式)．椭圆的全长可用完全椭圆积分来表出

$$l=4a\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=4aE(k). \tag{2}$$

这种情况就说明了我们称它们为椭圆积分而称它们的反函数为椭圆函数的根据．

(2) 椭圆坐标也与椭圆函数联系的　为了要引入椭圆坐标，我们考虑方程

$$\frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=0, \tag{3}$$

它是 ρ 的三次方程，且当固定了 x,y 与 z 后，具有三个实根 λ,μ,ν，满足不等式

$$\lambda>a^2>\mu>b^2>\nu>c^2.$$

这三个根就称做点 (x,y,z) 的**椭圆坐标**．坐标系 (λ,μ,ν) 是正交的，因为曲面 $\lambda=\text{const}$，$\mu=\text{const}$ 与 $\nu=\text{const}$ 分别地代表共焦点的椭圆面、单叶双曲面与双叶双曲面，就是说，是互相正交的三个曲面(图 226)．

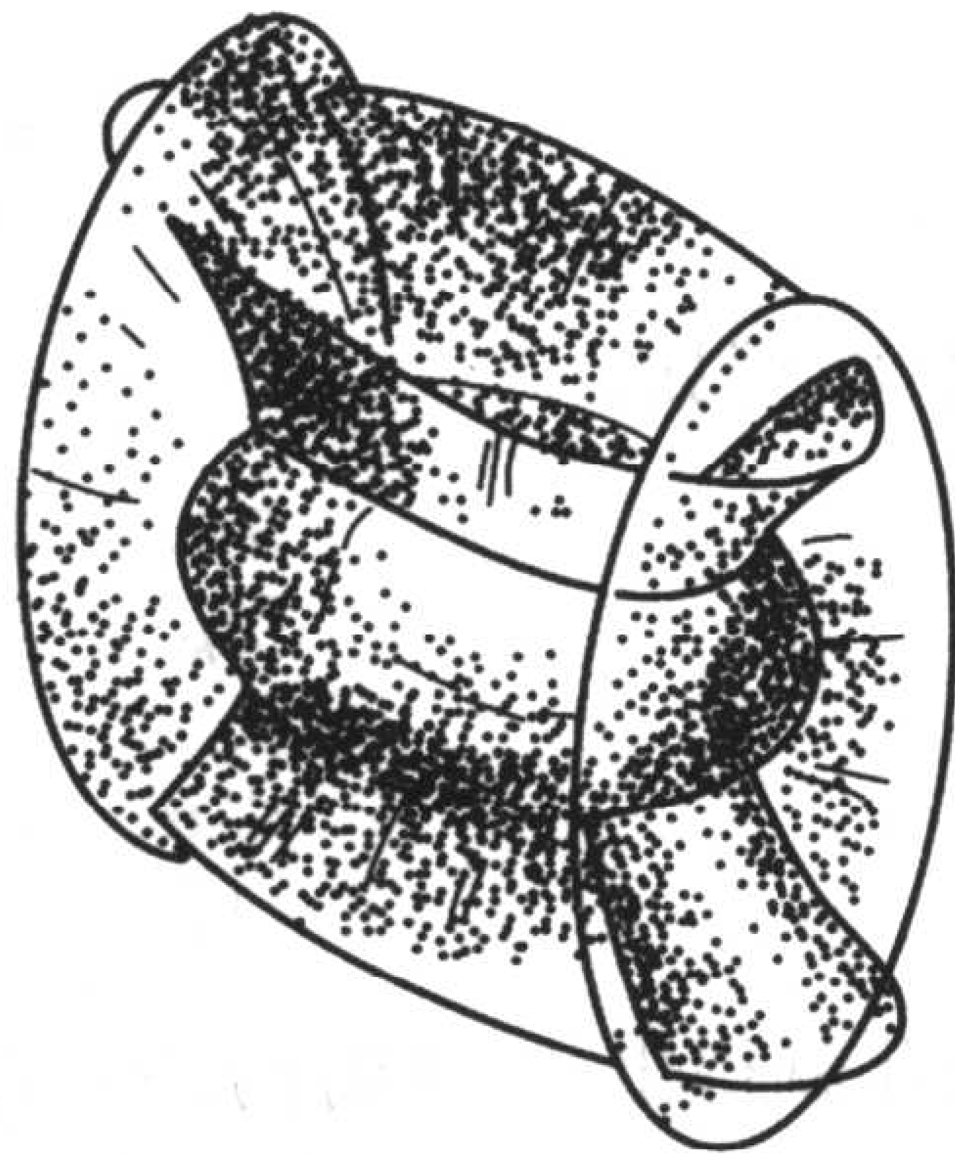


图 226

不难导出用椭圆坐标来表出笛卡儿坐标的公式*：

$$\left.\begin{aligned}x^2&=\frac{(\lambda-a^2)(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y^2&=\frac{(\lambda-b^2)(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z^2&=\frac{(\lambda-c^2)(\mu-c^2)(\nu-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

我们还要指出，如同在向量分析的教程中所证明的，在用椭圆坐标时，拉普拉斯方程具有形式

* 为此，只需将(3)的左端化成公共分母，并注意到这时分子中得到一个最高项系数为 -1 的关于 ρ 的三次多项式，把它分解成线性因子

$$\frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=\frac{-(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)}.$$

要得到(4)，只要分别乘两端以 $(\rho-a^2)$，$(\rho-b^2)$，$(\rho-c^2)$，再分别令 $\rho=a^2,b^2,c^2$ 便是了．

$$\frac{\mu-\nu}{\Pi_\mu\Pi_\nu}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\Pi_\lambda\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)+\frac{\nu-\lambda}{\Pi_\nu\Pi_\lambda}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\Pi_\mu\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+\frac{\lambda-\mu}{\Pi_\lambda\Pi_\mu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Pi_\nu\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)=0, \tag{5}$$

其中

$$\Pi_\rho=\sqrt{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)}, \tag{6}$$

而 $\Pi_\lambda,\cdots$分别是由以 $\lambda,\cdots$替代 ρ 而得到的.

除了椭圆坐标 λ,μ,ν 之外,还要引入另一种坐标 α,β,γ,这种坐标是借助于魏尔斯特拉斯函数$\wp$与椭圆坐标相联系的. 为此,最容易的是由方程

$$\rho=\wp(\sigma)+A \tag{7}$$

来引进变量 σ 以代替ρ,其中 A 是某一个常数. 用 e_1,e_2与 e_3来表示由在 Π_ρ^2的表达式中以(7)替代 ρ 而得到的那个多项式的根,于是

$$\Pi_\rho^2=(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)=\{\wp(\sigma)-e_1\}\{\wp(\sigma)-e_2\}\{\wp(\sigma)-e_3\}.$$

由此看出:当 $\rho=a^2,b^2,c^2$时,分别有$\wp(\sigma)=e_1,e_2,e_3$. 将这代入(7)中,求得:$a^2=e_1+A,b^2=e_2+A,c^2=e_3+A$,从而由相加便得到

$$A=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

新坐标 α,β,γ 定义为当以$\rho=\lambda,\mu,\nu$ 代入(7)时所得到的 σ 的数值:

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\wp(\alpha)+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),\\ \mu&=\wp(\beta)+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),\\ \nu&=\wp(\gamma)+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由此得到

$$\lambda-a^2=\wp(\alpha)+A-a^2=\wp(\alpha)-e_1,$$

对于其他两个差数也有类同的关系. 把这代入(4)中,便得出从坐标(α,β,γ)变到笛卡儿坐标的变换公式

$$\begin{aligned}x^2&=\frac{\{\wp(\alpha)-e_1\}\{\wp(\beta)-e_1\}\{\wp(\gamma)-e_1\}}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)},\\ y^2&=\frac{\{\wp(\alpha)-e_2\}\{\wp(\beta)-e_2\}\{\wp(\gamma)-e_2\}}{(e_2-e_3)(e_2-e_1)},\\ z^2&=\frac{\{\wp(\alpha)-e_3\}\{\wp(\beta)-e_3\}\{\wp(\gamma)-e_3\}}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}.\end{aligned} \tag{9}$$

有益的是指出:按照第 103 目的公式(14),表达式(9)的右端都是单值函数的平方,因此 x,y,z 是坐标α,β,γ 的单值的解析函数.

再者,从(8)式以及第 103 目中关于函数$\wp$的微分方程(13),我们得出:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}=\frac{1}{\Pi_\lambda},\quad \frac{d\beta}{d\mu}=\frac{1}{\Pi_\mu},\quad \frac{d\gamma}{d\nu}=\frac{1}{\Pi_\nu},$$

因此,例如,$\Pi_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\alpha}$,因而在用新坐标时,拉普拉斯方程(如果在其中还按照公式(8)来代换差数$(\mu-\nu),\cdots$)具有形式:

$$\{\wp(\gamma)-\wp(\beta)\}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\{\wp(\alpha)-\wp(\gamma)\}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\{\wp(\beta)-\wp(\alpha)\}\frac{\partial^2 u}{\partial\gamma^2}=0. \tag{10}$$

(3) 两个圆形电流的互感系数 按定义等于

$$M=\int_C\int_{C'}\frac{\cos(PT,P'T')}{PP'}ds ds'=aa'\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\varphi'-\varphi)}{r}d\varphi d\varphi',$$

其中那些记号的意义从图 227 中即可明了. 用 Q 表示点 P' 到下面那个平面上的射影(在图 227 中没有画出), 于是

$$r=\sqrt{P'Q^2+PQ^2}$$
$$=\sqrt{b^2+a^2+a'^2-2aa'\cos(\varphi'-\varphi)}.$$

再引入一个新变量 $\tau=\varphi'-\varphi+\pi$ 来代替 φ', 于是, 按照周期函数积分的已知的性质, 再把关于 τ 的积分上下限 $\pi-\varphi, 3\pi-\varphi$ 用 $0, 2\pi$ 来替代, 得到

$$M=aa'\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\tau-\pi)}{r}d\tau$$
$$=-4aa'\pi\int_0^{\pi}\frac{\cos\tau d\tau}{\sqrt{a^2+a'^2+b^2+2aa'\cos\tau}},$$

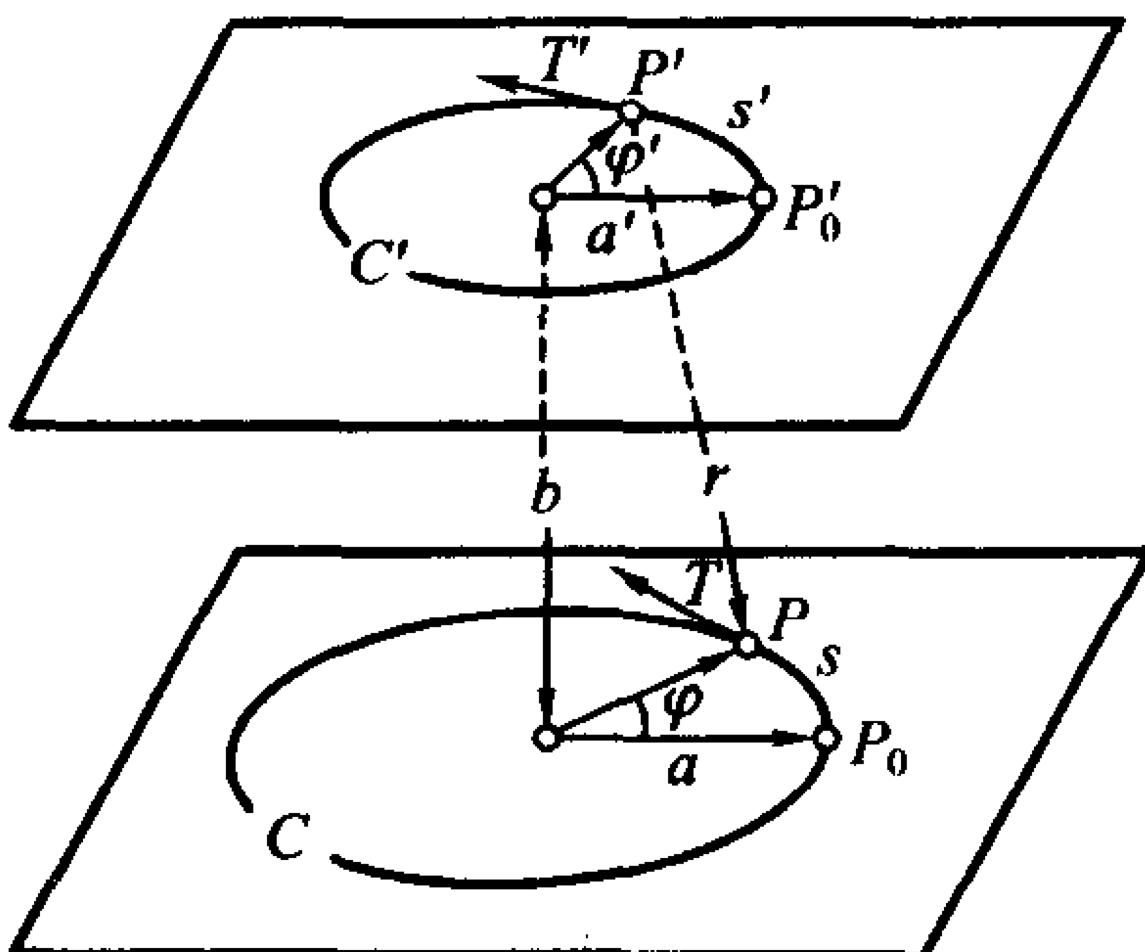


图 227

或, 作代换 $\tau=2t$, 得到

$$M=8\pi aa'\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin^2 t-1)dt}{\sqrt{(a+a')^2+b^2-4aa'\sin^2 t}}.$$

如果令

$$k=\frac{2\sqrt{aa'}}{\sqrt{(a+a')^2+b^2}},$$

则最后我们得到

$$M=4\pi\sqrt{(a+a')^2+b^2}\left\{-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt+\frac{1+k'^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\right\}$$
$$=4\pi\sqrt{(a+a')^2+b^2}\left\{\frac{1+k'^2}{2}K-E\right\}. \tag{11}$$

(4) 把上半平面映到给定的矩形上的共形映射 在第 39 目中我们讨论了把上半平面 $\mathrm{Im}\,w>0$ 映到平面 z 中的矩形上的映射, 矩形的边长由雅可比椭圆函数的参数 k 的选取来确定. 在这里, 我们将设矩形是任意的, 其边长为 a 与 b, 但把它安放得使它的顶点落在点 $\pm\frac{a}{2}$ 与 $\pm\frac{a}{2}+ib$ 上. 所求的那个映射由函数

$$z=C\int_0^{w}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \tag{12}$$

来实施, 并且, 要确定参数 k 与 C, 我们有两个方程(参看第 39 目中的(1)与(2))

$$\left.\begin{aligned} a&=2C\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=2CK(k),\\ b&=C\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}=CK(k'). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

从这些方程我们首先求出:

$$\frac{2b}{a}=\frac{K(k')}{K(k)}=\kappa,\quad q=e^{-\pi\kappa}=e^{-\frac{2\pi b}{a}},$$

然后根据已知的 q,从图 223 中,或从在页 551 上所引用的函数表,或第 102 目的(34)中的第二个公式,来求出 k^2. 知道了 k 后,可按完全椭圆积分的表,或借助于第 102 目的(34)中的第一个公式直接根据 q,来求出 K. 最后,知道了 K 与 a 后,从(13)的第一个公式可确定 C.

作为例子,我们来讨论把上半平面映到具有边 $a=b=1$ 的正方形上的映射. 我们有 $\kappa=2$(参看[14]),因此 $q=e^{-2\pi}\approx 0.001\ 87$,$\log q=\bar{3}.271\ 84$;$\alpha=9°53'$,$K=1.582\ 5$. 因此,$C=\frac{a}{2K}=0.315\ 9$,$k^2=\sin^2\alpha=0.029\ 45$,从而所求的映射是*

$$z=0.315\ 9\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-0.029\ 45w^2)}}. \tag{14}$$

如果不要求很大的精确度,那么在解矩形映射问题时利用下面的表是方便的,这表是从 Морс 和 Фешбах 的书[16]中借用来的.

$\frac{1}{\kappa}=\frac{K}{K'}$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
K	1.571	1.571	1.571	1.571	1.573	1.583	1.604	1.643	1.699	1.768	1.854
K'	∞	15.71	7.855	5.237	3.933	3.166	2.673	2.347	2.124	1.966	1.854
k	0	0	0.001 56	0.021 3	0.078 4	0.171	0.265	6.407	0.520	0.622	0.707
k'	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.985	0.965	0.913	0.853	0.784	0.707
α	0	0	5.4′	1°11.7′	4°30′	9°50′	15°22′	24°0′	31°23′	38°30′	45°
$q=e^{-\pi\kappa}$	0	0	0	0	0.000 4	0.001 9	0.005 3	0.011 4	0.019 7	0.030 7	0.043 2

这样,在上面考虑的情形 $\frac{1}{\kappa}=0.5$ 中,从这表中可以找出 $k=0.171$,由此 $k^2=0.029\ 2$,再者 $K=1.583$,由此 $C=\frac{1}{2K}=0.316$.

在 k 不大($0<k<0.1$)时足够好的近似是 $k\approx 4e^{\frac{-\pi K'}{2K}}=4\sqrt{q}$. 在 $\kappa>1$ 时分别取 K',k'和 $90°-\alpha$ 代替 K,k 和 α.

(5) 把具有裂缝的平面映到圆环形上的共形映射(图 228) 首先考虑把上半 z 平面映到具有顶点 $\pm K$, $\pm K+iK'$的矩形上的映射

$$z=\operatorname{sn}(\omega;k). \tag{15}$$

将映射(15)通过线段 AD 而延拓,我们得到一个把去掉了射线 $|z|>1$, $y=0$ 的 z 平面映到平面 $\omega=\xi+i\eta$ 中两倍大的矩形上的映射. 函数 $w=e^{\frac{\pi}{K'}\omega}$ 把这个矩形映射到圆环形 $e^{-\pi\frac{K}{K'}}<|w|<e^{\pi\frac{K}{K'}}$ 上,并且点 $\omega=\xi\pm iK'$黏合在一起. 而这表明:复合函数

$$w=e^{\frac{\pi}{K'}\omega}=\exp\left\{\frac{\pi}{K'}\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\right\} \tag{16}$$

实施了我们所求的映射. 这时,右面的线段 AB 变换成圆环的外面那个圆周,而在左面的线段 CD 变换成里面那个圆周.

---

* 注意到,当我们所讨论情形中矩形是正方形时,参数 k 是准确决定的. 也就是可以证明,点 $-\frac{1}{k}$, -1, 1, $\frac{1}{k}$ 的二倍比等于 -1,也就意味着 $k=3-2\sqrt{2}$. 由此 $k^2=17-12\sqrt{2}\approx 0.029\ 437$.

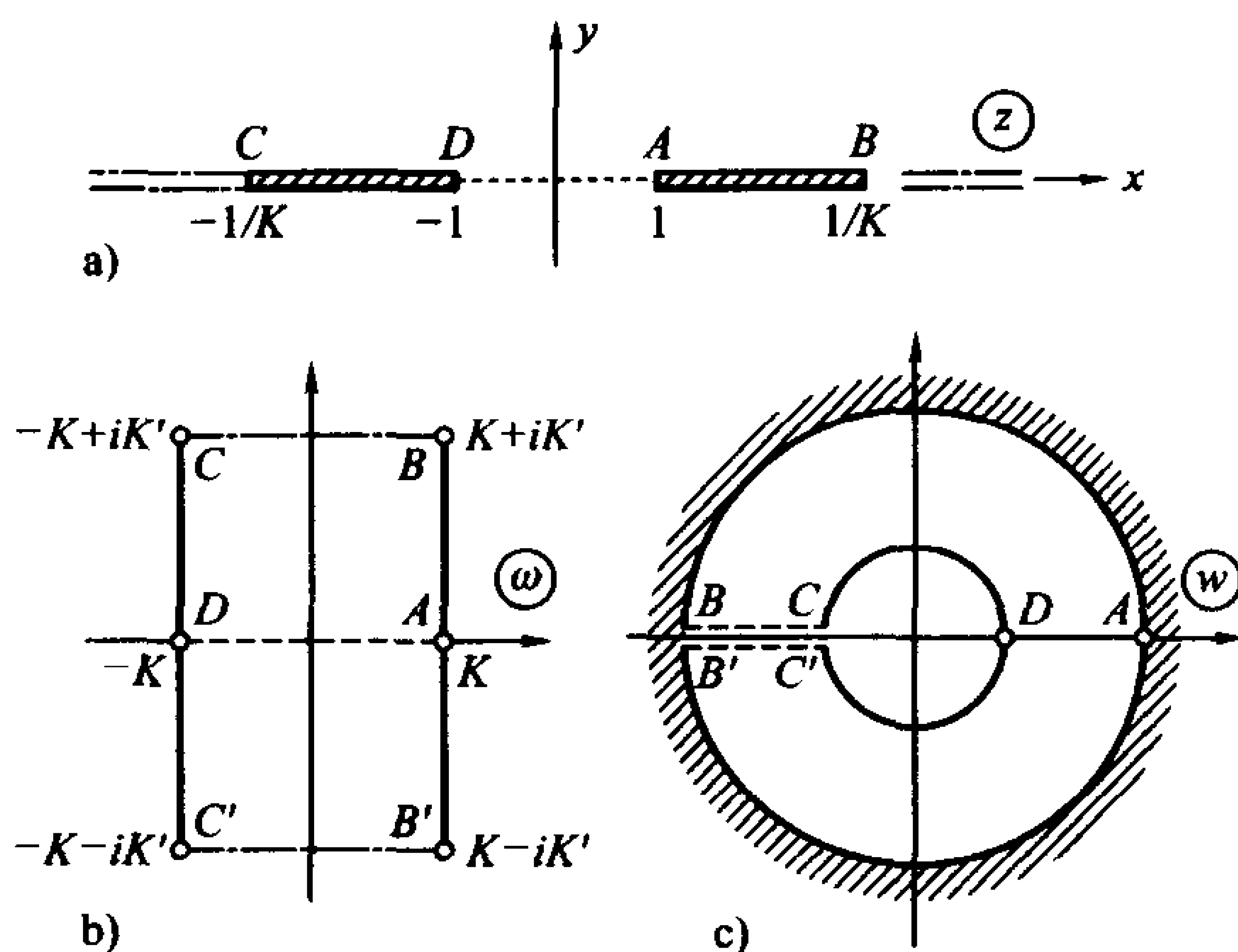


图 228

(6) 把上半平面映到图 229 中的区域上的共形映射 设点 $z=0,1,\infty$ 分别变换成 $w=0,D,\infty$,于是,实施所求的共形映射的那个函数,可写成施瓦茨 - 克里斯托弗积分(第 37 目)的形式:

$$w=C_1\int_0^z\frac{z^2-b^2}{\sqrt{(z^2-1)\left(z^2-\frac{1}{k^2}\right)}}dz,$$

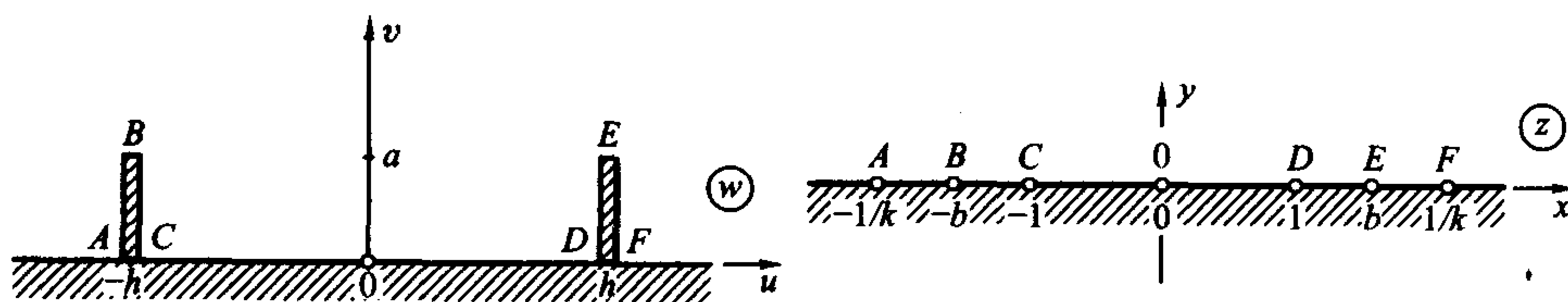


图 229

其中 $C_1>0,b>1$ 与 $\frac{1}{k}>1$ 是应受定义约束的某三个常数.在简单的变换之后,这个积分可重写成第一类椭圆积分与第二类椭圆积分的组合的形式:

$$w=C\left\{(k^2b^2-1)\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}+\int_0^z\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz\right\},\tag{17}$$

其中 C 是某一个正的常数.要确定这些常数,可利用点的对应关系:$z=1,w=h;z=\frac{1}{k},w=h$ 与 $z=b,w=h+ia$.从第一对点的对应关系得到

$$h=C\{(k^2b^2-1)K+E\},\tag{18}$$

其中的 K 与 E 是对应于模 k 的第一类与第二类完全椭圆积分(参看第 102 目).从第二对点的对应关系,注意到关系式(18),便得到:

$$0=(k^2b^2-1)K'+E_1=k^2b^2K'-E',\tag{19}$$

其中 $K'=K(k'),k'=\sqrt{1-k^2}$（参看第 102 目），而

$$E_1=\int_0^{\frac{1}{k}}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{t^2-1}}dt=K'-E' \tag{20}$$

且 $E'=E(k')$ $\left(\text{要确认最后这个等式，只要在积分中作代换 } t=\frac{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}{k} \text{ 便够了}\right)$. 最后，注意到关系式(18)，由第三对点的对应关系，当椭圆积分化为具有小于 1 的积分限的积分后 $\left(\text{这只要在第一类的积分中利用代换 } t=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}\text{，在第二类的积分中利用上面括弧中所指出的代换，就可做到}\right)$，给出：

$$a=C\{(k^2b^2-1)F(\alpha',k')+K'-F(\alpha'',k')+E(\alpha'',k')\}, \tag{21}$$

其中 $\sin\alpha'=\frac{1}{bk'}\sqrt{b^2-1},\sin\alpha''=\frac{1}{k'}\sqrt{1-k^2b^2}$. 从公式(18)，(19)，(21)，可近似地求出未知量 k，b 与 C.

(7) 两个矩形电极的静电场(图 230) 作把上半 ζ 平面映到这电场的上半部上去的共形映射，并使其具有标明在图 230 中的点的对应关系. 施瓦茨－克里斯托弗积分具有形式：

$$z=C\int_0^{\zeta}\sqrt{\frac{1-k^2\zeta^2}{1-\zeta^2}}d\zeta, \tag{22}$$

即，是第二类的椭圆积分. 从点 $z=1,w=h$ 与 $z=\frac{1}{k},w=h+ia$ 的对应关系，同在前一例子中一样，可以求得

$$h=CE(k),\quad a=C\{K(k')-E(k')\}. \tag{23}$$

由此，以其中的一个方程来除另一个，我们便得到用来确定模 k 的关系式. 再从(23)中来求出 k，我们便可求得 C.

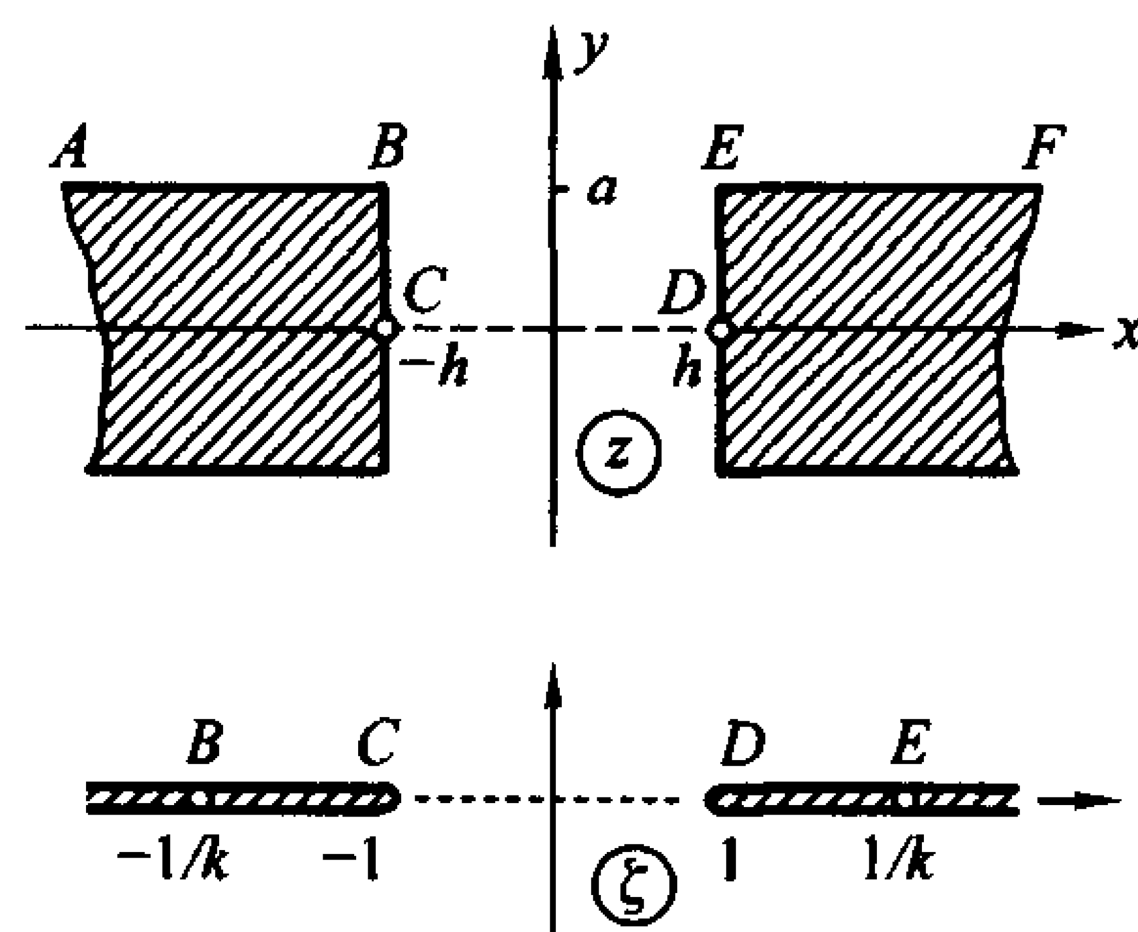


图 230

按照对称原理，积分(22)的反函数给出了把整个静电场区域映到去掉了射线 $|\zeta|>1,\mathrm{Im}\,\zeta=0$ 的平面 ζ 上的共形映射. 函数

$$\zeta=-\sin\frac{i\pi w}{2V}=\frac{1}{i}\mathrm{sh}\frac{\pi w}{2V} \tag{24}$$

实施把带形 $-V<\mathrm{Im}\,w<V$ 映到上半 ζ 平面上的映射. 这时，带形的下界线对应着左边的那条割痕，而其上界线则对应着右边的那条割痕.

因此，公式(22)与(24)给出了电场的复电位的参数表示，这电场是在左边的电极带有电位 $-V$，而右边的电极带有电位 V 时得到的. 电场强度向量是等于：

$$E=-i\overline{\frac{dw}{dz}}=-i\overline{\frac{dw}{d\zeta}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{dz}}=\frac{2V}{\pi C}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\bar{\zeta}^2}}. \tag{25}$$

(8) 位于矩形内部的点电荷的静电场 设电量为 q 的电荷位于具有能导电的墙壁的矩形 $0\leqslant x\leqslant\frac{\tau}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\tau'}{2}$ 的内部的点 $\zeta=\xi+i\eta$ 处(图 231). 电场的电位 U 是一个除了在点 ζ 处外在矩形内部处处调和的函数，在点 ζ 处它具有 $2q\ln\frac{1}{|z-\zeta|}$ 型的奇点，在矩形的墙壁上它等于 0. 墙壁的影响可用由 q 对于所给矩形的墙壁的反射而得到的电荷组 $\pm q$ 来替代(图 231)，这就等于把函数 U 延拓到整个平面 z 上.

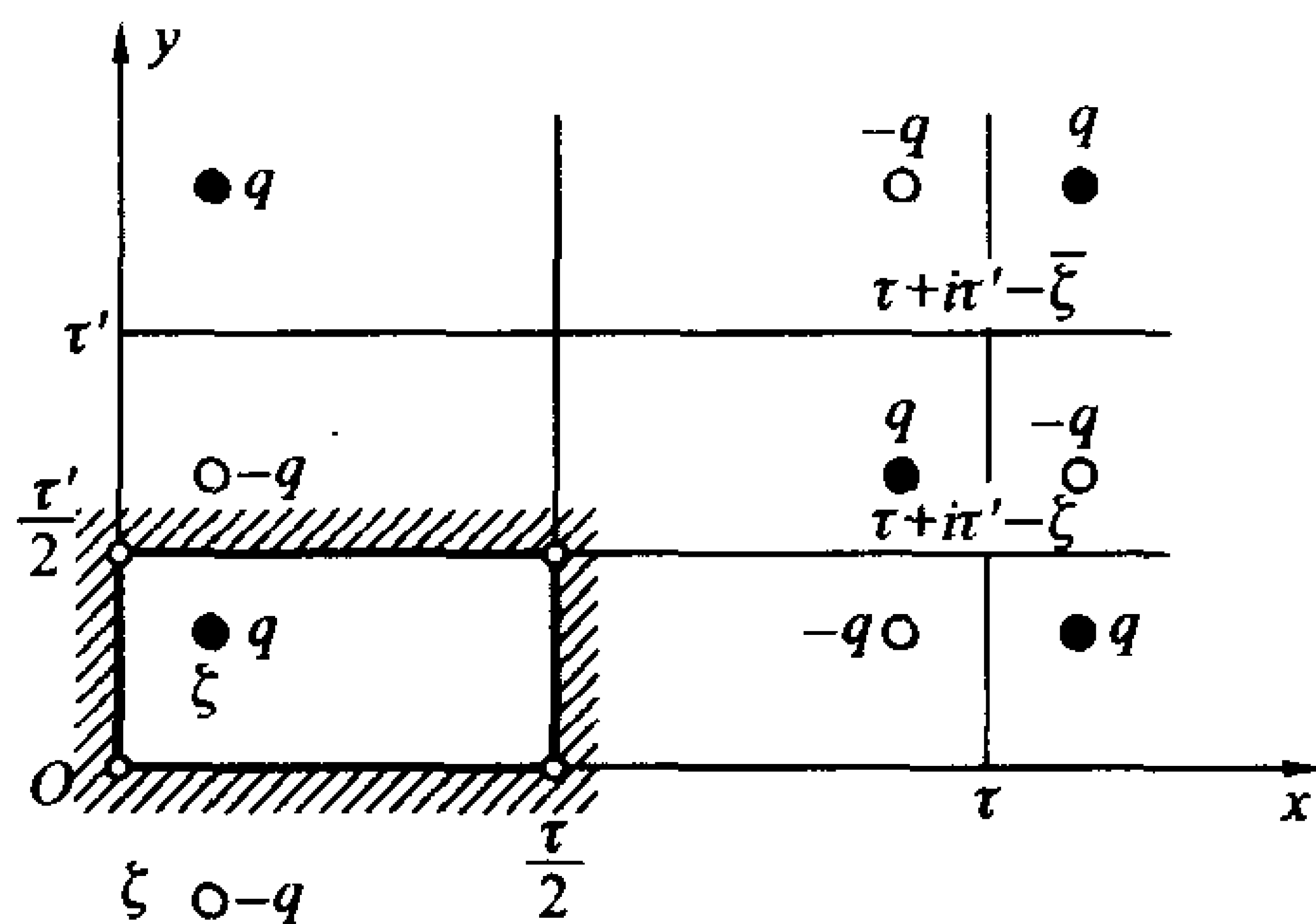


图 231

在这样的延拓之后,函数 U 将是具有周期 τ 与 τ' 的双周期函数,这时在点 $\zeta,\tau+i\tau'-\zeta$ 以及与它们同余的那些点处,它具有 $2q\ln\frac{1}{|z-\zeta|}$ 型的奇点,而在点 $\bar{\zeta},\tau+i\tau'-\bar{\zeta}$ 处,它具有 $2q\ln|z-\zeta|$ 型的奇点.设 $V(z)$ 是与 $U(z)$ 共轭的函数,于是

$$w=f(z)=e^{\frac{1}{2q}(U+iV)} \tag{26}$$

是具有基本周期 τ 与 $i\tau'$ 的椭圆函数,并且分别在与点 $\zeta,-\zeta$ 与 $\bar{\zeta},-\bar{\zeta}$ 同余的那些点处具有单的极点与零点.按照第 101 目的定理,函数 $f(z)$ 可利用魏尔斯特拉斯的 σ 函数来表示:

$$f(z)=\frac{\sigma(z+\bar{\zeta})\sigma(z-\bar{\zeta})}{\sigma(z+\zeta)\sigma(z-\zeta)} \tag{27}$$

(在这里,由于在公式(26)中我们关于 $U+iV$ 的乘因子的选择,有 $C=1$).所求的电场的电位是

$$U(z)=2q\mathrm{Re}\ln\frac{\sigma(z+\bar{\zeta})\sigma(z-\bar{\zeta})}{\sigma(z+\zeta)\sigma(z-\zeta)}. \tag{28}$$

(9) 阿希泽尔 - 戈卢金公式 在结束时我们进行对实施把圆环映到由两条多边形周线围住的二阶连通区域 D 的共形映射的公式的推导.这一公式类似于第 37 目中的施瓦茨 - 克里斯托弗公式;它在 20 世纪 30 年代由阿希泽尔 - 戈卢金(见[11])独立地求得.

为了确定起见我们假设,平面 w 的区域 D 包含无穷远点,也就是说,它是两个没有自交点的闭多边形的外部,我们用 Γ_0 和 Γ_1 表示这两个多边形.两个多边形的顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,我们用通常读数法进行这样编号,使得以自然顺序绕行它们时,区域 D 保持在左边.如在第 37 目中一样,相对于 D 的内角在顶点 A_k 上我们用 $\alpha_k\pi(0<\alpha_k<\pi)$ 来表示.根据多边形外角和的基本定理

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)=4. \tag{29}$$

我们寻找圆环 $K:r<|z|<1$ 到 D 的映射,其中数 $r(0<r<1)$ 应当在解题过程中确定(见第 35 目的定理 3 及其后的注).假设圆周 $C_0:|z|=1$ 转变到周线 Γ_0,而圆周 $C_1:|z|=r$ 转变到周线 Γ_1.点 A_k 的原像用 a_k 表示 $(k=1,2,\cdots,n)$,通过 $z=a$ 表示点 $w=\infty$ 的原像.不失一般性可以认为 a 在正半轴上,亦即 $r<a<1$.

映射函数 $w=f(z)$ 除了点 $z=a$ 以外,在环 K 中处处解析,在这一点它有一阶极点(根据映射的单叶性).由于这函数连续延拓到边界,并且把圆周 C_0 和 C_1 位于两个相继点 a_k 和 a_{k+1} 之间的任何的弧变换为直线线段,所以对它可以用第 35 目的对称原理.根据这个原理我们把函数 $f(x)$

延拓到环 $K_{-1}:1<|z|<\frac{1}{r}$，并且它在那里除了点 $z=\frac{1}{a}$ 以外是解析的，而在这一点它有一阶极点. 这函数把环 K_{-1} 共形映射到区域 D_{-1}，而这 D_{-1} 是由 D 在多边形 Γ_0 的一条边上经过反射得到的. 完全同样方式我们把这函数延拓到环 $K_1:r^2<|z|<r$ 内，一般说来延拓到环 $K_j:r^{j+1}<|z|<r^j(j=0,\pm1,\pm2,\cdots$；环 $K_0=K)$ 内. 如在第 37 目中一样，我们得到具有分支点在弧的端点 a_k 和相对于环 K_j 的边界圆周与它们对称的点，并且在点 a 和与其对称的点上有一阶极点的多值解析函数.

在平面 w 上一些直线中的等于 $2k$ 的偶数次反射归结为线性变换 $W=b_kw+c_k$，而在平面 z 中与它对应的变换是 $Z=r^{2k}z$. 因此多值函数 $f(z)$ 的分支，为简单起见我们用同一字母表示，应该满足关系式 $f(r^{2k}z)=b_kf(z)+c_k$. 将它求导两次，并且取第二次导数对第一次导数的比，我们得出

$$r^{2k}\frac{f''(r^{2k}z)}{f'(r^{2k}z)}=\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

（与第 37 目中施瓦茨－克里斯托弗公式的推导相比较）. 由此看出，函数 $\Phi(z)=z\frac{f''(z)}{f'(z)}$，满足关系式

$$\Phi(r^{2k}z)=\Phi(z),\quad k=\pm1,\pm2,\cdots \tag{30}$$

与函数 $f(z)$ 的分支的选择无关，亦即是单值函数.

如果函数 $\Phi(z)$ 的自变量乘 r^2，它不改变. 为了使它转变为周期函数，我们固定某一数 $\omega>0$，并且令

$$\varphi(z)=\Phi(e^{\frac{\pi i}{\omega}z}). \tag{31}$$

根据 $\Phi(z)$ 的单值性和指数函数的周期性我们得到

$$\varphi(z+2\omega)=\Phi(e^{2\pi i+\frac{\pi i}{\omega}z})=\varphi(z).$$

如果选虚数 ω'，使得有 $e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}}=r$，那么函数 $\Phi(z)$ 的性质(30)给出

$$\varphi(z+2\omega')=\Phi(r^2e^{\frac{\pi i}{\omega}z})=\varphi(z).$$

由此可见，函数 $\varphi(z)$ 是具有周期 2ω 和 $2\omega'$ 的双周期函数.

我们来讲清楚函数 $\varphi(z)$ 在其周期矩形内，譬如说，在矩形 $\varepsilon\leqslant\mathrm{Re}\ z<2\omega+\varepsilon$，$\varepsilon\leqslant\mathrm{Im}\ z<-2i\omega'+\varepsilon$ 内的奇点的特征，其中 $\varepsilon>0$ 不太大（我们取稍许移动的矩形，为了在它的边界上没有奇点）. 在映射 $Z=e^{\frac{\pi i}{\omega}z}$ 下对应于这矩形的是沿射线 $\arg Z=\frac{\pi\varepsilon}{\omega}$ 有割痕的环 $\lambda r^2\leqslant|Z|<\lambda$（其中 $\lambda=e^{-\frac{\pi\varepsilon}{\omega}}<1$，并且接近于 1）. 函数 $\Phi(Z)$ 在此环中的奇点是位于圆周 C_0 和 C_1 上的点 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$，还有点 a 和 $\frac{1}{a}$. 如在第 37 目中一样，我们将发现，函数 $f(Z)$ 在点 a_k 的邻域内容可以展开成形状

$$f(Z)=A+(Z-a_k)^{\alpha_k}\{c_0+c_1(Z-a_k)+\cdots\}.$$

而在点 a 和 $\frac{1}{a}$ 的邻域内

$$f(Z)=\frac{A'}{Z-a}+c_0'+c_1'(Z-a)+\cdots,\quad f(Z)=\frac{A''}{aZ-1}+c_0''+c_1''(aZ-1)+\cdots,$$

由此，对于函数 $\Phi(Z)=Z\dfrac{f''(Z)}{f'(Z)}$ 相应地我们得到 $\Phi(Z)=a_k\dfrac{\alpha_k-1}{Z-a_k}+\cdots,\Phi(Z)=-\dfrac{2a}{Z-a}+\cdots,$ $\Phi(Z)=-\dfrac{2}{aZ-1}+\cdots$（用这些点表示展开式的正则部分）. 在这里重新令 $Z=e^{\frac{\pi i}{\omega}z},\Phi(Z)=\varphi(z)$，我们用 $z_k=\dfrac{\omega}{\pi i}\ln a_k$ 表示对应于 a_k 的点，并且我们注意到

$$Z-a_k=a_k\left(e^{\frac{\pi i}{\omega}(z-z_k)}-1\right)=a_k\frac{\pi i}{\omega}(z-z_k)+\cdots,$$

我们得到 $\varphi(z)$ 在点 z_k 的邻域内的展开式

$$\varphi(z)=\frac{\omega}{\pi i}\frac{\alpha_k-1}{z-\frac{\omega}{\pi i}\ln a_k}+\cdots,$$

完全一样在对应于点 a 和 $\dfrac{1}{a}$ 的点 $z=\pm\dfrac{\omega}{\pi i}\ln a$ 的邻域内我们得到

$$\varphi(z)=-\frac{\omega}{\pi i}\frac{2}{z-\frac{\omega}{\pi i}\ln a}+\cdots,\quad \varphi(z)=-\frac{\omega}{\pi i}\frac{2}{z+\frac{\omega}{\pi i}\ln a}+\cdots.$$

由此可见，双周期函数 $\varphi(z)$ 在其周期矩形内所有奇点是极点，因此，这函数是椭圆函数. 所有这些极点是单的，并且它们的留数之和，根据关系式(29)，

$$\frac{\omega}{\pi i}\left\{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)-4\right\}=0,$$

对椭圆函数来说应该如此. 利用第 103 目的展开式(29)，我们能够通过 ζ 函数来表示 $\varphi(z)$

$$\varphi(z)=\frac{\omega}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\zeta\left(z-\frac{\omega}{\pi i}\ln a_k\right)-\frac{2\omega}{\pi i}\zeta\left(z-\frac{\omega}{\pi i}\ln a\right)-\frac{2\omega}{\pi i}\zeta\left(z+\frac{\omega}{\pi i}\ln a\right)+C,\quad(32)$$

其中 C 为常数.

现在我们回忆起，$\varphi\left(\dfrac{\omega}{\pi i}\ln z\right)=\Phi(z)=z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$，并且考虑到按照第 103 目中公式(28)

$$\zeta\left[\frac{\omega}{\pi i}(\ln z-\ln a_k)\right]=\frac{\pi iz}{\omega}\frac{d}{dz}\ln\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln\frac{z}{a_k}\right).$$

把它代入(22)式，我们得到

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\frac{d}{dz}\ln\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln\frac{z}{a_k}\right)-2\frac{d}{dz}\ln\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln\frac{z}{a}\right)-2\frac{d}{dz}\ln\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln az\right),$$

由此，经过积分和指数化，我们求得 $f'(z)$ 通过 σ 函数的表达式：

$$f'(z)=C'\frac{\prod_{k=1}^{n}\sigma^{\alpha_k-1}\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln\frac{z}{a_k}\right)}{\sigma^2\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln\frac{z}{a}\right)\sigma^2\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln az\right)}.$$

用 ϑ 函数来代换 σ 函数，根据第 103 目公式(37)（在公式中 $\tau=2\omega$），我们有

$$f'(z)=C''z^c\frac{\prod_{k=1}^{n}\vartheta_1^{\alpha_k-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{a_k}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{a}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{2\pi i}\ln az\right)},$$

其中 C'' 和 c 是常数. 我们略去可以证明 $c=2$ 的讨论（见[11]）. 再积分一次，我们得到把环 $r<|z|<1$ 映射到含有无穷远点的二阶连通多边形区域的共形映射的最后公式：

$$f(z)=C\int\frac{\prod_{k=1}^{n}\vartheta_1^{\alpha_k-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{a_k}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{a}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{2\pi i}\ln az\right)}\frac{dz}{z^2}. \tag{33}$$

完全同样证明,把环映射到有界二阶连通多边形区域,这区域顶点 A_k 处的内角(相对于区域讲)等于 $\alpha_k\pi$ $(k=1,2,\cdots,n)$,类似于(33)的映射公式:

$$f(z)=C\int\prod_{k=1}^{n}\vartheta_1^{\alpha_k-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{a_k}\right)\frac{dz}{z^2}. \tag{34}$$

我们注意,如施瓦茨-克里斯托弗公式一样,这些公式含有未知参数(C,a_k 和 r),它们应该在解题过程中确定.确定它们的难度限制了这些公式的实际应用.

参考文献

第一章

[1] И.И.Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М. : Наука, 1984.

[2] А. И. Маркушевич. Теория. аналитических функций. Т. 1, 2. —М. : Наука, 1968.

[3] А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций. —М. : Наука, 1978.

[4] Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. —М. : Наука, 1985.

[5] С. С тоилов. Теория функций комплексного переменного. Т. 1, 2. — М. : ИЛ, 1962.

[6] А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. —М. : Наука, 1968.

[7] А. В. Бицадзе. Основы теорин аналитических функций комплексного переменного. —М. : Наука, 1984.

[8] М. А. Евграфов. Аналитические функции. — М. : Наука, 1968.

[9] А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной, —М. : Наука, 1979.

[10] В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. Ⅲ, ч. 2. — М. : Гостехиздат, 1957. — См. также: М. : Наука, 1974.

[11] Б. А. Фукс и Б. В. Шабат. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения,— М. :Наука,1964.

[12] Дж. Спрингер. Введение в теорию римановых поверхностей. —М. : ИЛ, 1960.

[13] А. И. Маркушевич. Очерки по истории теории аналитических функций. — М. :Гостехиздат,1951.

[14] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. Лекции по теории аналитических функций. — М. :Наука,1982.

第二章

[1] А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Т. 1,2. — М. :Наука, 1968.

[2] М. А. Лаврентьев. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. —М. :Гостехиздат,1946.

[3] Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. —М. :Наука,1985.

[4] К. Каратеодори. Конформное отображение. —М. :ОНТИ,1934.

[5] Р. Курант. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. — М. :ИЛ,1953.

[6] Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. —М. :Наука,1966.

[7] М. В. Келдыш. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области//Успехи мат. наук,1939. — Вып. 6. — С. 90—119.

[8] Г. М. Голузин, Л. В. Канторовичи др. Конформное отображениеодносвязных и многосвязных областей. — М. :ОНТИ,1937.

[9] Л. В. Канторовичи В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. —М. :Физматгиз,1962.

[10] П. Ф, Фильчаков. Приближенные методы конформных отображений: Справочное руководство. — Киев,1964.

[11] П. Ф. Фильчаков и В. И. Панчишин. Интеграторы. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. — Киев: Изд-во АН УССР, 1961.

[12] Г. И. Положий. Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двусвязных областей и онределение постоянных Кристоффеля—Шварца при помощи электрогидродипамических аналогий//Укр. мат. журн. —1956. —Т. 7, № 4. —С. 423—432.

[13] В. Коппенфельс, Ц. Штальман. Практика конформных отображений. —

М. :ИЛ, 1963.

第三章

[1] И. Г. Петровский. Лекций об уравнениях с частными производпыми.— М. :Физматгиз, 1970.

[2] Э. Гурса. Курс математического анализа. Т. 3, Ч. 1— М. :ОНТИ, 1934.

[3] Л. Н. Сретенский. Теория ньютоновского потенлцала.— М. : Гостехиздат, 1946.

[4] Д. Ю. Панов. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных.— М. :Гостехиздат, 1949.

[5] П. Ф. Фильчаков, В. И. Панчишин. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге.— Киев:Издво АН УССР, 1961.

[6] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромсханика. Ч. 1, Ч. 2.— М. :Физматгиз, 1963.

[7] В. В. Голубев. Лекции по теории крыла — М. :Гостехиздат, 1950.

[8] Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М. : Гостехиздат, 1950.

[9] И. М. Аснин. Расчеты электромагнитных полей.— Л. :ВЭТА, 1939.

[10] Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. :Изд-во АН СССР, 1954.

[11] Г. В. Колосов. Применение комплексных переменных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости.—М. :ОНТИ, 1935.

[12] Х. С. Карслоу. Теория теплопроводности.— М. :Гостехиздат, 1947.

[13] Ф. Д. Гахов. Краевые задачи.— М. :Физматгиз, 1963.

[14] Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Наука, 1968.

[15] И. Н. Векуа. Обобщенные апалитические функции.— М. : Физматгиз, 1959.

[16] М. А. Лаврентьев. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа.— М. :Изд-во АН СССР, 1962.

[17] Л. И. Волковыский. Квазиконформные отображения.— Львов: Издво Львовского ун-та, 1954.

[18] Ф. Трикоми. О линейных уравнениях смешанного типа.— М. : Гостехиздат, 1947.

[19] А. В. Бицадзе. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1953.— Вып. 41.

[20] М. А. Лаврентьев. Кумулятивный заряд и припципы его работы// Успехи мат. наук. - 1957. — Т. 12, вып. 4. — С. 41—56.

[21] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М. : Наука, 1977.

第四章

[1] М. А. Лаврентьев. К теории конформных отображений // Тр. Физ. -мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1934.

[2] М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник. Основы вариационного исчисления. Т. 1, Ч. 2. — М. : ОНТИ, 1935. — См. Дополнение 2: О некоторых экстремальных задачах в теории конформных отображений.

[3] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М. : Наука, 1966.

[4] Р. Курант. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. — М. : ИЛ, 1953. — См. Приложение: М. Шиффер, Некоторые новые результаты в теории конформного отображения.

[5] М. А. Лаврентьев. О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй // Мат. сб. — 1938. —Т. 4(46), вып. 3. —391—458.

[6] М. А. Лаврентьев. Конформные отображения с приложением к некоторым вопросам механики. — М. : Гостехиздат, 1946.

[7] М. А. Лаврентьев. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. — М. : Изд-во АН СССР, 1962.

[8] Л. И. Седов. Приложение теории функций комплексного переменного кнекоторым задачам плоской гидродинамики //Успехи мат. наук. —1939. —Вып. 6.

[9] Н. Н. Павловский. Теория движения грунтовых вод при гидротехнических сооружениях и ее основные приложения. — Петроград: Научномелиорационный ин-т, 1922.

[10] П. Ф. Фильчаков. Теория фильтрации под гидродинамическими сооружениями. — Т. 1, 2, — Киев: Изд-во АН УССР, 1959, 1960.

[11] П. Ф. Фильчаков. Приближенные методы конформных отображений. — Киев: Наукова думка, 1964.

第五章

[1] А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. — М. : 《Наука》, 1968.

[2] А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. — М. :《Наука》, 1968.

[3] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. Ч. 1.— М.: Физматгиз, 1963.

[4] Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — Т. 26. —1949.

[5] Основы автоматического регулирования / Под ред. В. В. Солодовникова.— М.: Машгиз, 1954.

[6] Цянь Сюэ-сэнь. Техническая кибернетика. — М.: ИЛ, 1956.

[7] М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Физматгиз, 1962.

[8] Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. Т. 1.— М.: Гостехиздат, 1951.

[9] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы.— М.: Наука, 1977.

[10] Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. —Ч. 1— М.: Наука, 1985.

[11] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы втеории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1963.

[12] Н. Г. де Брейн. Асимптотические методы в анализе. — М.: ИЛ, 1961.

[13] А. Эрдейи. Асимптотические разложения. — М.: Физматгиз, 1962.

[14] Э. Копсон. Асимптотические разложения. — М.: Мир, 1966.

[15] М. В. Федорюк. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

第六章

[1] А. М. Эфрос, А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы. — ДНТВУ, 1937.

[2] А. И. Лурье. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. — М.: Гостехиздат, 1950.

[3] Х. Карслоу, Д. Егер. Операционные методы в прикладной математике.— М.: ИЛ, 1948.

[4] М. И. Конторович. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях,— М.: Гостехиздат, 1953.

[5] К. А. Круг. Переходныe процессы в линейных электрических цепях.— М.: Госэнергоиздат, 1952.

[6] А. В. Лыков. Теплопроводность нестационарных процессов.—М.: Госэнергоиздат, 1948.

[7] С. И. Евтянов. Переходные процессы в приемно-усилительных схемах.— М.: Гостехиздат, 1948.

[8] Б. В. Булгаков. Колебания. —М. :Гостехиздат,1954.

[9] Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов фурье. —М. : Гостехиздат, 1948.

[10] И. Снеддон. Преобразование Фурье. —М. :ИЛ,1955.

[11] В. А. Диткин, А. П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. —М. :Наука,1974.

[12] Я. Микусинский. Операторное исчисление. —М. :ИЛ. 1956.

[13] Г. Дёч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа с приложением таблиц,составленных Р. Гершелем. —М. :Наука,1965.

[14] И. М. Гельфанди Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. —М. :Физматгиз,1958.

[15] Л. Шварц. Математические методы для физических наук. —М. : Мир, 1965.

[16] Г. Ватсон. Теория бесселевых функций. Ч. 1:Теория;ч. 2:Таблицы. —М. : ИЛ,1949.

[17] Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. Т. 1. —М. : Гостехиздат,1951.

第七章

[1] В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. Ⅲ. Ч. 2. —М. : Гостехиздат, 1949. —См. также: М. :Наука,1974.

[2] Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. Т. 1. —М. : Гостехиздат,1951.

[3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. — М. :Наука,1977.

[4] Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. —М. :Физматгиз, 1963.

[5] Е. Уиттекер,Г. Ватсон. Курс современного анализа. Т. 2. —М. :Физматгиз, 1963.

[6] Д. Джексон. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. —М. :ИЛ,1948.

[7] Г. Ватсон. Теория бесселевых функций. Ч. 1:Теория;Ч. 2:Таблицы. —М. : ИЛ,1949.

[8] Р. О. Кузьмин. Бесселевы функции. —М. :ОНТИ,1935.

[9] Э. Грей, Г. Мэтьюз. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. —М. :ИЛ,1953.

[10] В. А. Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. —М. :

Издво АН СССР, 1946.

[11] Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций. —М. : Наука, 1970.

[12] Ю. С. Сикорский. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. —М. : ОНТИ, 1936.

[13] А. М. Журавский. Справочник по эллиптическим функциям. —М. ; Изд-во АН СССР, 1941.

[14] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. —М. : Наука, 1977.

[15] А. Кратцер, В. Франц. Трансцендентные функции. —М. : ИЛ, 1963.

[16] Ф. М. Морс, Г. Фешбах Методы теоретической физики. Т. 1, 2. —М. : ИЛ, 1958.

[17] А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. —Т. 12. —М. : Наука, 1968.

索　　引

译者后记

本书的俄文第一版(1951年)由施祥林、夏定中两位先生翻译,高等教育出版社于1956年和1957年分两册出版中文版。这次高教社根据俄文第六版组织修订时,因施祥林先生已经故世,夏定中先生年事已高,所以委托我来完成这项工作。

本书以共形映射为基本内容,它作为工具,广泛应用于物理学、流体动力学、气体动力学、弹性力学和电气技术中实际问题的计算以及数学的其他分支。作为俄罗斯的高等学校教材,它不仅被综合性大学采用,而且更多的高等技术学校当作"复变函数论"课程的教材。由于这本书的内容详尽,联系实际的例子丰富,一般安排一个学年的课时才能授完。

在前几版中,修改幅度最大的要数第五版。本版在此基础上又作了完善。与第一版比,新版增加了拉夫连季耶夫独创的聚能装药流体动力学理论的有关内容;为了更完整地把复变函数论用到数学分析和解偏微分方程问题,除了原先版本中已叙述的变分法、特殊函数和拉普拉斯等变换算子方法的基本理论外,还通俗地介绍了广义函数的基本理论。虽然在结构体系方面各个版本没有本质差异,但经过几次修订,内容的增删更加合理,应用实例更为丰富,使本书更趋完善,不愧为复变函数论方法的一本经典著作。

原书的第一作者拉夫连季耶夫是前苏联著名的数学家、苏联科学院院士,曾任国际数学联盟副主席。在函数论、常微分方程、变分法、复变函数、连续介质力学等领域都有建树。他为高等学校编著了一系列教科书和教学参考书,如《变分法教程》、《数学——它的内容、方法和意义》等,这些均有中译本,在我国较有影响。

对本书的修订工作,一方面补译了新版中增加的章节,根据第六版又核对了原先

的中译本，订正了原译本中的差错；另一方面，根据全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》，对数学名词、外国数学家中译名作了统一的订正。

在本书的翻译出版过程中，我要感谢两位前辈所做的奠基工作；感谢高等教育出版社张小萍女士对我的信任以及为顺利出版所做的很多努力；还要感谢王善平先生和倪明先生给我的帮助。

虽然历时6个月，努力做好修订的各项工作，但精力、体力不如从前，失误、疏漏在所难免，欢迎广大读者提出批评意见。

吕乃刚

2005年国庆节